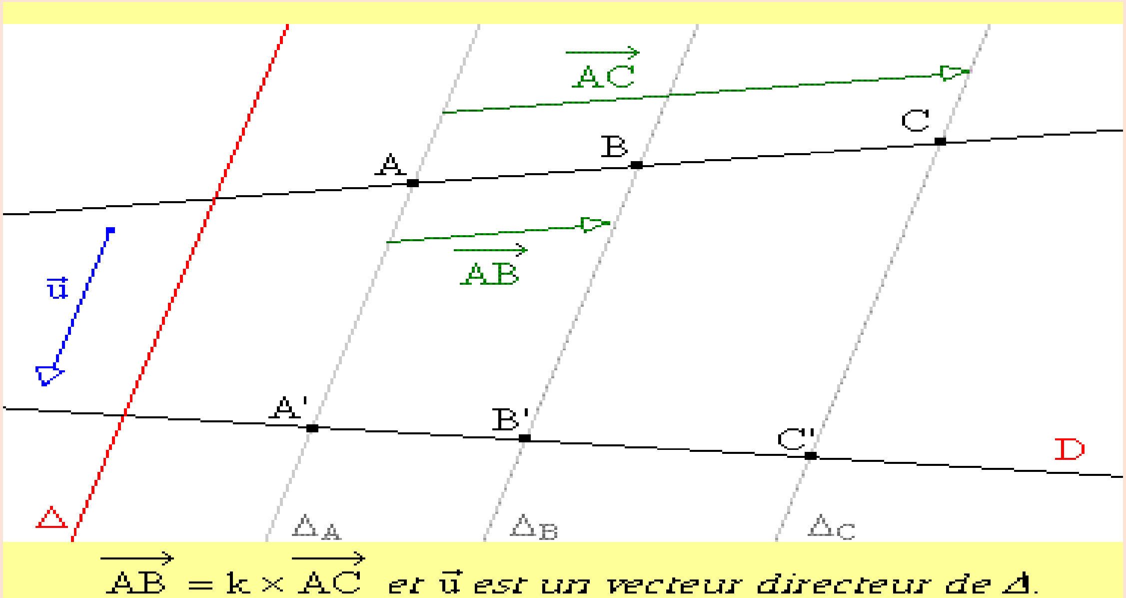
Démonstration du théorème de Thales pour le tronc commun scientifique marocain français national(2014-2015) par le prof ENNAJI AHMED lycée biranzarane

A ELJADIDA COURS PROJECTION (propriété de Thales direct en vecteurs)

A, B et C sont donc trois points tels que $\overrightarrow{AB} = k \times \overrightarrow{AC}$ où k est un réel.



La situation est la suivante :

On appelle $\vec{u}$ un vecteur directeur de la droite (Δ).
C'est aussi un vecteur directeur de la droite (Δ_A) qui est la parallèle à Δ passant par A.
Comme A' en fait partie. Il existe donc un réel a tel que $\overrightarrow{A'A} = a.\vec{u}$.

De la même façon, en considérant les droites (Δ_B) et (Δ_C), nous pouvons affirmer qu'il existe des réels b et c tels que $\overrightarrow{B'B} = b.\vec{u}$ et $\overrightarrow{C'C} = c.\vec{u}$.

Revenons à la relation $\overrightarrow{AB} = k \times \overrightarrow{AC}$. Appliquons-y la relation de Chasles

