

# Chapitre 1

## Base des Signaux

### 1.1 Classification des signaux

#### 1.1.1 Signaux à variation temporelle continue-discrète

Les **signaux à variation temporelle continue** sont des fonctions d'une ou plusieurs variables continues (définies dans un espace continu, par exemple l'ensemble des nombres réels entre  $-\infty$  et  $+\infty$ , ou encore entre  $-1$  et  $+1$ ), comme représenté sur la figure 1.1.

La variable "t" et les parenthèses "( )" sont utilisées pour décrire une telle variation. Cette variable représente typiquement le temps, mais elle peut aussi représenter une température, une altitude ... etc...

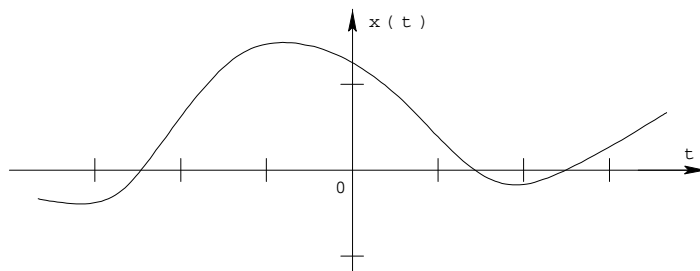


FIG. 1.1 – Signal à variation temporelle continue

Les **signaux à variation temporelle discrète** sont des fonctions d'une ou plusieurs variables discrètes (définies pour certaines valeurs seulement

et non pour un continuum de valeurs : l'ensemble des nombres entiers par exemple entre  $-\infty$  et  $+\infty$  ou encore entre 0 et 40), comme représenté sur la figure 1.2.

La variable "n" et les crochets "[ ]" sont utilisés pour décrire une telle variation. Cette variable représente en général le temps, mais elle peut aussi représenter d'autres quantités.

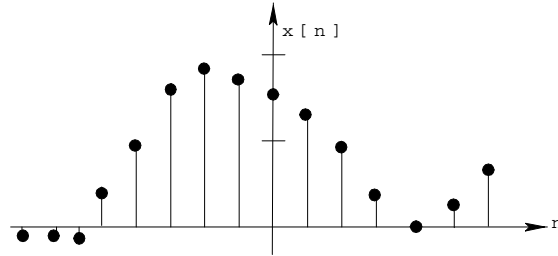


FIG. 1.2 – Signal à variation temporelle discrète

### 1.1.2 Signaux pairs et signaux impairs

Un signal à variation temporelle continue  $x(t)$  est dit pair, s'il satisfait (1-1).

$$x(-t) = x(t) \text{ pour tout } t \quad (1-1)$$

Un signal à variation temporelle continue  $x(t)$  est dit impair, s'il satisfait (1-2).

$$x(-t) = -x(t) \text{ pour tout } t \quad (1-2)$$

Un signal à variation temporelle discrète  $x[n]$  est dit pair, s'il satisfait (1-3).

$$x[-n] = x[n] \text{ pour tout } n \quad (1-3)$$

Un signal à variation temporelle discrète  $x[n]$  est dit impair, s'il satisfait (1-4).

$$x[-n] = -x[n] \text{ pour tout } n \quad (1-4)$$

**Propriété :** On peut toujours décomposer un signal quelconque  $x(t)$  en la somme de deux signaux particuliers, l'un pair et l'autre impair (1-5).

$$x(t) = x_e(t) + x_o(t) \quad (1-5)$$

$x_e(t)$  signifie la partie paire : "even" en anglais

$x_o(t)$  signifie la partie impaire : "odd" en anglais.

$$x_e(t) = \frac{1}{2} \{x(t) + x(-t)\} \quad (1-6)$$

$$x_o(t) = \frac{1}{2} \{x(t) - x(-t)\} \quad (1-7)$$

**Exemple E.1 :** Trouver les parties paire et impaire du signal  $e^{-2t} \cos(t)$ .

En remplaçant  $t$  par  $-t$ , on a la relation :

$$x(t) = e^{-2t} \cos(t) \rightarrow x(-t) = e^{2t} \cos(-t) = e^{2t} \cos(t)$$

Appliquons les formules de définition des parties paire et impaire :

$$x_e(t) = \frac{1}{2} \{e^{-2t} \cos(t) + e^{2t} \cos(t)\} = \cos(t) \times \frac{e^{2t} + e^{-2t}}{2}$$

$$\Rightarrow x_e(t) = \cos(t) \times ch(2t)$$

$$x_o(t) = \frac{1}{2} \{e^{-2t} \cos(t) - e^{2t} \cos(t)\} = -\cos(t) \times \frac{e^{2t} - e^{-2t}}{2}$$

$$\Rightarrow x_o(t) = -\cos(t) \times sh(2t)$$

$sh(2t)$  et  $ch(2t)$  représentent respectivement les sinus hyperboliques et cosinus hyperboliques.

