Les suites réelles : Généralités

I Notion de suite réelle

1) Définition :

Soit I une partie non vide de IN. On appelle suite réelle définie sur I, toute application U de I dans IR.

- Le réel U(n) est noté U_n il est appelé terme général de la suite U. Cette notation est appelée notation indicielle.
- Une suite U, définie sur I, est aussi notée $(U_n)_{n \in I}$.
- Si I est fini, la suite est dite finie.
- Si I est infini, la suite est dite infinie.
- La somme $U_0 + U_1 + \ldots\ldots\ldots\ldots + U_n$ est notée $\sum_{i=0}^{n} U_i$

2) Mode de présentation d'une suite

Une suite réelle est définie soit par :

- **Son terme général U_n. (Pour tout entier naturel n, on peut déterminer directement U_n)**

Exemple : $U_n = 2n^2 - 3$; $V_n = \sqrt{n-5}$ (Attention (V_n) est définie pour $n \geq 5$).

- **Une relation de récurrence.**

Exemple : (U_n) définie sur IN par $\begin{cases} U_0 = 1 \\ U_{n+1} = \sqrt{1 + U_n^2} \end{cases}$. En partant de $U_0 = 1$, permet de calculer de proche en proche les termes de la suite (U_n)

(Wn) définie sur IN par $\begin{cases} W_0 = 1, \ W_2 = 3 \\ W_{n+2} = W_{n+1} + W_n \end{cases}$. En partant de $W_0 = 1$ et $W_2 = 3$, permet de calculer de proche en proche les termes de la suite (W_n). ($W_3 = W_2 + W_1 = 1 + 3 = 4$)

Remarque : Parfois d'une relation de récurrence, on peut déterminer le terme général.

3) Suites arithmétiques :

a) Définition :

Soit n_0 un élément de IN et $I = \{n \in IN, n \geq n_0\}$.

Une suite U, définie sur I, est une suite arithmétique s'il existe un réel r tel que, pour tout n de I, on ait : $U_{n+1} = U_n + r$. Le réel r est appelée la raison de la suite U.

b) Remarque : Pour montrer qu'une telle suite est arithmétique, soit exprimer U_{n+1} en fonction de U_n, telle que $U_{n+1} = U_n + r$, soit montrer que $U_{n+1} - U_n = r$ (r est une constante ne dépend pas de n).

c) Exemple : (U_n) définie sur IN telle que $U_0 = 2$ et $U_{n+1} = U_n + 5$, est arithmétique de raison 5.

d) Conséquences : Soit U une suite arithmétique de premier terme U_0 et de raison r.

- Pour tout n de IN, on a : $U_n = U_0 + nr$
- La somme des n premiers termes de cette suite est : $S_n = \frac{n(U_0 + U_{n-1})}{2}$

  En général, $s = \sum_{i=p}^{n} U_i = (n - p + 1)(\frac{U_n + U_p}{2})$

e) Exercice : (Le but de cet exercice c'est déterminer l'expression du terme général U_n de la suite (U_n) définie par une relation de récurrence faisant intervenir la notion d'une suite arithmétique).

Enoncé :

Soit (U_n) la suite définie sur IN par $\begin{cases} U_0 = 1 \\ U_{n+1} = \sqrt{3 + U_n^2} \end{cases}$

1) a) Calculer U_1 et U_2

b) Vérifier que la suite (U_n) n'est pas arithmétique

2) Soit (V_n) la suite définie sur IN par $V_n = 1 + U_n^2$

a) Montrer que (V_n) est une suite arithmétique de raison r =3

b) Exprimer V_n en fonction de n puis U_n en fonction de n.

Corrigé :

1) a) $U_1 = 2$ et $U_2 = \sqrt{7}$

b) On a $U_1 - U_0 \neq U_2 - U_1$ et par suite (U_n) n'est pas arithmétique.

2) a) On a $\mathbf{V_{n+1}} = 1 + U_{n+1}^2 = 1 + (3 + U_n^2) = 3 + (1 + U_n^2) = \mathbf{3 + V_n}$; par suite (V_n) est une Suite arithmétique de raison 3.

b) $V_n = V_0 + 3n$ tel que $V_0 = 1 + U_0^2 = 2$ et donc $V_n = 2 + 3n$.

Or $V_n = 1 + U_n^2$ signifie que $2 + 3n = 1 + U_n^2$ par suite $U_n = \sqrt{1+3n}$.

Puisqu'elle est à termes positifs.

4) Suites géométriques :

a) Définition :

Soit n_0 un élément de IN et $I = \{n \in IN, n \geq n_0\}$.

