

# Électromagnétisme - TD n° 6

## Induction électromagnétique

# Solutions

### Exercice I : Calculs de forces électromotrices induites

#### A. Flux du vecteur champ magnétique

- L'analyse des symétries et des invariances, puis l'application du théorème d'Ampère sur un cercle centré sur le fil, perpendiculaire à celui-ci, et de rayon  $r$  permet de montrer que, pour  $r > 0$  :

$$\vec{B}_1(M) = \frac{\mu_0 i_1}{2\pi r} \vec{u}_\theta$$

- Les lignes de champ magnétique sont des cercles concentriques centrés sur le fil, perpendiculaire à celui-ci, et s'enroulant autour du fil dans le sens trigonométrique.
- Le flux du champ magnétique créé par le fil à travers le cadre rectangulaire orienté dans le sens ABCD vaut :

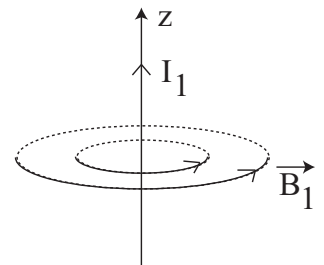


FIGURE 1 –

$$\Phi_1 = \iint_{ABCD} \vec{B}_1 \cdot d\vec{S} = \iint_{ABCD} B_1 \vec{u}_\theta \cdot dz dr \vec{u}_\theta = \frac{\mu_0 i_1 L}{2\pi} \int_d^{d+\ell} \frac{dr}{r} \Rightarrow \Phi_1 = \frac{\mu_0 i_1 L}{2\pi} \ln\left(\frac{d+\ell}{d}\right)$$

Le flux est donc positif avec cette orientation du circuit.

#### B. Force électromotrice et courants induits

- La f.e.m. est nulle car  $\Phi_1 = cste$  et donc  $e = -\frac{d\Phi_1}{dt} = 0$ .
- Ce deuxième cas correspond au cas de Neumann.
  - Le courant  $i_2$  tourne dans le sens trigonométrique dans le circuit (sens DCBA (Fig.2a)).

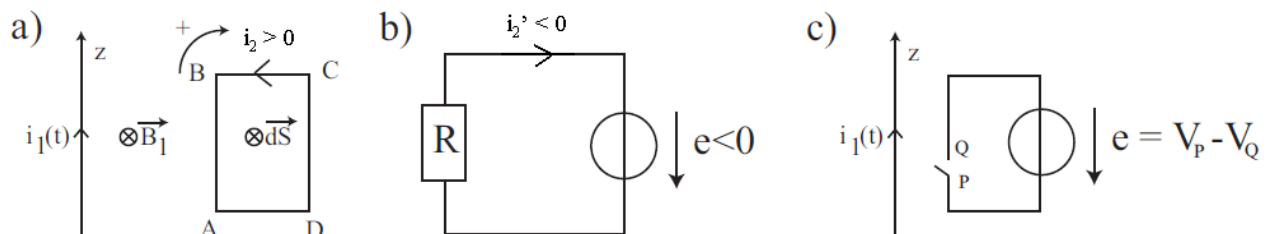


FIGURE 2 –

- L'orientation du courant se prouve avec loi de Lenz qui permet d'affirmer que le champ magnétique induit doit s'opposer à la cause qui lui a donné naissance, c'est à dire à  $\vec{B}_1$ . Le sens s'obtient en utilisant la règle de la main droite pour que le champ induit par la circulation dans le circuit soit orienté suivant  $-\vec{u}_\theta$ .

(c) Calculons tout d'abord la f.e.m. induite dans le circuit en utilisant la loi de Faraday :

$$e = -\frac{d\Phi_1}{dt} = -\frac{\mu_0 a L}{2\pi} \ln\left(\frac{d+\ell}{d}\right)$$

Cette f.e.m. doit être orientée dans même sens que pour le calcul du flux (sens ABCD). On trouve alors une f.e.m. négative, ce qui est normal car le courant induit circulant dans ce sens vaut  $i'_2 = -i_2 < 0$ .

Le schéma électrique équivalent est donné en Fig.2b et l'application de la loi d'Ohm dans le circuit équivalent constitué du générateur idéal de tension et d'une résistance  $R$  nous donne :  $e = Ri'_2 = -Ri_2$ , et on obtient finalement :

$$i_2 = \frac{\mu_0 a L}{2\pi R} \ln\left(\frac{d+\ell}{d}\right)$$

Le courant  $i_2$  est bien positif.

(d) Lorsque l'interrupteur est ouvert, aucun courant ne circule dans le circuit ; cependant, la présence du champ magnétique variable donne toujours lieu à un champ électromoteur identique dont la circulation n'a pas changé par rapport au cas précédent puisqu'on néglige la taille de l'interrupteur.

Il existe donc une différence de potentiel entre les points  $P$  et  $Q$  identique à la f.e.m. calculée précédemment. En utilisant l'orientation précédemment choisie pour la f.e.m. (Fig.2c), on obtient directement :

$$V_P - V_Q = e = -\frac{\mu_0 a L}{2\pi} \ln\left(\frac{d+\ell}{d}\right) < 0$$

3. (a) De la même façon que précédemment, on obtient avec  $i_2$  orienté dans le sens trigonométrique :

$$i_2 = \frac{\mu_0 I_m L \omega_1 \cos(\omega_1 t)}{2\pi R} \ln\left(\frac{d+\ell}{d}\right)$$

(b) Les courbes  $i_1(t)$  et  $i_2(t)$  sont en quadrature de phase, avec  $i_2$  d'amplitude nécessairement plus faible que  $i_1$  :

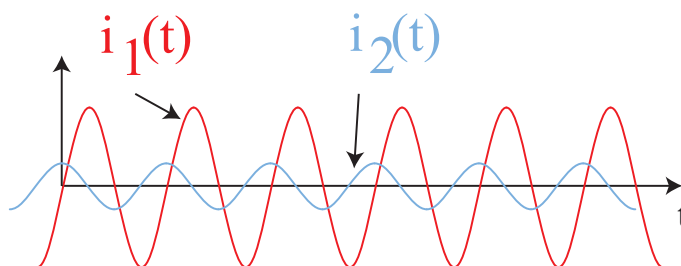


FIGURE 3 –

4. Ce dernier cas correspond au cas de Lorentz.

(a) Le champ électromoteur de Lorentz est nul dans ce cas, car le déplacement du circuit se fait selon la direction du champ, donc  $\vec{E}_m = \vec{v}_{circuit} \wedge \vec{B}_1 = \vec{0}$ .