**Problème P.1 :** Trouver les parties paire et impaire de chacun des signaux suivants :

1.  $x(t) = \cos(t) + \sin(t) + \sin(t) \times \cos(t)$
2.  $x(t) = 1 + t + 3t^2 + 5t^3 + 9t^4$
3.  $x(t) = 1 + t \cos(t) + t^2 \sin(t) + t^3 \sin(t) \times \cos(t)$
4.  $x(t) = (1 + t^3) \cos^3(t)$

**Réponses :**

1. Paire :  $\cos(t)$ ; Impaire :  $\sin(t) \times \{1 + \cos(t)\}$ .
2. Paire :  $1 + 3t^2 + 9t^4$ ; Impaire :  $t + 5t^3$ .
3. Paire :  $1 + t^3 \sin(t) \cos(t)$ ; Impaire :  $t \cos(t) + t^2 \sin(t)$ .
4. Paire :  $\cos^3(t)$ ; Impaire :  $t^3 \cos^3(t)$ .

### 1.1.3 Signaux périodiques et signaux apériodiques

Un signal périodique  $x(t)$  est une fonction du temps qui satisfait la condition (1-8).

$$x(t) = x(t + T) \text{ pour tout } t \quad (1-8)$$

$T$  est une constante positive. Il est évident que si la condition est satisfaite pour  $T = T_0$ , elle est aussi satisfaite pour  $T = 2T_0$ ,  $T = 3T_0$ ,  $T = 4T_0$ . La valeur la plus petite de  $T$  qui satisfait l'équation de définition est appelée "période fondamentale" de  $x(t)$ .

La période fondamentale de  $T$  définit donc la durée d'un cycle complet de  $x(t)$ .

L'inverse de la période fondamentale est appelé "la fréquence fondamentale" du signal périodique  $x(t)$ ; elle décrit combien de fois le signal périodique se reproduit par seconde. On peut donc écrire formellement (1-9).

$$f = \frac{1}{T} \quad (1-9)$$

La fréquence est mesurée en hertz (Hz) ou en cycles par seconde. La fréquence angulaire (ou pulsation), mesurée en radians par seconde, est définie par (1-10).

$$\omega = 2\pi f = \frac{2\pi}{T} \quad (1-10)$$

Un signal  $x(t)$  pour lequel, il n'existe pas de valeur de  $T$  vérifiant  $x(t) = x(t+T)$  pour tout  $t$  est appelé un signal apériodique ou signal non périodique.

Considérons maintenant le cas des signaux à variation temporelle discret. Nous dirons qu'un signal à variation temporelle discrète est périodique, s'il vérifie la relation (1-11).

$$x[n] = x[n + N] \text{ pour tout } n \quad (1-11)$$

$N$  est un entier positif. L'entier  $N$  le plus petit, pour lequel la relation précédente est satisfaite, est appelé "période fondamentale" du signal à variation temporelle  $x[n]$ .

La fréquence angulaire fondamentale ou simplement, la fréquence fondamentale de  $x[n]$  est définie par (1-12).

$$\Omega = \frac{2\pi}{N} \quad (1-12)$$

$\Omega$  est mesurée en radians.

**Remarque :** Il faut clairement noter la différence fondamentale entre les deux équations de définition :

$$\begin{aligned}x(t) &= x(t + T) \text{ pour tout } t \\x[n] &= x[n + N] \text{ pour tout } n \text{ entier}\end{aligned}$$

La période fondamentale  $T$  de  $x(t)$  est définie pour n'importe quelle valeur positive réelle ; la période fondamentale  $N$  de  $x[n]$  ne peut prendre que des valeurs positives entières.

**Exemple E.2 :** On vérifiera que  $\cos[2n]$  n'est pas périodique alors que  $\cos[2\pi n]$  est périodique, de période fondamentale, un échantillon.

**Problème P.2 :** La figure 1.3 ci-dessous représente un signal triangulaire. Quelle est sa fréquence fondamentale, sa pulsation fondamentale ?