Une suite U, définie sur I, est une suite géométrique s'il existe un réel q tel que, pour tout n de I, on ait : $U_{n+1} = qU_n$. Le réel q est appelée la raison de la suite U.

b) Remarque :

Pour montrer qu'une telle suite est géométrique, soit exprimer U_{n+1} en fonction de U_n, telle que $U_{n+1} = qU_n$, soit montrer que $\frac{U_{n+1}}{u_n} = q$ (q est une constante ne dépend pas de n).

c) Conséquences :

Soit U une suite géométrique de premier terme U_0 et de raison non nulle q.

- Pour tout n de IN, on a : $U_n = q^n.U_0$
- La somme des n premiers termes de cette suite est : $S_n = \begin{cases} U_0\left(\frac{1-q^n}{1-q}\right) & , si\ q \neq 1 \\ nU_0\ , si\ q = 1 & \end{cases}$

En général : $S = \sum_{i=P}^{i=n} U_i = U_0(\frac{1-q^{n-p+1}}{1-q})$ si $q \neq 1$; $S = (n-p+q)U_0$, si $q = 1$

II – Monotonie d'une suite

a) Vocabulaires

Soit n_0 un entier naturel et U une suite définie sur $I = \{n \in IN, n \geq n_0\}$.

- Si pour tout n de I, $U_{n+1} = U_n$, on dit que (U_n) est constante sur I.

- Si pour tout n de I, $U_{n+1} \geq U_n$, on dit que (U_n) est croissante sur I.
- Si pour tout n de I, $U_{n+1} \leq U_n$, on dit que (U_n) est décroissante sur I.
- Une suite es dite non monotone si elle ni constante, ni croissante, ni décroissante. (Exemple $U_n = (-1)^n$; c'est une suite alternée)

b) Méthodes pour étudier la monotonie d'une suite

1ère méthode

Etudier la monotonie d'une suite U revient à déterminer le signe de $U_{n+1} - U_n$

2ème méthode

Pour une suite U à termes strictement positifs, étudier la monotonie de la suite U, revient à comparer $\frac{U_{n+1}}{U_n}$ à 1.

- Si pour tout n de IN, $\frac{U_{n+1}}{U_n} = 1$, la suite est constante.
- Si pour tout n de IN, $\frac{U_{n+1}}{U_n} \geq 1$, la suite est croissante.
- Si pour tout n de IN, $\frac{U_{n+1}}{U_n} \leq 1$, la suite est décroissante.

3ème méthode

Si une suite U est définie sur IN par : $U_n = f(n)$, Etudier la monotonie de U, revient à étudier le sens de variation de f sur $[0 ; +\infty[$.

4ème méthode

Si une suite U est définie sur IN par : $U_{n+1} = f(U_n)$, Etudier la monotonie de U, revient à comparer f(x) à x. (à l'aide de la représentation graphique de f et la droite d'équation y = x).

II – Convergence des suites réelles

1) Définition : (Limite finie)

Soit n_0 un entier naturel et U une suite définie sur $I = \{n \in IN, n \geq n_0\}$ et l un réel

On dit que la suite U admet pour limite l, si pour tout réel ε strictement positif, il

existe un entier naturel p tel que : $(n \in I \text{ et } n \geq p) \Rightarrow |U_n - l| < \varepsilon$

- On dit que la suite U converge vers l.
- Lorsque la suite n'est pas convergente, on dit qu'elle est divergente.

2) Théorème 1 : Si une suite admet une limite l, alors cette limite est unique.

3) Théorème 2 : Toute suite convergente est bornée.

4) **Théorème 3 :** - Toute suite croissante et majorée est convergente.

- Toute suite décroissante et minorée est convergente.

III- Image d'une suite par une fonction continue

1) Théorème 1 :

Si une fonction f est continue en l ($l \in IR$) et si une suite U converge vers l, alors la suite $(f(U_n))$ converge vers f(l).

2) **Exemple :** Soit la suite V définie sur IN* par : $V_n = n \sin\frac{1}{n}$. Déterminons $\lim_{n \to +\infty} V_n$.

Pour n de IN*, on peut écrire : $V_n = \frac{\sin\frac{1}{n}}{\frac{1}{n}}$

Soit U la suite définie sur IN* par : $U_n = \frac{1}{n}$ et f la fonction définie sur IR par :

$\begin{cases} f(x) = \frac{\sin x}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ f(0) = 1 \end{cases}$. La suite U converge vers 0 et la fonction f est continue en 0

(puisque $\lim_{x \to +0} \frac{\sin x}{x} = 1$). Alors la suite $(f(U_n))$ converge vers f(0), c'est-à-dire $\lim_{n \to +\infty} V_n = 1$.

