Séance 3

LOI NORMALE :

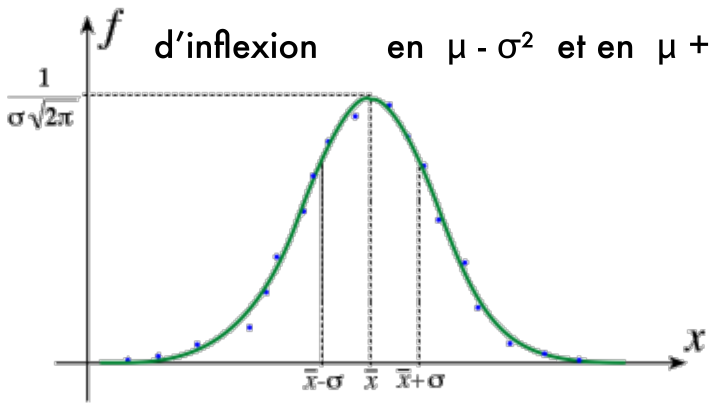
Une variable aléatoire continue X suit une loi normale d'espérance μ et de variance σ^2 , si sa densité f est de la forme :

$$f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}e^{-\frac{1}{2}\frac{(x-\mu)^2}{\sigma^2}}$$

Cela s'écrit : $X \sim N(\mu, \sigma)$

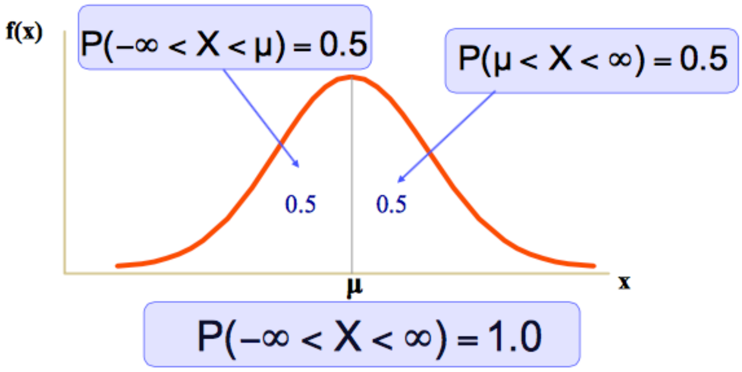
Caractéristiques de la loi normale :

- Elle a une forme de courbe en 'u inversé'
- Elle est symétrique par rapport à la moyenne μ (moyenne & médiane coincident)
- Elle a deux points d'inflexion en $\mu - \sigma^2$ et en $\mu + \sigma^2$



Probabilités et aire sous la courbe :

- L'aire totale située sous la courbe est égale à 1, et la courbe est symétrique, donc on a la moitié de l'aire à gauche de l'espérance égale à l'autre moitié à sa droite



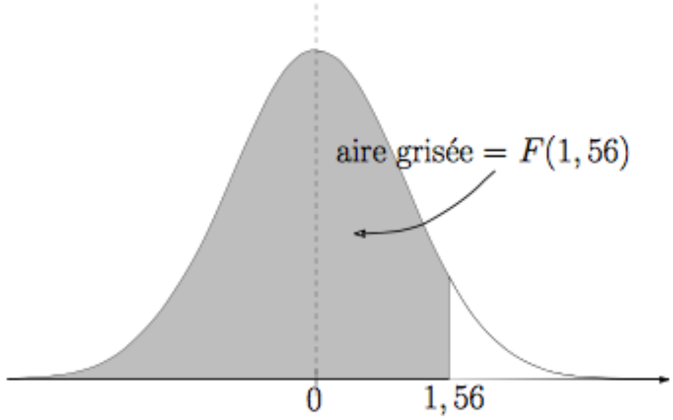
- La probabilité pour tout X = a est nulle

Exemple

On suppose qu'une certaine variable $X \sim \mathcal{N}(0,1)$. Pour quelle proportion d'individus est-ce que $X \leq 1,56$?

On cherche $P(X \leq 1,56)$ (rappel : on écrit aussi $F(1,56)$).

On cherche $P(X \leq 1,56)$ (rappel : on écrit aussi $F(1,56)$).



On cherche $P(X \leq 1,56)$ (rappel : on écrit aussi $F(1,56)$).
On cherche 1,56 dans **la table** :

	...	0,06	...
$\vdots$			
1,5	...	0.9406	...
$\vdots$			

Donc $P(X \leq 1,56) = 0,9406$.
Pour $94,06$ % des individus, la variable X est inférieure à $1,56$.

- Si $X_1 \sim \mathcal{N}(\mu_1, \sigma_1^2)$, $X_2 \sim \mathcal{N}(\mu_2, \sigma_2^2)$ et X_1 et X_2 sont indépendantes, alors la variable aléatoire $X_1 + X_2$ suit la loi normale $\mathcal{N}(\mu_1 + \mu_2, \sigma_1^2 + \sigma_2^2)$.
- Le théorème d'additivité peut s'appliquer à n variables.

$$Z \sim N(0, 1)$$

$$X \sim N(\mu, \sigma^2) \Rightarrow Z = \frac{X - \mu}{\sigma}$$

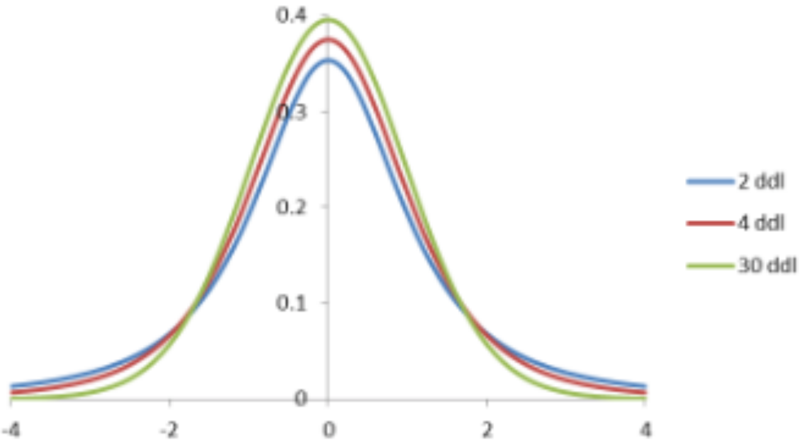
LOI NORMALE CENTREE REDUITE :

Toute variable aléatoire normale peut être transformée dans une distribution normale d'espérance 0 et de variance 1.

APPLICATION DE LA LOI NORMALE

- Un phénomène (ou une variable aléatoire) obéit approximativement à une loi normale quand quatre conditions sont rencontrées :
  - Le phénomène dépend de nombreux facteurs
  - Ces facteurs sont indépendants entre eux
  - Les effets aléatoires de ces facteurs sont cumulatifs
  - Les variations de ces facteurs sont faibles et la variation du phénomène due à la variation de chacun des facteurs est également faible, l'effet d'un facteur est négligeable devant les effets de l'ensemble des facteurs

LA LOI DE STUDENT :



Il s'agit d'une loi dérivée de la loi normale

- La loi est symétrique avec des queues de distribution plus épaisses qu'une loi normale
- Sa forme dépend du nombre d'observation (degrés de liberté = ddl)
- La loi de Student converge vers une loi normale quand le nombre de degré de liberté tend vers l'infini (ddl > 30)
- Moyenne et médiane : 0
- Variance : n / (n - 2) si n > 2