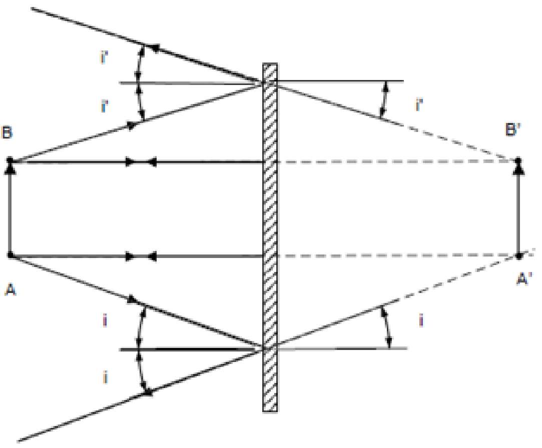
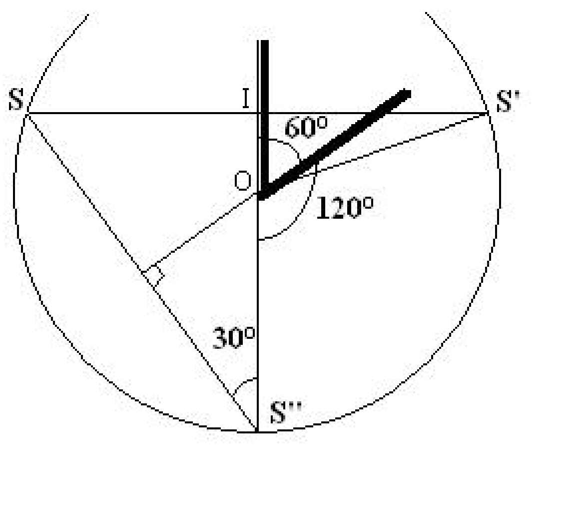
1) Stigmatisme d’un miroir plan

Un miroir réfléchi totalement la lumière. Pour construire l’image de A considérons le rayon orthogonal au miroir. Ce rayon est réfléchi dans la même direction et dans le sens opposé. Considérons maintenant un autre rayon issu de A et faisant un angle *i* avec la normale au miroir (voir figure ci-dessous). Ce rayon est réfléchi selon une direction faisant un angle *i* avec la normale (voir figure ci-dessous). L’intersection du premier rayon réfléchi avec le second définit A’ l’image de A. Cette image est virtuelle correspond à l’intersection de rayons virtuels (voir figure). Cette image est unique car le miroir vérifié un stigmatisme rigoureux. En effet quelque soit l’angle *i*, l’intersection entre le premier rayon et le second s’effectue toujours au point A’, le point symétrique orthogonal de A par rapport au miroir plan.
Pour construire l’image d’un objet il suffit de considérer son symétrique orthogonal par rapport au miroir.



2)



1) S' est l'image de S par le miroir dans sa première position et S" l'image après rotation. O étant un point fixe de l’axe de la charnière de la porte support du miroir on a

$$OS = OS' = OS''$$

la courbe décrite par l'image est une portion de circonférence. Dans le triangle OIS'

$$OS' = \sqrt{OI^2 + IS'^2} = 1.58 \text{ m}$$

2) L’arc S’S” est donné par

$$S'S'' = 1.58\,\frac{120\,\pi}{180} = 3.31\ \text{m}$$

3) Dans le triangle SIS"

$$SS' = \frac{SI}{\sin 30°} = 3\,\text{m}$$

3) S' est l'image de S par le miroir plan, les rayons qui arrivent sur le plafond semblent venir de S'

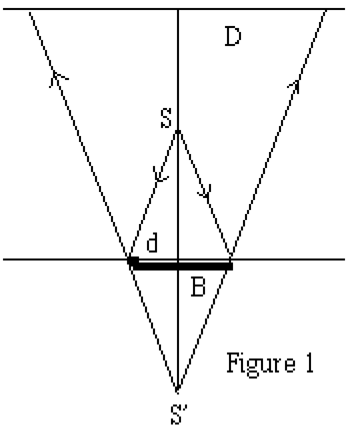


Figure 1

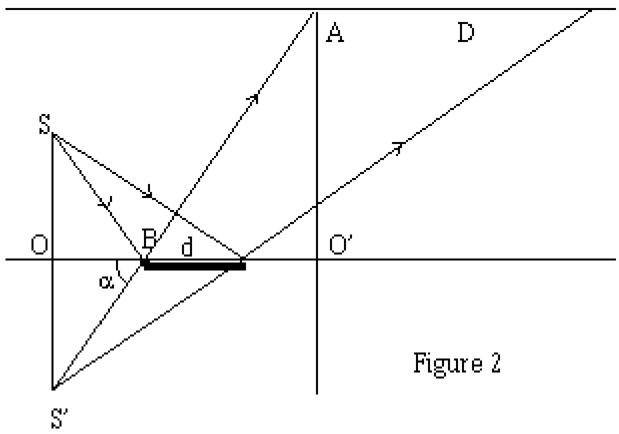


Figure 2

si S est sur la normale au miroir passant par son centre (figure 1)