3) Corollaire :

Soit f une fonction continue sur un intervalle D et soit U une suite à valeurs dans D qui converge vers un réel l. Si $U_{n+1} = f(U_n)$ et si $l \in D$ alors $l = f(l)$

4) Exemple :

Enoncé :

Soit la suite U définie sur IN par : $\begin{cases} U_0 = 1 \\ U_{n+1} = \sqrt{2 + U_n} \end{cases}$

1) Montrer que la suite U est positive.
2) Montrer que la suite U est majorée par 2 et qu'elle converge vers un réel $l \geq 0$

3) Déterminer l.

Corrigé :

1) Montrons par récurrence que pour tout n de IN, Un > 0

On a : $U_0 > 0$ et $U_1 = \sqrt{3} > 0$. Soit n > 1 et supposons que $U_n > 0$ et montrons que $U_{n+1} > 0$.

On a : $U_n > 0 \Rightarrow 2 + U_n > 0 \Rightarrow \sqrt{2 + U_n} > 0 \Rightarrow U_{n+1} > 0$ et donc U est positive.

2) Montrons par récurrence que la suite U est croissante et puis majorée par 2 pour qu'on puisse conclure qu'elle est convergente.

❖ Montrons par récurrence, que pour tout n de IN, $U_n \leq 2$.

On a $U_0 = 1 \leq 2$ et $U_1 = \sqrt{3} \leq 2$.

Soit p ∈ IN. Supposons que $U_p \leq 2$ et montrons que $U_{p+1} \leq 2$

On a : $U_p \leq 2 \Rightarrow U_p + 2 \leq 4$

$$\Rightarrow \sqrt{U_p + 2} \leq \sqrt{4}$$

$$\Rightarrow U_{p+1} \leq 2$$

Il en résulte, d'après le principe de raisonnement par récurrence, que la suite U est majorée par 2.

❖ On a : $U_0 = 1$ et $U_1 = \sqrt{3}$ alors $U_0 < U_1$

Soit p ∈ IN. Supposons que $U_p < U_{p+1}$ et montrons que $U_{p+1} < U_{p+2}$

On a : $U_p < U_{p+1} \Rightarrow 2 + U_p < 2 + U_{p+1}$

$$\Rightarrow \sqrt{2 + U_p} < \sqrt{2 + U_{p+1}}$$

$$\Rightarrow U_{p+1} < U_{p+2}$$

Il en résulte, d'après le principe de raisonnement par récurrence, que la suite U est croissante.

- La suite U, étant croissante et majorée donc elle converge vers un réel l. Comme, pour tout n de IN, $U_n \geq 0$ alors $l \geq 0$

3) On a : $U_{n+1} = f(U_n)$ où f est la fonction $x \longrightarrow \sqrt{2+x}$. La fonction f étant continue,

On déduit du corollaire précédent que : $l = f(l)$ c'est-à-dire $l = \sqrt{2+l}$. Il suit : $l = 2$

IV – Etude de suites définies par une somme

Exercice 1 :

Enoncé :

Soit la suite U définie sur IN* par : $U_n = \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \dots\dots\dots\dots + \frac{1}{n^2}$

1) Etudier la monotonie de la suite U.

2) a) Montrer que, pour tout $k \geq 2$, $\frac{1}{k^2} < \frac{1}{k-1} - \frac{1}{k}$

b) En déduire que, pour tout n de IN*, $U_n \leq 2 - \frac{1}{n}$

3) En déduire que la suite U est convergente et que la limite est inférieure ou égale à 2

Corrigé :

1) $U_{n+1} - U_n = \left(\frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \dots\dots + \frac{1}{n^2} + \frac{1}{(n+1)^2}\right) - \left(\frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \cdots\dots\dots + \frac{1}{n^2}\right)$

$= \frac{1}{(n+1)^2} > 0$. Donc la suite U est strictement croissante.

2) a) Pour $k \geq 2$, $\frac{1}{k-1} - \frac{1}{k} = \frac{1}{k^2 - k} > \frac{1}{k^2}$ en effet $0 < k^2 - k < k^2$

b) D'après l'inégalité précédente, on déduit que :

$\frac{1}{2^2} < \frac{1}{2-1} - \frac{1}{2}$

$\frac{1}{3^2} < \frac{1}{3-1} - \frac{1}{3}$

. .