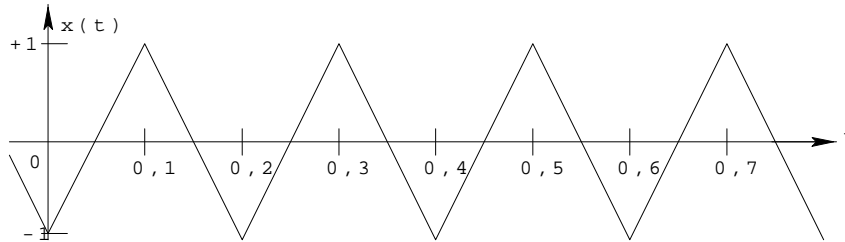


FIG. 1.3 – Signal périodique triangulaire

**Réponse :** 5 Hertz,  $10\pi \text{rad.s}^{-1}$ .

Les figures 1.4 et 1.5, ci-dessous, représentent deux signaux à variation temporelle discrète.

**Problème P.3 :** Pour chacun des signaux suivants, déterminer s'il est ou non périodique. Si oui, déterminer sa période fondamentale.

1.  $x(t) = \cos^2(2\pi t)$ .
2.  $x(t) = \sin^3(2t)$ .
3.  $x(t) = e^{-2t} \cos(2\pi t)$ .

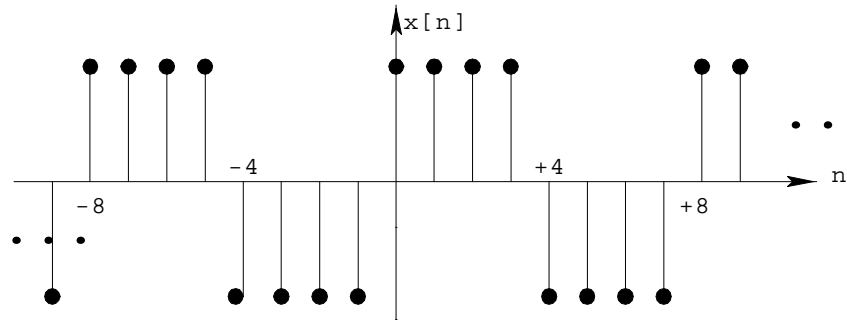


FIG. 1.4 – Signal à variation temporelle discrète périodique

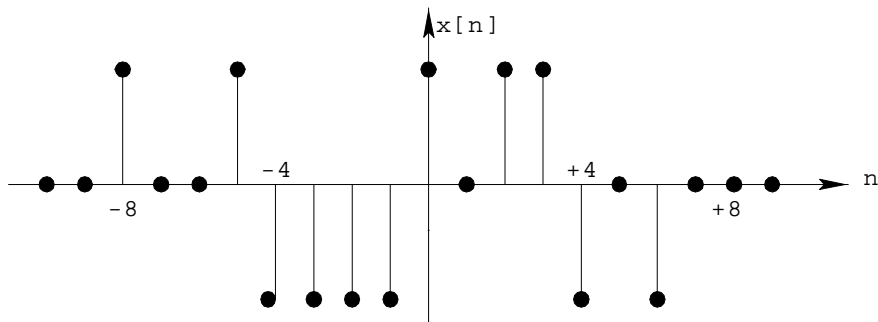


FIG. 1.5 – Signal à variation temporelle discrète non périodique

4.  $x[n] = (-1)^n$ .
5.  $x[n] = -n^2$ .
6.  $x[n] = \cos[2\pi n]$ .

**Réponses :**

1. Périodique, de période fondamentale 0.5s.
2. Périodique, de période fondamentale  $(1/\pi)s$ .
3. Non périodique.
4. Périodique, de période fondamentale : 2 échantillons.
5. Non périodique.
6. Périodique, de période fondamentale : 1 échantillon.

### 1.1.4 Signaux déterministes et signaux aléatoires

Un **signal déterministe** est un signal pour lequel il n'y a aucune incertitude sur sa valeur : il peut donc être modélisé par une fonction du temps.

Par opposition, un **signal aléatoire** est un signal pour lequel avant qu'il se produise, il y a une certaine incertitude. En fait, c'est un signal qui appartient à un ensemble de signaux (appelé processus aléatoire), chaque signal de cet ensemble pouvant avoir une forme spécifique. De plus, chaque signal a une certaine probabilité de se produire ou non.