On peut également s'en convaincre en se plaçant dans le référentiel du cadre mobile : le champ  $\vec{B}_1$  étant invariant par rotation d'angle  $\theta$  autour de l'axe  $z$ , le champ perçu par le circuit est invariant.

(b) Calculons la f.e.m. induite dans le circuit de deux façons différentes.

*Première méthode* : en utilisant la circulation du champ électromoteur sur le circuit orienté dans le sens horaire ABCD :

$$e = \oint_{\text{circuit}} \vec{E}_m \cdot d\vec{\ell} = \oint_{\text{circuit}} (v \vec{u}_r \wedge B_1 \vec{u}_\theta) \cdot d\vec{\ell} = \oint_{\text{circuit}} v B_1 \vec{u}_z \cdot d\vec{\ell} = \left[ \int_A^B v B_1 d\ell + \int_C^D v B_1 d\ell \right]$$

$$e = vL [B_1(d_0 + vt) - B_1(d_0 + \ell + vt)] = \frac{\mu_0 i_1 v L}{2\pi} \left[ \frac{1}{d_0 + vt} - \frac{1}{d_0 + \ell + vt} \right]$$

$$e = \frac{\mu_0 i_1 v L}{2\pi} \frac{\ell}{(d_0 + vt)(d_0 + \ell + vt)}$$

On trouve que la f.e.m. est positive lorsqu'elle est orientée dans le sens de ABCD, et le courant induit est également dirigé dans le sens horaire, contrairement aux cas étudiés précédemment.

*Seconde méthode* : en utilisant la loi de Faraday, le circuit étant toujours orienté dans le sens horaire ABCD :

$$e = -\frac{d\Phi_1}{dt} = -\frac{\mu_0 i_1 L}{2\pi} \frac{d}{dt} \left[ \int_{d_0+vt}^{d_0+\ell+vt} \frac{dr}{r} \right] \Rightarrow e = \frac{\mu_0 i_1 v L}{2\pi} \frac{\ell}{(d_0 + vt)(d_0 + \ell + vt)}$$

On retrouve bien le même résultat que précédemment.

## Exercice II : Lévitacion d'un aimant au-dessus d'une plaque métallique

1. La spire crée un champ magnétique  $\vec{B}$  non uniforme dont la norme diminue avec la distance à la spire.

Lorsqu'elle commence à tomber sous l'action de la pesanteur, la spire se rapproche de la plaque et le flux du champ magnétique dans la plaque varie.

La plaque est donc le siège d'un phénomène d'induction de Neumann et des courants induits, appelés courants de Foucault, apparaissent dans la plaque.

Ces courants de Foucault créent un champ magnétique  $\vec{B}'$  qui s'oppose à la variation du champ magnétique créé par la spire. La spire, plongée dans le champ  $\vec{B}'$  est soumise aux effets de Laplace. D'après la loi de Lenz, ces forces de Laplace s'opposent à la chute de la spire.

Cependant, dès que la spire s'arrête, il n'y a plus de phénomène d'induction et les courants induits dans la plaque sont dissipés par effet Joule. Le poids de la spire n'est alors plus compensée par les forces de Laplace et la spire chute.

**Il n'existe pas de position d'équilibre stable.**

2. (a) Supposons que la spire soit en équilibre. Le courant variable qui la traverse crée un champ magnétique variable. La plaque métallique est donc le siège d'un phénomène d'induction de Neumann même lorsque la spire est immobile.

Les courants de Foucault induits dans la plaque génèrent un champ magnétique qui s'oppose, grâce aux forces de Laplace, à la chute de la spire.

(b) Les forces de Laplace subies par la spire sont de la forme

$$\vec{F}_L = I(t) \int_{\text{spire}} d\vec{\ell} \wedge \vec{B}'$$

où  $I(t)$  est le courant qui traverse la spire et  $\vec{B}'$  est le champ induit par les courants de Foucault dans la plaque.

Or  $\vec{B}'$  est lui-même sinusoïdal de la forme  $\vec{B}' = \vec{B}'_0 \cos(\omega t - \varphi)$ . On en déduit

$$F_L \propto I(t)B' \propto \cos(\omega t) \cos(\omega t - \varphi) \quad \text{soit} \quad F_L = \frac{1}{2} \cos(\varphi) + \frac{1}{2} \cos(2\omega t - \varphi)$$

Le premier terme est un terme constant qui compense le poids tandis que le deuxième terme correspond à une oscillation à la pulsation  $2\omega$ .

Le principe fondamental de la dynamique appliqué à la spire s'écrit, en projection sur l'axe vertical  $\vec{u}_z$

$$m\ddot{z} = -mg + F_L \propto \cos(2\omega t - \varphi)$$

où  $z$  est l'altitude de la spire.

La position de la spire varie donc comme

$$z(t) \propto -\frac{1}{2\omega} \cos(2\omega t - \varphi)$$

L'amplitude des oscillations de la spire est d'autant plus faible que la fréquence est élevée. Les fréquences utilisées ici sont telles que  $2f > 100$  Hz qui sont des fréquences bien supérieures aux fréquences propres des systèmes mécaniques (de l'ordre de 10 Hz).

**Les oscillations à la pulsation  $2\omega$  sont atténuées d'autant plus fortement que  $\omega$  est grand.**

(c) Les courants de Foucault induits dans la plaque ont une densité volumique de la forme

$$\vec{j} = \gamma \vec{E}_m = -\gamma \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}$$

où  $\vec{A}$  est le potentiel vecteur associé au champ  $\vec{B}$  créé par la spire.

Si le courant  $I$  traversant la spire est sinusoïdal,  $\vec{B}$  et  $\vec{A}$  sont aussi sinusoïdaux et

$$\vec{A} = \vec{A}_0 \cos(\omega t - \varphi)$$

La densité volumique de courant est donc de la forme

$$\vec{j} = \gamma\omega \vec{j}_0 \sin(\omega t - \varphi)$$

**La densité volumique des courants de Foucault est proportionnelle à  $\omega$ .**

Le champ magnétique induits par les courants de Foucault est donc proportionnel à  $\omega$ . Par conséquent, les forces de Laplace exercés sur la spire sont aussi proportionnelles à  $\omega$ .