. .

$\frac{1}{(n-1)^2} < \frac{1}{n-2} - \frac{1}{n-1}$

$\frac{1}{n^2} < \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}$

On additionne membre à membre, on obtient : $\frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \ldots\ldots + \frac{1}{n^2} < 1 - \frac{1}{n}$

et par suite $\frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \ldots\ldots + \frac{1}{n^2} < 1 + \left(1 - \frac{1}{n}\right)$.

Il en résulte que $U_n \leq 2 - \frac{1}{n}$

3) D'après 2) b), on déduit que la suite U est majorée par 2 et d'après 1) elle est croissante, il en résulte qu'elle est convergente vers un réel $l \leq 2$.

Exercice 2 :

Enoncé :

1) Montrer par récurrence que, pour tout n de IN*, $\frac{1}{n!} \leq \frac{1}{2^{n-1}}$

2) On considère la suite (U_n) définie sur IN* par : $U_n = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \ldots\ldots + \frac{1}{n!}$

Déduire de la première question que cette suite est majorée par 3.

En déduire qu'elle est convergente.

Corrigé :

1) On vérifie cette relation pour n = 1, n = 2 et n = 3.

Soit $p \in$ IN. Supposons que $\frac{1}{p!} \leq \frac{1}{2^{p-1}}$ et montrons que $\frac{1}{(p+1)!} \leq \frac{1}{2^p}$

On a : $\frac{1}{p!} \leq \frac{1}{2^{p-1}} \Rightarrow \frac{1}{(p+1)p!} \leq \frac{1}{(p+1)2^{p-1}} \leq \frac{1}{2\times 2^{p-1}} = \frac{1}{2^p}$ en effet $p \geq 2$; $\frac{1}{p+1} \leq \frac{1}{2}$

$\Rightarrow \frac{1}{(p+1)!} \leq \frac{1}{2^p}$

2) D'après la relation de récurrence précédente, on déduit que :

$\frac{1}{1!} \leq \frac{1}{2^0}$

$\frac{1}{2!} \leq \frac{1}{2^1}$

. .

$\frac{1}{n!} \leq \frac{1}{2^{n-1}}$

On additionne membre à membre, on obtient : $\frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \ldots\ldots + \frac{1}{n!} \leq \sum_{k=0}^{n-1} (\frac{1}{2})^k$

ainsi $\frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \ldots\ldots + \frac{1}{n!} \leq \left(\frac{1}{2}\right)^0 (\frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n}{1 - \frac{1}{2}}) \leq \frac{1}{1 - \frac{1}{2}} = 2$

et par suite $1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \ldots\ldots + \frac{1}{n!} \leq 1 + 2 = 3$

Il en résulte que $U_n \leq 3$

On a : $U_{n+1} - U_n = \frac{1}{(n+1)!} \geq 0$, alors la suite (U_n) est croissante de plus majorée donc convergente

Exercice 3 :

Enoncé :

Soit a un réel strictement positif. On pose, pour tout entier naturel $n \geq 1$,

$I_n = \int_0^a \frac{(a-t)^n}{n!} e^t \, dt$ et $S_n = 1 + a + \frac{a^2}{2!} + \ldots\ldots + \frac{a^n}{n!}$

1) Montrer que $e^a = 1 + a + \int_0^a (a-t) e^t dt = S_1 + I_1$

2) Démontrer que $I_n = \frac{a^{n+1}}{(n+1)!} + I_{n+1}$

3) Démontrer par récurrence que $e^a = S_n + I_n$

4) Montrer que la suite S_n est croissante et majorée par e^a

5) En déduire que $\lim_{n \to +\infty} \frac{a^n}{n!} = 0$

6) Calculer $\int_0^a \frac{(a-t)^n}{n!} dt$, en déduire que $0 \leq I_n \leq \frac{a^{n+1}}{(n+1)!} e^a$

7) Montrer alors que $\lim_{n \to +\infty} (1 + a + \frac{a^2}{2!} + \ldots\ldots + \frac{a^n}{n!}) = e^a$

Corrigé :

1) On a : D'une part $S_1 = 1 + a$ et $I_1 = \int_0^a \frac{(a-t)^1}{1!} e^t \, dt = \int_0^a (a-t) \, e^t \, dt$