### 1.1.5 Signaux à énergie finie et à puissance finie

Dans un système électrique, tension et courant peuvent être considérés comme des signaux. Soit une tension  $v(t)$  aux bornes d'une résistance  $R$ , parcourue par un courant  $i(t)$ . La puissance instantanée dissipée dans cette résistance est définie par (1-13).

$$p(t) = \frac{v^2(t)}{R} = Gv^2(t) \quad (1-13)$$

ou de façon équivalente :  $p(t) = Ri^2(t)$ .

Dans les deux cas, **la puissance instantanée**  $p(t)$  est proportionnelle au carré de l'amplitude du signal. Si l'on suppose que la résistance a pour

valeur  $1\Omega$ , les deux définitions sont équivalentes. Cette définition se généralise en théorie du signal : la puissance instantanée  $p(t)$  associée à un signal quelconque  $x(t)$  est par définition (1-14).

$$p(t) = x^2(t) \quad (1-14)$$

Prenant pour acquise cette convention, on peut définir l'énergie totale associée à un signal  $x(t)$  à variation temporelle continue (1-15).

$$E_\infty = \lim_{T \rightarrow \infty} \int_{-T/2}^{T/2} x^2(t) dt = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2(t) dt \quad (1-15)$$

**La puissance moyenne dans le temps**, ou puissance moyenne, est alors définie par la relation (1-16).

$$P_\infty = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x^2(t) dt \quad (1-16)$$

Pour un signal périodique de période fondamentale  $T$ , la définition précédente conduit à (1-17).

$$P = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x^2(t) dt \quad (1-17)$$

La racine carrée de la puissance moyenne  $P$  est appelée valeur efficace du signal périodique  $x(t)$  (en anglais : root-mean-square (r m s)). Dans le cas d'un signal  $x[n]$  à variation temporelle discrète, les intégrales précédentes sont remplacées par les sommes correspondantes. Ainsi **l'énergie totale** de  $x[n]$  est définie par (1-18).

$$E_\infty = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x^2[n] \quad (1-18)$$

De même, pour la **puissance moyenne** (1-19).

$$P_\infty = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{2N} \sum_{n=-N}^N x^2[n] \quad (1-19)$$



La puissance moyenne d'un signal périodique  $x[n]$  de période fondamentale  $N$  est définie par (1-20).

$$P = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} x^2[n] \quad (1-20)$$

On dira qu'un signal est à énergie finie, si et seulement si, son énergie totale est bornée, soit (1-21).

$$0 < E_{\infty} < \infty \quad (1-21)$$

On dira qu'un signal est à puissance finie, si et seulement si, sa puissance moyenne est bornée (1-22).

$$0 < P_{\infty} < \infty \quad (1-22)$$

La classification des signaux en énergie finie ou en puissance finie est mutuellement exclusive : un signal à énergie finie est un signal à puissance nulle tandis qu'un signal à puissance finie a une énergie infinie.

**Remarque :** *En général, les signaux périodiques et les signaux aléatoires sont souvent à puissance finie, alors que les signaux déterministes et non périodiques sont souvent des signaux à énergie finie.*

**Exemples E.3 :**

1. L'énergie du signal  $x(t)$  est égale à  $\frac{2}{3}$ .

$$x(t) = \begin{cases} t & \text{pour } 0 \leq t \leq 1 \\ 2 - t & \text{pour } 1 \leq t \leq 2 \\ 0 & \text{partout ailleurs} \end{cases}$$

La puissance du signal  $x[n]$  est égale à  $\frac{1}{2}$ .

$$x[n] = \begin{cases} \cos[\pi n] & \text{pour } n \geq 0 \\ 0 & \text{partout ailleurs} \end{cases}$$

**Problème P.4 :** Quelle est l'énergie totale de l'impulsion rectangulaire de la figure 1.6? Quelle est la puissance moyenne du signal carré de la figure 1.6?

**Réponses :**  $A^2T_1$  et 1.

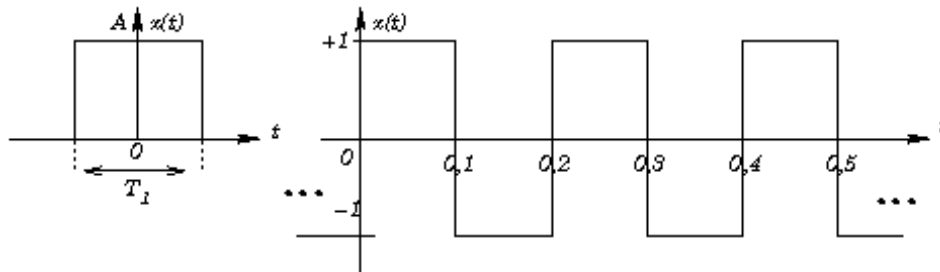


FIG. 1.6 – Impulsion rectangulaire et signal carré

**Problème P.5 :** Pour les signaux décrits analytiquement de la façon suivante, indiquer s'ils sont à énergie finie, à puissance finie ; si nécessaire, on calculera leur énergie et leur puissance moyenne temporelle.