Lorsque la pulsation  $\omega$  augmente, le poids de la spire ne peut être compensé que dans des régions plus éloignées de la plaque, là où le champ magnétique induit est plus faible.

**La position d'équilibre est d'autant plus haute que la pulsation  $\omega$  est élevée.**

3. Le champ magnétique total dans le supraconducteur est nul. L'équation de Maxwell-Ampère

$$\text{rot}(\vec{B}) = \mu_0 \vec{j}$$

montre que  $\vec{j} = 0$  à l'intérieur du supraconducteur.

Cependant, afin de créer un champ magnétique  $\vec{B}'$  qui s'oppose au champ extérieur, il faut que le supraconducteur soit le siège de courants, qui ne peuvent être que surfaciques.

Un aimant en mouvement au-dessus d'un supraconducteur induit, à la surface de ce dernier des courants de Foucault. Toutefois, le matériau semi-conducteur est caractérisé par une résistance nulle : il n'y a donc pas de dissipation d'énergie par effet Joule. Les courants surfaciques du supraconducteur créent un champ magnétique qui s'oppose à la chute de l'aimant.

Ces courants perdurent même lorsque l'aimant est immobile et permettent la lévitation de ce dernier.

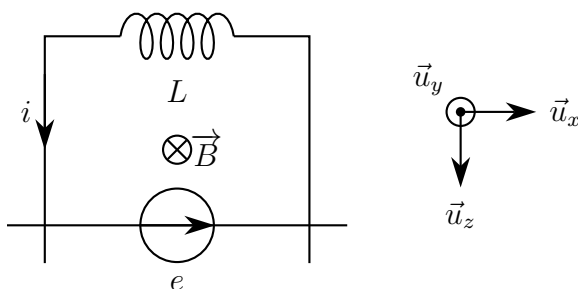
### Exercice III : Induction et conversion d'énergie

1. La tige étant en mouvement dans un champ magnétique stationnaire, elle est soumise à un phénomène d'induction de Lorentz. Il apparaît donc dans la tige une force électromotrice  $e$  telle que

$$e = \int_{\text{tige}} \vec{E}_m \cdot d\vec{\ell} \quad \text{avec} \quad \vec{E}_m = \vec{v}_e \wedge \vec{B} = v \vec{u}_z \wedge (-B \vec{u}_y) = Bv \vec{u}_x$$

et où  $e$  est orienté dans le sens de  $d\vec{\ell}$ . En orientant le circuit dans le sens trigonométrique, on a

$$e = \int_0^a v B dx = vBa$$



La loi des mailles fournit alors

$$L \frac{di}{dt} + Ri = e$$

où  $i$  est orienté dans le sens de  $e$ . En remplaçant  $e$  par son expression, on obtient l'équation électrique :

$$\boxed{L \frac{di}{dt} + Ri - vBa = 0} \quad (1)$$

Remarque : Le flux du champ magnétique à travers le circuit est la somme du flux magnétique extérieur  $\phi_e = -Ba(z + \text{cste})$  et du flux propre  $\phi_p = Li$ . La loi de Faraday s'écrit

$$e_{\text{tot}} = -\frac{d\phi}{dt} = -\frac{d\phi_e}{dt} - \frac{d\phi_p}{dt} = Bav - \frac{d(Li)}{dt}$$

Par ailleurs, la loi des mailles s'écrit

$$e_{\text{tot}} = Ri$$

et l'on retrouve l'équation différentielle précédente. Toutefois, le circuit étant déformable, le coefficient d'inductance propre  $L$  dépend aussi du temps, effet que l'on néglige ici.

2. Dans le référentiel terrestre supposé galiléen, la tige est soumise :

★ à son poids  $m\vec{g}$  ;

★ à la force de Laplace  $\vec{F} = \int_{\text{tige}} i d\vec{\ell} \wedge \vec{B}$ . Avec  $d\vec{\ell} = dx \vec{u}_x$  et  $\vec{B} = -B \vec{u}_y$ , on obtient

$$\vec{F} = \int_0^a i dx \vec{u}_x \wedge (-B \vec{u}_y) = -iaB \vec{u}_z$$

Le principe fondamental de la dynamique appliqué à la tige dans le référentiel terrestre du laboratoire s'écrit, en projection sur  $vu_z$  :

$$\boxed{m\ddot{z} = m\dot{v} = mg - iBa} \quad (2)$$

Remarque : On vérifie la loi de Lenz. Si  $v > 0$ , l'équation électrique montre que  $i > 0$  ce qui implique  $F = -iBa < 0$  : la force de Laplace s'oppose à la chute de la tige.

3. Dans l'équation électrique, tous les termes ont la dimension d'une tension. En multipliant l'équation (1) par  $i$ , on obtient un bilan de puissance électrique :

$$Li \frac{di}{dt} + Ri^2 - v i Ba = 0$$

soit

$$\boxed{\frac{d}{dt} \left( \frac{1}{2} Li^2 \right) + Ri^2 = ei = v i aB} \quad (3)$$

La puissance  $\mathcal{P}_{el} = ei$  fournie par la force électromotrice est en partie stockée dans la bobine ( $\mathcal{E}_m = 1/2 Li^2$ ) et en partie stockée par effet Joule ( $\mathcal{P}_R = Ri^2$ ).

Dans l'équation mécanique, tous les termes ont la dimension d'une force. En multipliant l'équation (2) par  $v$ , on obtient un bilan de puissance mécanique :

$$m\ddot{z} v = mgv - iBav$$

soit

$$\boxed{\frac{d}{dt} \left( \frac{1}{2} mv^2 - mgz \right) = Fv = -v i aB} \quad (4)$$

La puissance  $\mathcal{P}_L$  des efforts de Laplace est utilisée pour faire varier l'énergie cinétique  $\mathcal{E}_c = 1/2mv^2$  et l'énergie potentielle de pesanteur  $\mathcal{E}_m = -mgz$ .

En sommant les équations (3) et (4), on obtient

$$\boxed{\frac{d}{dt} \left( \frac{1}{2} mv^2 - mgz + \frac{1}{2} Li^2 \right) = -Ri^2} \quad (5)$$

Cette équation indique que l'énergie totale  $\mathcal{E}$  du circuit (magnétique et mécanique) est dissipée par effet Joule :

$$\frac{d\mathcal{E}}{dt} = -Ri^2 \quad \text{avec} \quad \mathcal{E} = \mathcal{E}_m + \mathcal{E}_c + \mathcal{E}_p \quad \text{et} \quad \begin{cases} \mathcal{E}_m = \frac{1}{2} Li^2 \\ \mathcal{E}_c = \frac{1}{2} mv^2 \\ \mathcal{E}_p = -mgz \end{cases}$$

Remarque : Le bilan énergétique ne fait intervenir ni le travail des efforts de Laplace, ni l'énergie électrique fournie par la f.e.m. : ces deux puissances se compensent car la conversion électromécanique possède un rendement de 100%.