Par suite $S_1 + I_1 = 1 + a + \int_0^a (a-t)\, e^t\, dt$

D'autre part en intégrant par partie $\int_0^a (a-t)\, e^t\, dt$ en posant $u = (a - t)$; $u' = -1$

et $v' = e^t$; $v = e^t$, on obtient $\int_0^a (a-t)\, e^t\, dt = [(a-t)\, e^t]_0^a + \int_0^a e^t\, dt$

$$= -a + e^a - 1$$

et par suite $e^a = 1 + a + \int_0^a (a-t)\, e^t\, dt$

Il en résulte que $e^a = 1 + a + \int_0^a (a-t) e^t dt = S_1 + I_1$

2) En intégrant par partie $I_n = \int_0^a \frac{(a-t)^n}{n!}\, e^t\, dt$, en posant $u' = \frac{(a-t)^n}{n!}$; $u = -\frac{(a-t)^{n+1}}{(n+1)!}$

et $v = e^t$; $v' = e^t$, on obtient

$$I_n = \int_0^a \frac{(a-t)^n}{n!}\, e^t\, dt = [-\frac{(a-t)^{n+1}}{(n+1)!} e^t]_0^a + \int_0^a \frac{(a-t)^{n+1}}{(n+1)!}\, e^t\, dt$$

$$I_n = \frac{a^{n+1}}{(n+1)!} + I_{n+1}$$

3) On a : $e^a = S_1 + I_1$(d'après 1))

Soit $p \in IN$. Supposons que $e^a = S_p + I_p$ et montrons que $e^a = S_{p+1} + I_{p+1}$

On a: $S_{p+1} = 1 + a + \frac{a^2}{2!} + \dots\dots + \frac{a^{p+1}}{(p+1)!}$ et $I_{p+1} = I_p - \frac{a^{p+1}}{(p+1)!}$ (d'après 2))

En déduit que $S_{p+1} + I_{p+1} = S_p + I_p = e^a$

4) On a : $S_{n+1} - S_n = \frac{a^{n+1}}{(n+1)!} \geq 0$, par suite la suite (S_n) est croissante

On a : $I_n \geq 0$ en effet pout $0 \leq t \leq a$ on a : $(a-t)^n \geq 0$ et par suite $\int_0^a \frac{(a-t)^n}{n!}\, e^t\, dt \geq 0$

Ainsi $S_n = e^a - I_n \leq e^a$ et par suite (S_n) est majorée par e^a

5) On a d'après 4), la suite (S_n) est croissante et majorée, alors elle est convergente et par suite $\lim_{n \to +\infty} \frac{a^n}{n!} = 0$; car la somme d'une suite est convergent veut dire que le terme général de cette suite converge vers 0

6) On a : $I_n = \int_0^a \frac{(a-t)^n}{n!} e^t \, dt \leq \int_0^a \frac{(a-t)^n}{n!} e^a \, dt = e^a \left[-\frac{(a-t)^{n+1}}{(n+1)!}\right]_0^a = \frac{a^{n+1}}{(n+1)!} e^a$

car $0 \leq t \leq a$ ainsi $1 \leq e^t \leq e^a$

Il en résulte que $0 \leq I_n \leq \frac{a^{n+1}}{(n+1)!} e^a$

7) On a : $\lim_{n \to +\infty} \frac{a^n}{n!} = 0$ signifie que $\lim_{n \to +\infty} \frac{a^{n+1}}{(n+1)!} = 0$, ainsi

$\lim_{n \to +\infty} \frac{a^{n+1}}{(n+1)!} e^a = e^a \left(\lim_{n \to +\infty} \frac{a^{n+1}}{(n+1)!}\right) = 0$ et donc $\lim_{n \to +\infty} I_n = 0$

Or on a : $S_n + I_n = e^a$ en déduit que $\lim_{n \to +\infty} S_n = e^a$, autrement dit

$\lim_{n \to +\infty}\left(1 + a + \frac{a^2}{2!} + \dots\dots + \frac{a^n}{n!}\right) = e^a$

Remarque : Concernant la limite de la suite (U_n) de l'exercice n°2, en déduit que

$\lim_{n \to +\infty} U_n = e$ puisque a = 1.