$$\frac{D}{d} = \frac{AS'}{BS'} = \frac{240}{40} \Rightarrow D = 60\ \text{cm}$$

si S n'est pas sur cette normale (figure 2)

$$\sin\alpha = \frac{OS'}{BS'} = \frac{AO'}{AB} \Rightarrow \frac{AB}{BS'} = \frac{240}{40} = 5$$

$$\frac{D}{d} = \frac{AS'}{BS'} = \frac{AB+BS'}{BS'} = \frac{6\,BS'}{BS'} = 6 \Rightarrow D = 60\ \text{cm}$$

la tache au plafond est toujours circulaire de même diamètre.

4) Principe de Fermat et loi de Snell-Descartes pour la réfraction

On peut attribuer les coordonnées suivantes aux points A, M et B: A(0,y1), M(x,0), B(x2,y2)
Les distances AM et MB peuvent être exprimées avec les coordonnées données en haut:

$$AM = \sqrt{x^2 + y_1^2} \text{ et } MB = \sqrt{(x_2 - x)^2 + y_2^2}$$

Le temps pour le passage de A à B est égal à :

$$t = \frac{AM}{V_1} + \frac{MB}{V2}$$

avec V1et V2 les vitesses de la lumière dans le milieu 1 et 2 respectivement. Le principe de Fermat postule que le temps de parcourt de la lumière doit être minimal. C'est-à-dire le point M (i.e. la coordonnée x) doit être tel que le temps t soit minimal, ce qui revient à demander que :

$$\frac{dt}{dx} = 0$$

Or $\frac{dt}{dx} = \frac{d}{dx}\left(\frac{\sqrt{x^2 + y_1^2}}{V_1} + \frac{\sqrt{(x_2 - x)^2 + y_2^2}}{V_2}\right) = \frac{1}{V_1}\frac{x}{\sqrt{x^2 + y_1^2}} - \frac{1}{V_2}\frac{x_2 - x}{\sqrt{(x_2 - x)^2 + y_2^2}}$

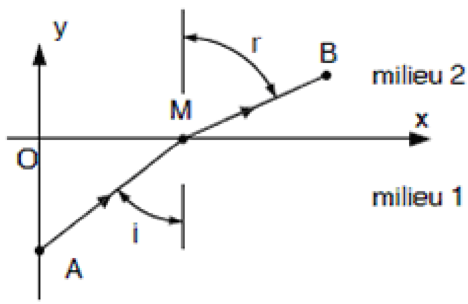
$$\frac{dt}{dx} = \frac{1}{V_1}\frac{x}{AM} - \frac{1}{V_2}\frac{x_2 - x}{MB}$$

Par conséquent $\frac{dt}{dx} = 0 \Rightarrow \frac{1}{V_1}\frac{x}{AM} = \frac{1}{V_2}\frac{x_2 - x}{MB}$ (1)

Or $\sin i = \frac{x}{AM}$ et $\sin r = \frac{x_2 - x}{MB}$ (2)

En injectant (2) dans (1) on obtient : $\frac{\sin i}{V_1} = \frac{\sin r}{V_2}$

En posant $n = c/V$, on établit alors la relation de Snell-Descartes pour la réfraction, à savoir : $n_1 \sin i = n_2 \sin r$



5) 1)Pour le dioptre plan l'objet et l'image sont toujours dans le même milieu. Pour le poisson l'objet est l'observateur qui est dans l'air. Pour l'observateur, l'objet est le poisson qui est dans l'eau.
la relation de conjugaison quand on est proche de la normale est :

HA est la verticale ou normale. H appartient à la surface de séparation des deux milieux c'est aussi le point où le rayon incident se réfracte ,n1 est le milieu où se trouve l'objet A. A' est l'image de A. l'image A' est dans le milieu où se trouve A, n2 est le milieu où se trouve l'observateur.
Soit H l'intersection de AB et de la verticale OP l'image P' de P par rapport au dioptre eau/air est donnée par

$$\overline{HP'} = \frac{\overline{HP}}{n} = 60 \text{ cm}$$

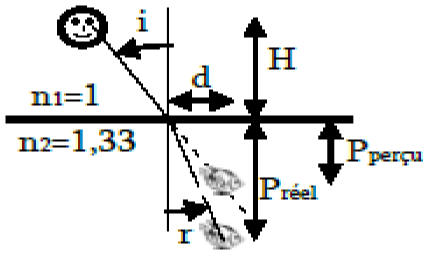
L'observateur voit le poisson à 60 cm de AB l'image O' de O par rapport au dioptre air/eau est
$\overline{HO'} = n\,\overline{HO} = 160$ cm

Le poisson voit l'observateur à 160 cm de AB.