4. L'équation électrique (1) fournit

$$v = \frac{1}{aB} \left( L \frac{di}{dt} + Ri \right)$$

En reportant cette expression dans l'équation mécanique (2), on obtient

$$\frac{m}{aB} \left( L \frac{d^2i}{dt^2} + R \frac{di}{dt} \right) = mg - iaB$$

soit

$$\boxed{\frac{d^2i}{dt^2} + \frac{R}{L} \frac{di}{dt} + \frac{(aB)^2}{mL} i = \frac{gBa}{L}} \quad (6)$$

5. L'équation (6) se ré-écrit

$$\frac{d^2 i}{dt^2} + \frac{R}{L} \frac{di}{dt} + \frac{(aB)^2}{mL} \left( i - \frac{mg}{aB} \right) = 0$$

Posons

$$i_0 = \frac{mg}{aB} \quad \text{et} \quad I = i - i_0$$

L'équation (6) devient

$$\frac{d^2 I}{dt^2} + \frac{R}{L} \frac{dI}{dt} + \omega_0^2 I = 0 \quad \text{avec} \quad \omega_0^2 = \frac{(aB)^2}{mL}$$

L'équation caractéristique

$$r^2 + \frac{r}{L} + \omega_0^2 = 0$$

a pour discriminant

$$\Delta = \frac{R^2}{L^2} - 4\omega_0^2$$

Si la résistance est très grande, c'est-à-dire si  $R \gg 2L\omega_0$ , alors le coefficient d'amortissement est très grand et les solutions sont exponentiellement amorties. On en déduit

$$I(t) \xrightarrow{t \rightarrow \infty} 0 \quad \text{soit} \quad \boxed{i(t) \xrightarrow{t \rightarrow \infty} i_0 = \frac{mg}{aB}}$$

La vitesse atteint donc également une valeur limite constante

$$v_0 = \frac{1}{aB} \left( L \frac{di_0}{dt} + Ri_0 \right) \quad \text{soit} \quad \boxed{v_0 = \frac{mgR}{(aB)^2}}$$

6. Si  $R$  est négligeable, c'est-à-dire si  $R \ll 2L\omega_0$ , la solution de l'équation différentielle pour  $I(t)$  est quasiment sinusoïdale à la pulsation  $\omega_0$  (il existe un amortissement sur une durée caractéristique  $\tau = L/R \gg \omega_0$ ) :

$$I(t) = A \cos(\omega_0 t + \varphi) \quad \text{soit} \quad \boxed{i(t) = i_0 + A \cos(\omega_0 t + \varphi)}$$

où  $A$  et  $\varphi$  sont des constantes à déterminer en fonction des conditions initiales.

À  $t = 0$ ,  $v = 0$  et  $i = 0$ . On en déduit  $L \frac{di}{dt}(t = 0) = -Ri(t = 0) + aBv(t = 0) = 0$ . On a donc

$$\begin{cases} i(t = 0) = 0 = i_0 + A \cos(\varphi) \\ \frac{di}{dt}(t = 0) = 0 = -A\omega_0 \sin(\varphi) \end{cases} \implies \begin{cases} \varphi = 0 \\ A = -i_0 \end{cases}$$

On obtient donc

$$\boxed{i(t) = i_0 [1 - \cos(\omega_0 t)]} \quad \text{avec} \quad \boxed{\begin{cases} i_0 = \frac{mg}{aB} \\ \omega_0 = \frac{aB}{\sqrt{mL}} \end{cases}}$$

L'équation mécanique (2) fournit

$$\dot{v} = g - \frac{aB}{m} i = g - g [1 - \cos(\omega_0 t)] = g \cos(\omega_0 t)$$

Par intégration, avec  $v(t = 0) = 0$ , on trouve

$$v(t) = \frac{g}{\omega_0} \sin(\omega_0 t)$$

et

$$z(t) = -\frac{g}{\omega_0^2} \cos(\omega_0 t) + rmcste$$

La tige oscille autour d'une position moyenne. Elle est parcourue par un courant moyen  $\langle i(t) \rangle = i_0$  de sorte que la force de Laplace vaille

$$\langle F \rangle = -i_0 B a = -mg$$

compense le poids.

Ce résultat était prévisible d'après l'équation (5) puisqu'en l'absence de résistance, aucun phénomène dissipatif n'intervient. L'énergie totale est donc constante et il y a une conversion entre l'énergie magnétique stockée dans la bobine et l'énergie mécanique de la tige.

## Exercice IV : Freinage magnétique par courants de Foucault

1. Le disque étant en mouvement dans un champ magnétique permanent, il est soumis au phénomène d'induction de Lorentz. Le champ électromoteur vaut alors, en un point  $P$  où règne le champ magnétique  $\vec{B}$  :

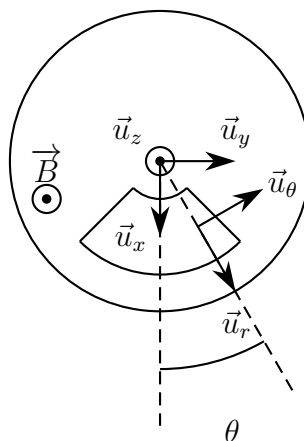
$$\vec{E}_m = \vec{v}_e \wedge \vec{B}$$

où  $\vec{v}_e$  est la vitesse d'entraînement du disque au point  $P$

$$\vec{v}_e = \overrightarrow{OP} \wedge \vec{\omega} = r \vec{u}_r \wedge (\omega \vec{u}_z) = r\omega \vec{u}_\theta$$

On en déduit

$$\vec{E}_m = r\omega \vec{u}_\theta \wedge (B \vec{u}_z) = R\omega B \vec{u}_r$$