V- Séries d'exercices proposés avec corrections

Exercice n°1 :

Enoncé

On définit la suite réelle (u_n) par : $\begin{cases} u_0 = 0 \\ u_1 = a \end{cases}$ et $\forall$ n $\in \mathbb{N}$, $u_{n+2} = pu_{n+1} - (p-1)u_n$

où $p \in \mathbb{R}_+ \setminus \{0, 1, 2\}$

1. On pose, $\forall$ n $\in \mathbb{N}$, $w_n = u_{n+1} - u_n$. Montrer que (w_n) est une suite géométrique et calculer w_n en fonction de p, n et a.
2. On pose, $\forall$ n $\in \mathbb{N}$, $t_n = u_{n+1} - (p-1)\, u_n$. Montrer que (t_n) est une suite constante et calculer t_n en fonction de a.
3. Calculer u_n en fonction de w_n et t_n, puis en fonction de p, n et a.
4. On définit la suite réelle (v_n) par : $\begin{cases} v_0 = 1 \\ v_1 = e^a \end{cases}$ et $\forall$ n $\in \mathbb{N}$, $v_{n+2} = \frac{(v_{n+1})^p}{(v_n)^{p-1}}$

a) Justifier la définition de (v_n) en montrant que $\forall$ n $\in \mathbb{N}, v_n > 0$.

b) Montrer que $\forall$ n $\in \mathbb{N}, \ln(v_n) = u_n$.

c) En déduire l'expression de v_n en fonction de p, n et a.

d) Déterminer, suivant de p et a, la limite de v_n lorsque n tend vers $+\infty$.

Corrigé

1. $w_{n+1} = u_{n+2} - u_{n+1} = pu_{n+1} - (p-1)u_n - u_{n+1}$

$$= (p-1)(u_{n+1} - u_n)$$

$$= (p-1)w_n$$

donc (w_n) est une suite géométrique de raison (p -1), d'où $w_n = w_0(p-1)^n$ avec

$w_0 = u_1 - u_0 = a$ et en résulte que $w_n = a(p-1)^n$

2. $t_{n+1} = u_{n+2} - (p-1)u_{n+1} = pu_{n+1} - (p-1)u_n - (p-1)u_{n+1}$

$= u_{n+1} - (p-1)u_n = t_n$ d'où (t_n) est constante $t_n = t_0 = u_1 - (p-1)u_0 = a$

3. On a $w_n = u_{n+1} - u_n$ et $t_n = u_{n+1} - (p-1)u_n$ d'où $w_n - t_n$

$= (p-1)u_n - u_n = (p-2)u_n$ et par la suite

$$u_n = \frac{w_n - t_n}{p-2} = \frac{a(p-1)^n - a}{p-2} = \frac{a((p-1)^n - 1)}{p-2}$$

4. a) On a $v_0 = 1 > 0$ et $v_1 = e^a > 0$

Supposant le résultat est vrai jusqu'à l'ordre n + 1 ; c'est-à-dire $v_k > 0$ pour tout

$k \leq n+1$ et montrons que $v_{n+2} > 0$.

On a $v_{n+2} = \frac{(v_{n+1})^p}{(v_n)^{p-1}} > 0$ puisque $v_{n+1} > 0$ *et* $v_n > 0$ ainsi $(v_{n+1})^p$ et $(v_n)^{p-1} > 0$

d'où (v_n) est bien définie et pour tout n , $v_n > 0$

b) On a $\ln(v_0) = \ln(1) = 0 = u_0$ et $\ln(v_1) = \ln(e^a) = a = u_1$

supposons que le résultat est vrai jusqu'à l'ordre n + 1 ; c'est-à-dire

$\ln(v_{n+1}) = u_{n+1}$ et montrons que $\ln(v_{n+2}) = u_{n+2}$

$\ln(v_{n+2}) = \ln(\frac{(v_{n+1})^p}{(v_n)^{p-1}}) = p\ln(v_{n+1}) - (p-1)\ln(v_n) = pu_{n+1} - (p-1)u_n = u_{n+2}$

d'où le résultat. Donc pour tout n de IN $\ln(v_n) = u_n$

c) puisque $\ln(v_n) = u_n$ alors $v_n = e^{u_n} = e^{\frac{a((p-1)^n-1)}{p-2}}$

d)

- Si $a = 0$ $v_n = 1$ pour tout n de IN ainsi $\lim_{n\to\infty}(v_n) = 1$
- Si $p \in]0\,;1[\cup]1\,;2[$ on a $|p-1| < 1$ d'où $\lim_{n\to\infty}(p-1)^n = 0$ ainsi $\lim_{n\to\infty}(v_n) = e^{\frac{a}{2-p}}$
- Si $p > 2$ et $a > 0$, on a $p - 1 > 1$, d'où $\lim_{n\to\infty}(p-1)^n = +\infty$ ainsi $\lim_{n\to\infty}(v_n) = +\infty$
- Si $p > 2$ et $a < 0$ $\lim_{n\to\infty}(v_n) = 0$

Exercice n°2 :

Enoncé

n est un entier strictement supérieur à 1.