6)

Schéma accentué :

1. On a : $\begin{cases} \tan(i) = \dfrac{d}{P_{perçu}} \\ \tan(r) = \dfrac{d}{P_{réel}} \\ n_1 \sin(i) = n_2 \sin(r) \end{cases}$



Donc : $P_{perçu} = \dfrac{d}{\tan(i)} = \dfrac{P_{réel} \times \tan(r)}{\tan(i)} = \dfrac{P_{réel} \times \sin(r) \times \cos(i)}{\sin(i) \times \cos(r)}$

On simplifie : $P_{perçu} = \dfrac{P_{réel} \times n_1 \times \cos(i)}{n_2 \times \sqrt{1-\sin^2(r)}} = \dfrac{P_{réel} \times n_1 \times \cos(i)}{\sqrt{n_2^2 - n_1^2 \sin^2(i)}}$

Pour i = 15°, cela donne $\boxed{P_{perçu} = 44{,}4 \text{ cm.}}$

2. Le poisson voit le pêcheur plus loin, on retourne la formule : $\boxed{H_{perçue} = \dfrac{H_{réelle}\sqrt{n_2^2 - n_1^2 \sin^2(i)}}{n_1 \times \cos(i)} = 2{,}16\ m}$

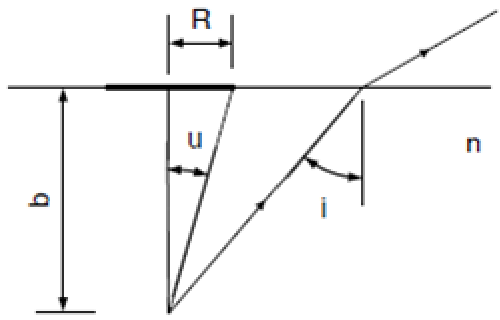
3. Différentes valeurs en fonction de l'angle :

Angle	0°	15°	30°	45°	60°
$P_{réel}$ (cm)	60	60	60	60	60
$P_{perçu}$ (cm)	45,1	44,4	42,2	37,7	29,7

→ On voit que le dioptre plan-eau n'est pas stigmatique, puisque tous les rayons émergeant de l'eau ne se croisent pas en une unique image, mais en une zone image (intersection dépendant de l'angle d'émergence).

7) Réflexion totale

Soit un rayon provenant de l'extrémité du clou et soit i l'angle que fait ce rayon avec la surface de l'eau (voir Figure). Ce rayon subit une réflexion totale lorsque n sin(i) > 1. L'angle de réflexion totale, a, est donc tel que sin(a) = 1/n. Soit l'angle u que forme l'extrémité du clou avec l'extrémité du disque (voir Figure 1). Les rayons tel que i<u ne seront jamais vus quelque soit u et a. Les rayons tels que i>u subiront tous une réflexion totale lorsque u > a. Or tan(u)= R/b, par conséquent l'extrémité du clou ne sera jamais visible lorsque R/b > tan(a). Or $\tan^2(a) = \sin^2(a)/(1-\sin^2 a) = 1/(n^2-1)$, le clou sera donc visible lorsque $(R/b)^2 < 1/(n^2-1)$.



8) Mesure de l'indice d'un liquide

Considérons le rayon lumineux partant du point M et arrivant après réflexion au point N. Notons b l'angle d'incidence de ce rayon avec la surface eau-air et soit r l'angle du rayon réfracté (voir Figure). Une variation de la hauteur du liquide (h) entraîne une variation de l'angle b et par conséquent de l'angle r. Pour une hauteur quelconque r et i sont différents. Lorsque l'observateur regarde le point N, il voit alors deux points distincts : le point N et le reflet du point M. En revanche pour une position donnée de h, l'angle i et r sont égaux et le reflet de M et le point N sont confondus. Dans ces conditions on a :

$n \sin(b) = \sin i$.

Or $\tan(b) = a/2/h$.

Par ailleurs $\tan^2(b) = \sin^2 b / \cos^2 b = \sin^2 i / n^2 / (1-\sin^2 b) = \sin^2 i / (n^2 - \sin^2 i)$.

On obtient alors la relation $n = \sin(i)\,(1 + 4\,h^2/a^2)^{1/2}$.