Université Saâd Dahlab de BLIDA

Faculté des Sciences, Département de mathématiques

MI, $1^{ère}$ année, algèbre 1.

Série d'exercices n° 2

Exo 20 : Soit E un ensemble fini, $|E| = n$.

Combien y a t- il de lois de composition internes distinctes sur E ?

Exo 21: Vérifier que ($\mathbb{N}$, +) n'est pas un groupe et que ($\mathbb{Z}$, +) est un groupe.

Si E est un ensemble, montrer que ($\wp(E)$, Δ) est un groupe abélien.

Vérifier que si (G, .) et (F, .) sont deux groupes, le produit cartésien G x F peut être muni d'une structure de groupe en définissant : $\forall$ ((x, y), (u, v))) $\in$ (G x F $)^2$,

$$(x, y) \otimes (u, v) = (x . u, y .v).$$

Soit E un ensemble, vérifier que $\sigma(E) = \{ f, f: E \to E \text{ une bijection} \}$ muni de la loi composition des applications est un groupe. Si E est fini, $|E| = n$,

$\sigma(E)$ est noté $\mathfrak{S}_n$ et il est appelé " groupe symétrique de $\mathbb{N}_n = \{ 1, \ldots, n \}$ "

Exo 22 : Montrer que l'ensemble E = { e, a, b, c }, muni de la loi " $*$ " donnée par le tableau de Pythagore ci dessous, est un groupe abélien appelé " groupe de Klein ".

*	E	A	B	C
E	E	A	B	C
A	A	E	C	B
b	B	C	E	A
c	C	B	A	E

Déterminer tous les sous groupes de E. On appelle " centre du groupe", l'ensemble Z(E) = { x $\in$ E, x est central à E }. Déterminer Z(E).

Exo 23 : Soient les applications de $\mathbb{R} \setminus \{ 0, 1 \}$ dans lui même définies par :

$f_1(x) = x$; $f_2(x) = \dfrac{1}{1-x}$; $f_3(x) = \dfrac{1}{x}$; $f_4(x) = 1 - \dfrac{1}{x}$; $f_5(x) = 1 - x$ et $f_6(x) = \dfrac{x}{x-1}$;

et $E = \{ f_1 , f_2, f_3, f_4, f_5, f_6 \}$.

Montrer que (E, o) est un groupe non abélien et donner sa table de Pythagore.

Exo 24: Dresser la table de Pythagore du groupe $\mathcal{S}_3$ l'ensemble des permutations (applications bijectives) de $\mathbb{N}_3 = \{ 1, 2, 3 \}$ dans $\mathbb{N}_3$. On note τ_i la permutation qui invarie " i" et qui échange les deux autres éléments (i = 1, 2, 3), "e" la permutation identique, $\sigma_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$ et $\sigma_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$. Déterminer les sous groupes et le centre de ce groupe.

Exo 25 : (G, $*$) est un groupe tel que pour tout x dans G, $x^2 = x * x = e$, e étant l'élément neutre de G. Montrer que (G, $*$) est un groupe Abélien.

Exo 26 : Soit G un ensemble muni d'une loi interne $*$, associative, admettant un élément neutre à gauche et où tout élément de G admette un symétrique à gauche(*appelées Axiomes faibles d'un groupe*). Montrer que (G, $*$) est un groupe. (**Indication :** montrer que l'élément symétrique à gauche est aussi un symétrique à droite et que l'élément neutre à gauche est l'élément neutre à droite et donc le symétrique et le neutre sont uniques) .

Exo 27 : (G, $\bullet$) un groupe multiplicatif.

Montrer que si $(a \bullet b)^n = e$ alors $(b \bullet a)^n = e$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

Exo 28 : Montrer que l'ensemble $\mathbb{Z}[\sqrt{3}] = \{ a + \sqrt{3}\, b, (a, b) \in \mathbb{Z}^2 \}$ muni de l'addition est un groupe commutatif.

Exo 29 : Soit (G, $*$) un groupe, H un sous-groupe de G.

$\complement_G H$ le complémentaire de H dans G, est-il un sous-groupe de G ?

de même, $\complement_G H \cup \{e\}$ est-il un sous-groupe de G?

Etudier les cas où H est un sous groupe trivial ou un sous groupe propre.

Exo 30 : Soit (G, $*$) un groupe, H_1 et H_2 deux sous-groupes de G.

Montrer que $H_1 \cap H_2$ est un sous groupe de G.

A quelle condition $H_1 \cup H_2$ est un sous-groupe de G ?

Montrer que le centre d'un groupe est un sous groupe abélien.

Exo 31 : Soit (G, $*$) un groupe multiplicatif et H un sous-groupe de G.

Montrer que la relation définie par :

$\forall$ (x, y) $\in$ (G)^2 , x $\Re$ y $\Leftrightarrow$ " $x * y^{-1} \in H$ " est une relation d'équivalence.

Caractériser la classe d'équivalence d'un élément x de G.

Que devienne la relation si le groupe est additif ?

Exo 32 : Caractériser les sous groupes H du groupe ($\mathbb{Z}$, +) (indication: H = n$\mathbb{Z}$).

Exo 33 : Montrer que tout sous groupe d'un groupe abélien est abélien mais un groupe non commutatif peut avoir un sous groupe commutatif propre.

Exo 34 : On munit $\mathbb{R}$ de la loi $*$ définie par : $(x, y) \mapsto x * y = \sqrt[3]{x^3 + y^3}$

Montrer que ($\mathbb{R}$, $*$) est un groupe et qu'il est isomorphe à ($\mathbb{R}$,+).

Exo 35 : Montrer que log : ($\mathbb{R}^*_+$, $\bullet$) $\to$ ($\mathbb{R}$,+) est un isomorphisme de groupes.

L'isomorphisme réciproque s'appelle l'exponentielle et se note exp.

Exo 36 : Soit (G, $\bullet$) un groupe, a $\in$ G, a fixée.

Montrer que $\varphi_a : \begin{array}{c} (Z,+) \to (G,\bullet) \\ n \mapsto a^n \end{array}$ est un isomorphisme de groupes

De même pour $\psi_a : \begin{array}{c} (G,\bullet) \to (G,\bullet) \\ x \mapsto a \bullet x \bullet a^{-1} \end{array}$ appelé "automorphisme intérieur".

Si G est commutatif, que devient ψ_a ?

Exo 37 : Soit f : (G, *) $\to$ (H, #) un morphisme de groupes. Montrer alors :

a) $f(e_G) = e_H$ et que $\forall$ x $\in$ G, $f(x^{-1}) = (f(x))^{-1}$

b) l'image par f d'un sous groupe de G est un sous groupe de H, en particulier Imf = f(G) est un sous groupe de H.

c) l'image réciproque par f d'un sous groupe de H est un sous groupe de G, en particulier Kerf = f^{1} ({e_H}) est un sous groupe de G

d) f est un morphisme injective si et seulement si Ker f = { e_G }.