Soit f_n la fonction définie sur $]0\,;+\infty[$ par : $f_n(x) = x^n\ln(x)$.

1. Etudier les variations de f_n.
2. Donner l'allure générale des courbes représentatives C_n des fonctions f_n. On précisera en particulier, leurs positions relatives.
3. Démontrer que l'équation $f_n(x) = 1$ admet une solution unique x_n et que $1 < x_n$.
4. Démontrer que la suite de terme général x_n , $n \geq 2$ est décroissante.
5. On pose $t_n = (x_n)^n$. Montrer que $t_n\ln(t_n) = n$.
6. Montrer que pour tout, $x > 0$, $x - 1 \leq x\ln(x)$, puis que $1 \leq t_n \leq n + 1$.
7. En déduire un encadrement de x_n.
8. Démontrer que la suite (x_n) admet une limite que l'on précisera.

Corrigé

1. On a pour tout $n \geq 1$, f_n est définie, continue et dérivable sur $]0\,;+\infty[$

$$f'_n(x) = nx^{n-1}\ln(x) + \frac{x^n}{x} = nx^{n-1}\ln(x) + x^{n-1} = x^{n-1}(n\ln(x) + 1)$$

$f'_n(x) = 0$ signifie $x^{n-1}(n\ln(x) + 1) = 0$

signifie $x^{n-1} = 0$ ou $n\ln(x) + 1 = 0$

signifie $x = 0$ ou $x\ e^{-\frac{1}{n}} = \ > 0$ d'où $x = e^{-\frac{1}{n}}$

On a $\lim_{x\to 0^+} f_n(x) = \lim_{x\to\infty} x^n \ln(x) = 0$, f_n est continue à droite de 0.

On a $\lim_{x\to+\infty} f_n(x) = \lim_{x\to+\infty} x^n \ln(x) = +\infty$

Tableau de variations

x	0		$e^{-\frac{1}{n}}$		$+\infty$
$f'_n(x)$		$-$	0	$+$	
$f_n(x)$	0	↘	$-\frac{1}{ne}$	↗	$+\infty$

On a $f_n(e^{-\frac{1}{n}}) = e^{-1}\ln(e^{-\frac{1}{n}}) = -\frac{1}{ne}$

2. On a $\lim_{x\to+\infty} f_n(x) = \lim_{x\to+\infty} x^n \ln(x) = +\infty$ et $\lim_{x\to+\infty} \frac{f_n(x)}{x}$

$$= \lim_{x\to+\infty} x^{n-1}\ln(x) = +\infty$$

donc C_n admet une branche parabolique de direction (OJ).

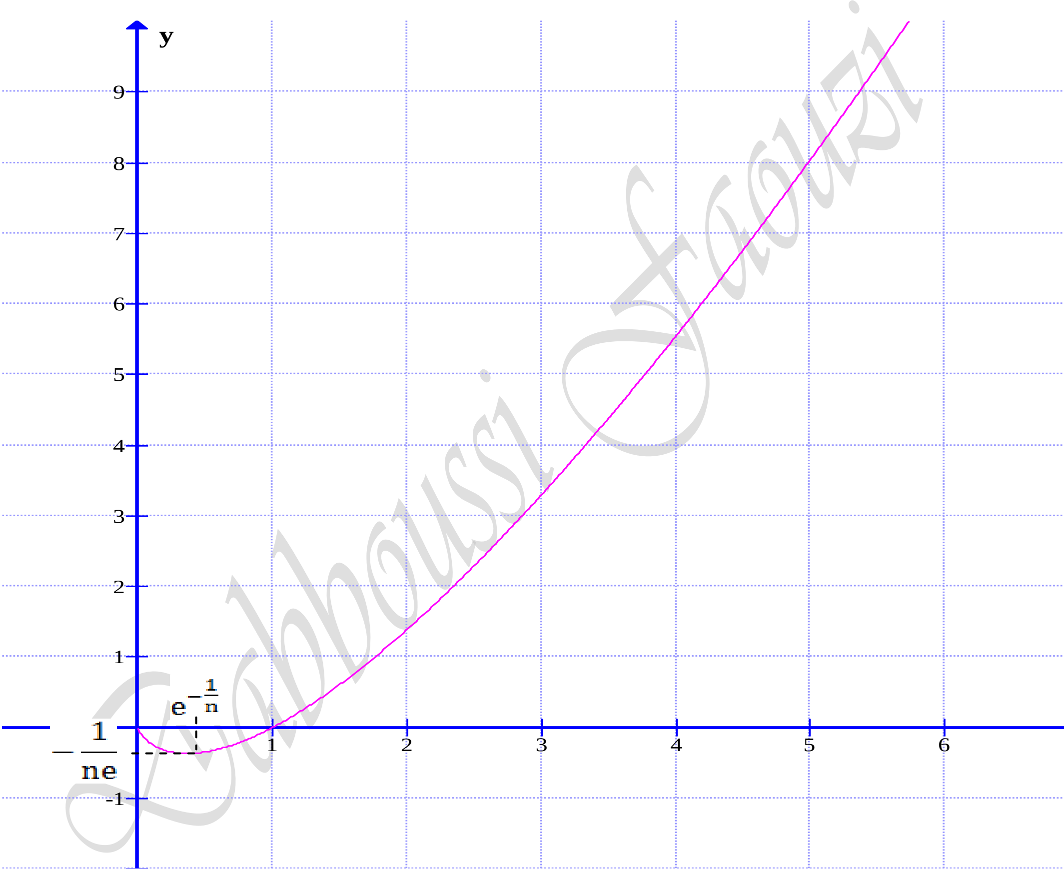
Pour $x \in]0\,;1]$ on a $x^{n+1}\ln(x) \leq x^n\ln(x)$ c'est-à-dire $f_{n+1}(x) \leq f_n(x)$ d'où