Ce champ électromoteur induit des courants de Foucault dans le disque. Si ce disque a une conductivité  $\gamma$  et se comporte comme un conducteur ohmique dans l'ARQS, la densité volumique de courant s'écrit, dans le cas général

$$\vec{j} = \gamma \left( -\overrightarrow{\text{grad}} V - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} + \vec{v}_e \wedge \vec{B} + R_H \vec{j} \wedge \vec{B} \right)$$



avec

$$\begin{cases} -\overrightarrow{\text{grad}} V = \vec{0} & \text{pas de différence de potentiel appliquée} \\ -\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} = \vec{0} & \text{champ magnétique permanent : pas de champ électromoteur de Neumann} \\ R_H \vec{j} \wedge \vec{B} = \vec{0} & \text{effet Hall négligé} \end{cases}$$

On en déduit

$$\boxed{\vec{j} = \gamma \vec{E}_m = \gamma r \omega B \vec{u}_r}$$

La densité volumique de courant est radiale dans le référentiel lié au champ. Elle est proportionnelle à la distance à l'axe de rotation et d'autant plus intense que la vitesse de rotation et le champ magnétique sont grands.

2. Les forces de Laplace qui s'exercent sur un élément de volume  $d\tau$  du secteur  $S$  valent

$$d\vec{F}_L = \vec{j} d\tau \wedge \vec{B} \quad \text{soit} \quad \frac{d\vec{F}_L}{dd\tau} = \vec{f}_L = \vec{j} \wedge \vec{B} = (\gamma r \omega B \vec{u}_r) \wedge (B \vec{u}_z)$$

Finalement, on obtient

$$\boxed{\frac{d\vec{F}_L}{dd\tau} = \vec{f}_L = -\gamma r \omega B^2 \vec{u}_\theta}$$

La force volumique de Laplace est opposée à la vitesse d'entraînement et s'oppose au mouvement de rotation du disque.

La résultante des efforts de Laplace sur le secteur angulaire d'angle  $\alpha$  compris entre  $R_1$  et  $R_2$  vaut

$$\vec{F}_L = \iiint_{\text{secteur } S} \vec{f}_L d\tau = - \int_{r=R_1}^{R_2} \int_{\theta=-\alpha/2}^{\alpha/2} \int_{z=0}^e \gamma r \omega B^2 \vec{u}_\theta r dr d\theta dz$$

Mais  $\vec{u}_\theta$  n'est pas un vecteur fixe : il dépend de  $\theta$  et doit être intégré par rapport à  $\theta$ . On choisit des axes fixes  $(Ox)$  et  $(Oy)$  tels de  $(Ox)$  soit un axe de symétrie du secteur angulaire  $S$  et  $(\vec{u}_x, \vec{u}_y, \vec{u}_z)$  base directe.

Dans ces conditions

$$\vec{u}_\theta = -\sin(\theta) \vec{u}_x + \cos(\theta) \vec{u}_y$$

On remplace alors dans l'expression de la résultante des efforts de Laplace

$$\begin{aligned} \vec{F}_L &= -\gamma \omega B^2 \int_{r=R_1}^{R_2} r^2 dr \times \int_{\theta=-\alpha/2}^{\alpha/2} [-\sin(\theta) \vec{u}_x + \cos(\theta) \vec{u}_y] d\theta \times \int_{z=0}^e dz \\ &= -\gamma \omega B^2 \frac{R_2^3 - R_1^3}{3} [\cos(\theta) \vec{u}_x + \sin(\theta) \vec{u}_y]_{-\alpha/2}^{\alpha/2} e \end{aligned}$$

Finalement, on trouve

$$\boxed{\vec{F}_L = -\frac{2}{3} \gamma \omega B^2 e (R_2^3 - R_1^3) \sin\left(\frac{\alpha}{2}\right) \vec{u}_y}$$

Cette résultante est compensée par la réaction d'axe au niveau de l'axe de rotation.

Le moment résultant des actions de Laplace par rapport au point  $O$  vaut

$$\mathcal{M}_{O,L} = \iiint_{\text{secteur } S} \overrightarrow{OP} \wedge \vec{f}_L d\tau = \iiint_{\text{secteur } S} r \vec{u}_r \wedge (-\gamma r \omega B^2 \vec{u}_\theta) d\tau$$

soit

$$\mathcal{M}_{O,L} = -\gamma \omega B^2 \int_{r=R_1}^{R_2} r^2 r dr \times \int_{\theta=-\alpha/2}^{\alpha/2} d\theta \times \int_0^e dz \vec{u}_z$$

Après intégration, on obtient

$$\boxed{\mathcal{M}_{O,L} = -\frac{1}{4} \gamma (R_2^4 - R_1^4) \alpha e B^2 \vec{\omega}}$$
 avec  $\vec{\omega} = \omega \vec{u}_z$

Le moment résultant est un moment résistant (opposé à  $\vec{\omega}$ ) de type fluide

$$\mathcal{M}_{O,L} = -\lambda \vec{\omega}$$

Ce moment résistant va freiner le disque sans toutefois l'arrêter. En effet, en l'absence de couple moteur et de frottements solides au niveau de la liaison pivot, l'application du théorème du moment cinétique projeté sur l'axe de rotation conduit à

$$J \frac{d\omega}{dt} = -\lambda \omega \implies \omega(t) = \omega_0 e^{-\lambda t/J}$$

La vitesse de rotation est exponentiellement décroissante mais ne s'annule jamais strictement. Ce système de freinage doit être associé à des freins classiques à disques ou à tambour.

## Exercice V : Roue de Barlow

- a) Le disque est parcouru par un courant  $i$  dirigé de  $O$  vers  $A$  (pour simplifier, on le prend en ligne droite), donc positif d'après le sens d'orientation  $\oplus$  choisi.

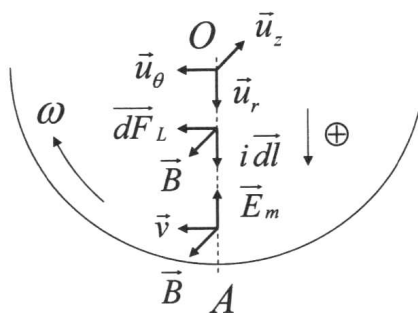
Placé dans un champ magnétique  $\vec{B}$  comme indiqué sur la figure, un élément de conducteur  $d\vec{l} = dr \vec{u}_r$ , est soumis à la force de Laplace  $d\vec{f}_L = i d\vec{l} \wedge \vec{B}$  dirigée vers la gauche, dont le moment par rapport à  $O$  entraîne le disque dans le sens des aiguilles d'une montre.