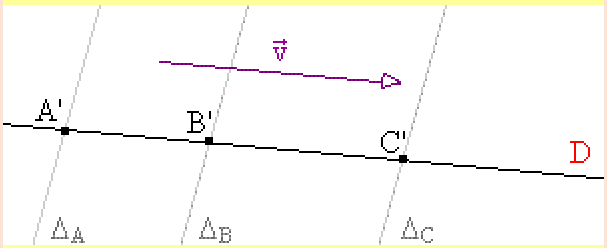
$$\begin{gathered}
\overrightarrow{AB} = k \times \overrightarrow{AC} \\
\overrightarrow{AA'} + \overrightarrow{A'B'} + \overrightarrow{B'B} = k \times \left(\overrightarrow{AA'} + \overrightarrow{A'C'} + \overrightarrow{C'C} \right) \\
-a.\vec{u} + \overrightarrow{A'B'} + b.\vec{u} = k \times \left(-a.\vec{u} + \overrightarrow{A'C'} + c.\vec{u} \right) \\
\overrightarrow{A'B'} - k \times \overrightarrow{A'C'} = \underbrace{(a - k \times a - b + k \times c)}_{d}.\vec{u} \\
\overrightarrow{A'B'} - k \times \overrightarrow{A'C'} = d.\vec{u}
\end{gathered}$$

Là, deux cas sont possibles. Soit d est nul, soit il ne l'est pas !

Voyons ce qui se passe lorsque d est non nul.

Supposons que d ne soit pas nul. Comme $\vec{u}$ est un vecteur directeur, il est lui aussi non nul. Le produit d.$\vec{u}$ n'est donc pas égal au vecteur nul ! Par conséquent, il en va de même pour $\overrightarrow{A'B'} - k \times \overrightarrow{A'C'}$.

Intéressons-nous aux points A', B' et C'. Ils font tous trois partie de la droite (D). On appelle $\vec{v}$ un vecteur directeur de cette droite.



$\vec{v}$ est un vecteur directeur de D.

Nous pouvons écrire qu'il existe deux réels x et y tels que $\overrightarrow{A'B'} = x.\vec{v}$ et $\overrightarrow{A'C'} = y.\vec{v}$.

Ainsi donc :

$$\overrightarrow{A'B'} - k \times \overrightarrow{A'C'} = x.\vec{v} - (k \times y)\vec{v} = \underbrace{(x - k \times y)}_{z}.\vec{v} = z.\vec{v}$$

Comme $\overrightarrow{A'B'} - k \times \overrightarrow{A'C'}$ est non nul et que $\vec{v}$ est un vecteur directeur, le réel z est nécessairement non nul. Si l'on résume, on a donc que :

$$d.\vec{u} = z.\vec{v} \quad \text{c'est-à-dire } \vec{u} = \underbrace{\left(\frac{z}{d}\right)}_{\neq 0}.\vec{v}$$

Autrement dit, les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires. Vu qu'ils sont des vecteurs directeurs des droites(Δ) et(D), celles-ci sont donc parallèles.

Ce qui est absurde. En effet, dans une projection la droite sur laquelle on projette (ici(D)) ne peut être parallèle à l'axe par rapport auquel on projette (ici(Δ)).

Si l'on résume :

Si d est non nul alors les droites (D) et(Δ) sont parallèles.

Autrement dit, si (D) et (Δ)ne sont pas parallèles alors le réel d ne peut pas être non nul. Il est donc nécessairement égal à 0.

Nous venons de réaliser une démonstration par l'absurde. <u>Nous avons</u> supposé quelque chose(d non nul). Et de fil en aiguille, nous avons montré que cela n'était *pas possible puisque l'on aboutissait à une contradiction ((D) et Δ parallèles). Le principe d'une démonstration par l'absurde est de montrer qu'une certaine chose (ici d = 0) est impossible <u>car</u> cela contredit les données de départ (ici(D) et Δ non parallèles).*

Le réel d est donc nécessairement nul ! Par suite :

$$\overrightarrow{A'B'} - k \times \overrightarrow{A'C'} = \underbrace{0}_{d}\vec{u} = \vec{o}$$
$$\text{d'où } \overrightarrow{A'B'} = k \times \overrightarrow{A'C'}$$

Ce qui démontre le théorème de projection.

Note : le théorème de projection est à la base de toutes les versions existantes du théorème de Thales ainsi que du théorème des milieux. Grâce à lui, ces derniers peuvent être démontrés. C'est ce qui explique son importance et le fait que nous en parlions... alors que d'autres n'effleurent <u>à peine</u>.