C_{n+1} est au dessous de C_n

Pour $x \in [1\,;+\infty[$ on a a $x^{n+1}\ln(x) \geq x^n\ln(x)$ c'est-à-dire $f_{n+1}(x) \geq f_n(x)$

d'où C_{n+1} est au dessus de C_n

On a $f_n(x) = 0$ signifie que $x = 0$ ou $x = 1$.



3. On a f_n est strictement croissante sur $[1\,;+\infty[$ et comme $f_n(1) = 0$

et $\lim_{x\to+\infty} f_n(x) = +\infty$ alors il existe un unique réel $x \in]1;+\infty[$ tel que $f_n(x) = 1$.

4. On a f_{n+1} est strictement croissante sur $[1\,;+\infty[$

$f_{n+1}(x_{n+1}) - f_{n+1}(x_n) = 1 - {x_n}^{n+1}\ln(x_n) = 1 - x_n(x_n \ln(x_n)) = 1 - x_n < 0$

d'où $x_{n+1} < x_n$ et par suite la suite (x_n) , n > 2 est strictement décroissante.

5. $t_n\ln(t_n) = (x_n)^n\ln(x_n)^n = n(x_n)^n\ln(x_n) = nf_n(x_n) = n$ car $f_n(x_n) = 1$

6. pour x > 0, on pose g la fonction définie par g(x) = xln(x) – x + 1

g est bien définie, continue et dérivable sur]0 ; + ∞[et tel que g'(x) = ln(x) qui s'annule en 1

On a $\lim_{x\to 0^+} g(x) = 1$ et $\lim_{x\to +\infty} g(x) = +\infty$ et g(1) = 0, donc g est positive sur]0 ; + ∞[c'est-à-dire pour tout x > 0, xln(x) – x + 1 > 0 ou x – 1 < xln(x).

On a pour x > 0, $(x_n) > 1$ cela entraine que $(x_n)^n > 1$ d'où $t_n > 1$ ça d'une part

D'autre part $t_n - 1 \leq t_n\ln(t_n)$ c'est-à-dire $t_n - 1 \leq n$ ou $t_n \leq n + 1$. En résulte que $1 \leq t_n \leq n + 1$.

7. on a $1 \leq t_n \leq n + 1$ signifie $1 \leq (x_n)^n \leq n + 1$

signifie $\ln(1) \leq \ln(x_n)^n \leq \ln(n + 1)$

(car la fonction ln est strictement croissante sur [1 ; + ∞[)

signifie $0 \leq n\ln(x_n) \leq \ln(n + 1)$

signifie $0 \leq \ln(x_n) \leq \frac{\ln(n+1)}{n}$

signifie $1 \leq x_n \leq e^{\frac{\ln(n+1)}{n}}$ $(1 = e^0)$

(car la fonction exponentielle est strictement croissante sur [0 ; + ∞[ )

8. On a la suite (x_n) est décroissante et minorée par 1 donc elle est convergente

et comme $\lim_{n\to+\infty} \frac{\ln(n+1)}{n} = 0$, alors $\lim_{n\to+\infty} e^{\frac{\ln(n+1)}{n}} = 1$ cela entraine que

$\lim_{n\to+\infty} x_n = 1$.