D'où le sens choisi pour  $\vec{u}_\theta$  afin que la vitesse d'un point  $M$  tel que  $\vec{OM} = r \vec{u}_r$ , soit  $\vec{v} = r \omega \vec{u}_\theta$ ; et par conséquent un vecteur  $\vec{u}_z$  vers l'arrière, soit  $\vec{\omega} = \omega \vec{u}_z$  avec  $\omega > 0$ . À noter qu'alors  $\vec{B} = -B \vec{u}_z$  ( $B > 0$ ).

- b) La force de Laplace élémentaire est  $d\vec{f}_L = i d\vec{l} \wedge \vec{B} = i dr \vec{u}_r \wedge (-B \vec{u}_z) = i B dr \vec{u}_\theta$ , d'où le moment résultant en  $O$  :

$$\vec{M}_L^O = \int_0^A \vec{OM} \wedge d\vec{f}_L = \int_0^a r \vec{u}_r \wedge i B dr \vec{u}_\theta = i B \int_0^a r dr \vec{u}_z$$

car en ARQS le courant  $i$  est le même en tout point et  $\vec{B}$  uniforme, d'où



$$\vec{M}_L^O = \frac{1}{2} i a^2 B \vec{u}_z$$

Le disque mobile dans le champ  $\vec{B}$  est alors en chacun de ses points le siège d'un champ électromoteur de type Lorentz :

$$\vec{E}_m(M) = \vec{v}(M) \wedge \vec{B} = r\omega \vec{u}_\theta \wedge (-B \vec{u}_z) = -r\omega B \vec{u}_r,$$

s'opposant d'après la loi de Lenz, au passage du courant.

Il y correspond une force électromotrice  $e_{OA}$  négative :

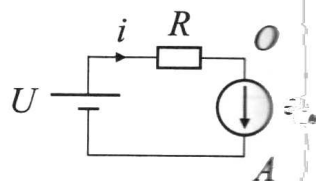
$$e_{OA} = \int_O^A \vec{E}_m \cdot d\vec{l} = \int_0^a -r\omega B \vec{u}_r \cdot (dr \vec{u}_r) \Rightarrow e_{OA} = -\frac{1}{2} \omega a^2 B$$

c) Le théorème du moment cinétique scalaire par rapport à l'axe  $Oz$  appliqué au disque s'écrit :

$$J \frac{d\omega}{dt} = \frac{1}{2} i a^2 B \quad (1)$$

Et la loi d'Ohm généralisée appliquée au circuit équivalent donne :

$$U = Ri + \frac{1}{2} \omega a^2 B \quad (2)$$



Par élimination de  $i(t)$  entre les équations couplées (1) et (2), il vient :

$$\frac{1}{2} m a^2 \frac{d\omega}{dt} = \frac{a^2 B}{2R} \left( U - \frac{1}{2} \omega a^2 B \right) \text{ soit } \frac{2mR}{a^2 B^2} \frac{d\omega}{dt} + \omega = \frac{2U}{a^2 B}$$

équation du type  $\tau \frac{d\omega}{dt} + \omega = \omega_l$  annoncé

$$\text{avec } \tau = \frac{2mR}{a^2 B^2} \text{ et } \omega_l = \frac{2U}{a^2 B}$$

montrant que  $\tau$  est un temps caractéristique de l'évolution de  $\omega(t)$  et  $\omega_l$  la valeur limite atteinte au bout d'un temps long.

$$\text{La solution est : } \omega(t) = \omega_l (1 - e^{-t/\tau})$$

d) Pour obtenir des grandeurs homogènes à une puissance, effectuons :

$$(1) \times \omega : \frac{d}{dt} \left( \frac{1}{2} J \omega^2 \right) = \frac{1}{2} i a^2 B \omega \text{ avec } P_{Lapl.} = M_L^O \cdot \omega = \frac{1}{2} i a^2 B \omega$$

$$(2) \times i : Ui = Ri^2 + \frac{1}{2} \omega a^2 Bi \text{ avec } P_{fem} = e_{OA} \cdot i = -\frac{1}{2} \omega a^2 Bi$$

Par différence membre à membre, le bilan auxiliaire  $P_{Lapl.} + P_{fem} = 0$  conduit au bilan global :

$$Ui = Ri^2 + \frac{d}{dt} \left( \frac{1}{2} J \omega^2 \right) > 0$$

montrant que l'énergie cinétique de rotation du disque est acquise aux dépens de l'énergie fournie par le générateur ôtée de l'énergie dissipée dans la résistance par effet Joule.

## Exercice VI : Courants de Foucault : influence du feuilletage

1. Le potentiel vecteur est un vecteur polaire contrairement au champ magnétique  $\vec{B}$  : les plans de symétrie pour le champ magnétique sont des plans d'antisymétrie pour le potentiel vecteur et vice-versa.

Étude des symétries.

Soit un point  $M$  quelconque. Le plan passant par  $M$  et contenant l'axe  $(Oz)$  du cylindre est un plan de symétrie pour le champ magnétique : c'est donc un plan d'antisymétrie pour le potentiel vecteur. Le potentiel vecteur étant un vecteur polaire, il est orthogonal, au point  $M$ , à tout plan d'antisymétrie passant par  $M$ . Le potentiel vecteur est donc de la forme

$$\vec{A}(M) = A_\theta(M) \vec{u}_\theta$$

Étude des invariances.

D'après la géométrie du problème, le potentiel vecteur est invariant par rotation autour de l'axe  $(Oz)$  et par translation suivant  $\vec{u}_z$ . Les composantes de  $\vec{A}$  ne dépendent donc que de la distance à l'axe  $r$ . On en déduit

$$\vec{A}(M) = a_\theta(r) \vec{u}_\theta$$

On calcule la circulation de  $\vec{A}$  sur un cercle  $\mathcal{C}$  d'axe  $(Oz)$  et de rayon  $r$ , orienté par  $\vec{u}_z$  :

$$\oint_{\mathcal{C}} \vec{A} \cdot d\vec{\ell} = \oint_{\mathcal{C}} A_\theta(r) \vec{u}_\theta \cdot (r d\theta \vec{u}_\theta) = r A_\theta(r) \int_0^{2\pi} = 2\pi r A_\theta(r)$$

Mais, d'après le théorème de Stokes

$$\oint_{\mathcal{C}} \vec{A} \cdot d\vec{\ell} = \iint_{\Sigma(\mathcal{C})} \text{rot}(\vec{A}) \cdot d^2\vec{S} = \iint_{\Sigma(\mathcal{C})} \vec{B} \cdot d^2\vec{S} = \pi r^2 B_0 \cos(\omega t)$$

On en déduit

$$2\pi r A_\theta(r) = \pi r^2 B_0 \cos(\omega t) \quad \text{soit} \quad A_\theta(r) = \frac{r}{2} B_0 \cos(\omega t)$$

Finalement

$$\vec{A}(M) = \frac{r}{2} B_0 \cos(\omega t) \vec{u}_\theta$$

2. Le cylindre est le siège d'un phénomène d'induction de Neumann. Le champ électromoteur vaut donc

$$\vec{E}_m = -\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} = \frac{r}{2} B_0 \omega \sin(\omega t) \vec{u}_\theta$$

Si l'on admet la validité de la loi d'Ohm locale dans le cadre de l'ARQS, on a, à l'intérieur du cylindre conducteur :

$$\vec{j} = \gamma \vec{E}_m = \frac{\gamma r}{2} B_0 \omega \sin(\omega t) \vec{u}_\theta$$

3. La force exercée par le champ électromagnétique sur une charge libre  $q$  du conducteur est la force de Lorentz

$$\vec{F} = q \left( \vec{E}_m + \vec{v} \wedge \vec{B} \right)$$

La puissance instantanée reçue par une charge  $q$  se déplaçant à la vitesse  $\vec{v}$  vaut donc

$$\mathcal{P} = \vec{F} \cdot \vec{v} = q \vec{v} \cdot \vec{E}_m$$

La puissance par unité de volume absorbée par les charges libres de densité volumique  $n$  vaut

$$w = \frac{d\mathcal{P}}{d\tau} = nq \vec{v} \cdot \vec{E}_m = \vec{j} \cdot \vec{E}_m$$

On en déduit

$$w = \frac{1}{4} \gamma r^2 B_0^2 \omega^2 \sin^2(\omega t)$$

4. La puissance dissipée dans tout le cylindre à l'instant  $t$  est obtenue par intégration sur les variables d'espace :

$$\mathcal{P}_{\text{tot}} = \iiint_{\text{cylindre}} w \underbrace{d\tau}_{r^2 dr d\theta dz} = w = \frac{1}{4} \gamma B_0^2 \omega^2 \sin^2(\omega t) \int_0^a r^3 dr \int_0^{2\pi} d\theta + \int_0^\ell dz$$

On en déduit

$$\mathcal{P}_{\text{tot}} = \frac{\pi}{8} \gamma a^4 \ell B_0^2 \omega^2 \sin^2(\omega t)$$

La puissance totale dissipée en moyenne sur une période vaut donc

$$\langle \mathcal{P}_{\text{tot}} \rangle = \frac{\pi}{16} \gamma a^4 \ell B_0^2 \omega^2$$

où l'on a utilisé

$$\langle \sin^2(\omega t) \rangle = \frac{\omega}{2\pi} \int_0^{2\pi/\omega} \sin^2(\omega t) dt = \frac{1}{2}$$

La puissance dissipée par effet Joule par les courants de Foucault est proportionnelle au carré de la fréquence du champ magnétique.

5. Chaque petit cylindre de rayon  $a_0$  dissipe une puissance moyenne

$$\langle \mathcal{P}_0 \rangle = \frac{\pi}{16} \gamma a_0^4 \ell B_0^2 \omega^2 \quad \text{avec} \quad \pi a_0^2 = s$$

d'où

$$\langle \mathcal{P}_0 \rangle = \frac{1}{16\pi} \gamma B_0^2 \omega^2 \ell s^2$$

La puissance moyenne totale dissipée dans l'ensemble des cylindres vaut

$$\langle \mathcal{P}'_{\text{tot}} \rangle = N \langle \mathcal{P}_0 \rangle = \frac{1}{16\pi} \gamma B_0^2 \omega^2 \ell N s^2$$

Or la section totale vaut  $S = \pi a^2 = N s$  d'où  $s = S/N$ . On en déduit

$$\langle \mathcal{P}'_{\text{tot}} \rangle = \frac{1}{16\pi} \gamma B_0^2 \omega^2 \ell \frac{S^2}{N} = \frac{\langle \mathcal{P}_{\text{tot}} \rangle}{N}$$

Le fait de diviser le grand cylindre métallique en  $N$  cylindres parallèles de petit rayon, isolés les uns des autres permet de diviser par  $N$  la puissance moyenne dissipée par les courants de Foucault.

C'est le principe du feuilletage utilisé dans les matériaux ferromagnétiques (machines tournantes, transformateurs, électro-aimants).

## Exercice VII : Pince ampèremétrique

### 1. Symétries

Soit un point  $M$  quelconque. Le plan passant par  $M$  et contenant l'axe ( $Oz$ ) est un plan de symétrie pour la distribution de courants. Le champ magnétique étant un pseudo-vecteur, il est normal, au point  $M$ , à ce plan. On en déduit

$$\vec{B} = B_\theta(M) \vec{u}_\theta$$

### Invariances

La distribution de courant (bobine torique + fil) est invariante par rotation autour de l'axe ( $Oz$ ). Les composantes du champ  $\vec{B}$  ne dépendent donc pas de  $\theta$ .

On en déduit

$$\boxed{\vec{B}(M) = B_\theta(r, z) \vec{u}_\theta}$$

2. Appliquons le théorème d'Ampère sur un cercle  $\mathcal{C}$  d'axe ( $Oz$ ), de rayon  $r$ , et situé à la hauteur  $z$  dans le tore, tournant dans le sens trigonométrique autour de l'axe ( $Oz$ ) (avec cette orientation, les courants traversant le contour sont comptés positivement) :

$$\oint_{\mathcal{C}} \vec{B}(r, z) \cdot d\vec{\ell} = \mu_0 \sum I_{\text{enlacée}}$$

La circulation du champ magnétique se calcule aisément

$$\oint_{\mathcal{C}} \vec{B}(r, z) \cdot d\vec{\ell} = \oint_{\mathcal{C}} B_\theta(r, z) \vec{u}_\theta \cdot (r d\theta \vec{u}_\theta) = B_\theta(r, z) \int_0^{2\pi} r d\theta = 2\pi r B_\theta(r, z)$$

L'intensité enlacée par  $\mathcal{C}$  vaut

$$I_{\text{enlacée}} = Ni + I$$

car le contour enlace  $N$  fois le courant d'intensité  $i$  circulant dans le tore.

Le théorème d'Ampère conduit à

$$2\pi r B_\theta(r, z) = \mu_0 Ni + \mu_0 I$$

On en déduit que le champ magnétique est finalement indépendant de  $z$  à l'intérieur du tore, et s'écrit :

$$\boxed{\vec{B} = \frac{\mu_0(Ni + I)}{2\pi r} \vec{u}_\theta}$$

3. Le flux magnétique  $\varphi$  à travers une seule spire est donné par :

$$\varphi = \iint_{\text{spire}} \vec{B} \cdot d^2\vec{S} = \int_{r=a}^{2a} \frac{dr}{r} \int_{z=0}^a dz = \frac{\mu_0 a (Ni + I)}{2\pi} \ln(2)$$

Le flux total  $\phi$  à travers les  $N$  spires est donc donné par :

$$\boxed{\phi = \frac{\mu_0 a (N^2i + NI)}{2\pi} \ln(2)}$$

Or la loi des mailles sur le circuit portant la bobine permet d'écrire :  $e = (R + r)i$ , avec  $e = -\frac{d\phi}{dt}$ .

On en déduit

$$(R + r)i = \frac{\mu_0 a}{2\pi} \ln(2) \frac{d}{dt} (N^2i + NI) \approx \frac{\mu_0 a N}{2\pi} \ln(2) \frac{dI}{dt}$$

soit

$$i_m \cos(\omega t + \psi) = -\frac{\mu_0 a N}{2\pi(R+r)} \ln(2) \omega I_m \sin(\omega t)$$

Le déphasage  $\psi$  est donc fixé à  $\psi = +\pi/2$  et l'on a

$$\boxed{\frac{i_m}{I_m} = \frac{\mu_0 a N \omega}{2\pi(R+r)} \ln(2)}$$

4. Un tel dispositif permet de mesurer l'amplitude d'un signal sinusoïdal sans insérer un ampèremètre dans le circuit, soit parce que le circuit ne peut être débranché, soit car le courant est trop important pour pouvoir y insérer un ampèremètre classique sans dommage.

La pince ampèremétrique fonctionne d'autant mieux que la surface du tore est importante, pour que le flux du champ créé à l'intérieur de celle-ci soit le plus important possible. Ceci explique que  $i_m$  augmente avec  $a$ . Il faut également le plus grand nombre de tours de fils possible, pour les mêmes raisons. Plus la fréquence est importante, plus la détection est bonne, avec une détection nulle en régime statique. C'est la variation du champ magnétique induit qui génère un courant dans la pince. Finalement, le courant mesuré sera d'autant plus grand que le courant à mesurer l'est, et d'autant plus grand que les résistances du dispositif sont faibles.

## Exercice VIII : Étiquette antivol

- La bobine correspond à l'enroulement du fil métallique et le condensateur est situé au centre (peu visible). Ce dispositif est en général couplé avec une puce électronique sur laquelle sont enregistrées des données. On appelle ce système RFID (radio-frequency identification), et celui-ci est très largement répandu (antivols dans les magasins, étiquetage remplaçant les codes-barres, passes Navigo et Velib, marquage des dossards pour le suivi automatique des coureurs dans les courses comme le marathon de Paris, marquage des aliments pour être "reconnus par le réfrigérateur lorsqu'ils dépassent la date de péremption, marquage des lettres et des colis postaux ...).
- Le courant variable dans le portique émetteur génère un champ variable et donc un flux variable au travers de la bobine de l'antivol. Ainsi, lorsque l'étiquette se trouve entre les portiques, il apparaît dans le circuit de l'étiquette une force électromotrice de la forme  $e(t) = E_0 \cos(\omega t)$  à la même pulsation que celle du courant dans le portique émetteur.
- La loi des mailles permet d'écrire

$$e = u_L + u_C \quad \text{avec} \quad \begin{cases} u_L = L \frac{di}{dt} \\ u_C = \frac{1}{C} \int^t i(\tau) d\tau \end{cases}$$

En dérivant cette équation par rapport au temps, puis en divisant par  $L$ , on obtient

$$\boxed{\frac{1}{L} \frac{de}{dt} = \frac{d^2i}{dt^2} + \omega_0^2 \frac{i}{LC}} \quad \text{avec} \quad \boxed{\omega_0^2 = \frac{1}{LC}}$$

4. En posant  $i(t) = I(\omega) \sin(\omega t)$ , on obtient :

$$-\frac{\omega}{L} E_0 \sin(\omega t) = -\omega^2 I(\omega) \sin(\omega t) + \omega_0^2 I(\omega) \sin(\omega t)$$

soit

$$\boxed{I(\omega) = \frac{E_0 \omega}{L(\omega^2 - \omega_0^2)}}$$

5. Lorsque  $LC\omega^2 = 1$ , il se produit alors une résonance en courant, c'est à dire que le courant devient très important.
6. En pratique, le courant ne tend pas vers l'infini car le circuit a nécessairement une petite résistance qui "arrondira" la résonance. Cependant, pour la fréquence caractéristique, le courant peut néanmoins être important car la résistance de l'antivol est très faible.
7. Lorsque l'étiquette antivol traverse les portiques, le champ magnétique au niveau du portique récepteur diminue, car une partie de l'énergie utile pour générer le champ magnétique a été consommée par l'antivol. On peut également comprendre le phénomène avec la loi de Lenz, qui permet de comprendre directement que l'effet de la génération de courants induits dans l'antivol va s'opposer aux causes qui leur ont donné naissance, et par conséquent générer un champ magnétique opposé au champ magnétique initial. Le champ résultant dans le portique récepteur est donc plus faible. Ce phénomène est d'autant plus important que le courant induit est important, c'est-à-dire si la résonance est bien calculée pour  $\frac{1}{\sqrt{LC}} = 2\pi \times 135 \text{ kHz}$ . L'effet sur la f.e.m. induite dans le récepteur est important, c'est-à-dire que le flux est moins important et que la f.e.m. diminue. C'est cette chute de tension qui déclenche l'alarme.

*Remarque* : dans les capteurs RFID plus perfectionnées, le courant induit peut permettre d'alimenter une puce, qui peut émettre un code ou une référence particulière qui peut également être détectée par un système de portique plus complexe.