1.  $x(t) = \begin{cases} t & \text{pour } 0 \leq t \leq 1 \\ 2 - t & \text{pour } 1 \leq t \leq 2 \\ 0 & \text{partout ailleurs} \end{cases}$
2.  $x[n] = \begin{cases} n & \text{pour } 0 \leq n \leq 5 \\ 10 - n & \text{pour } 5 \leq n \leq 10 \\ 0 & \text{partout ailleurs} \end{cases}$
3.  $x(t) = 5 \cos(\pi t) + \sin(5\pi t)$  pour  $-\infty < t < +\infty$
4.  $x(t) = \begin{cases} 5 \cos(\pi t) & \text{pour } -1 \leq t \leq 1 \\ 0 & \text{partout ailleurs} \end{cases}$
5.  $x[n] = \begin{cases} \sin[\pi n] & \text{pour } -4 \leq n \leq 4 \\ 0 & \text{partout ailleurs} \end{cases}$
6.  $x[n] = \begin{cases} \cos[\pi n] & \text{pour } 0 \leq n \\ 0 & \text{partout ailleurs} \end{cases}$

**Réponses :**

1. Signal à énergie finie : énergie =  $\frac{2}{3}$ .
2. Signal à énergie finie : énergie = 85.
3. Signal à puissance finie : puissance = 13.
4. Signal à énergie finie : énergie = 25.
5. Signal nul.
6. Signal à puissance finie : puissance =  $\frac{1}{2}$ .

## 1.2 Signaux élémentaires

Plusieurs signaux jouent un rôle prépondérant dans l'étude des signaux et des systèmes ; les signaux exponentiels et sinusoïdaux, la fonction échelon, l'impulsion de Dirac et la fonction rampe servent de briques élémentaires pour construire des signaux plus complexes. Il est aussi important de les étudier pour eux-mêmes, car ils servent de modèles à des signaux physiques prenant naissance dans la nature. C'est pourquoi nous allons décrire ces signaux élémentaires, les uns après les autres.

### 1.2.1 Signaux exponentiels

Un signal exponentiel réel, sous la forme générale, peut s'écrire (1-23).

$$x(t) = Be^{at} \quad (1-23)$$

$B$  et  $a$  sont des paramètres réels.

$B$  est appelé amplitude, mesuré en  $t = 0$  :  $x(0) = B$ .

Lorsque  $a$  est positif ou négatif, deux comportements différents peuvent être identifiés (1.24).

$$a < 0 \text{ exponentielle décroissante} \quad (1-24)$$

$$a > 0 \text{ exponentielle croissante}$$

Ces deux formes de signaux sont représentées sur les figures 1.7 et 1.8 : la figure 1.7 correspond à :  $x(t) = 5 \exp(-6t)$ , soit  $a = -6$  et  $B = 5$  ; la figure 1.8 correspond à :  $x(t) = \exp(5t)$ , soit  $a = 5$  et  $B = 1$ .

Pour le cas limite  $a = 0$ , le signal  $x(t)$  se réduit à une constante de valeur  $B$ .

Afin d'illustrer physiquement le signal exponentiel, considérons le condensateur à pertes, représenté sur la figure 1.9 : ce condensateur a une capacité  $C$ , les pertes sont représentées par une résistance  $R$  connectée en parallèle. Ce condensateur est chargé en le branchant aux bornes d'un accumulateur : le débranchement est effectué au temps  $t = 0$ . Soit  $E_0$  la valeur initiale de la tension à ses bornes.

A partir des équations de Kirchhoff et des relations constitutives de  $R$  et de  $C$ , il est facile de montrer que l'évolution de la tension  $v(t)$  pour  $t \geq 0$ , aux bornes du condensateur est régie par l'équation différentielle (1-25).

$$RC \frac{dv(t)}{dt} + v(t) = 0 \quad (1-25)$$

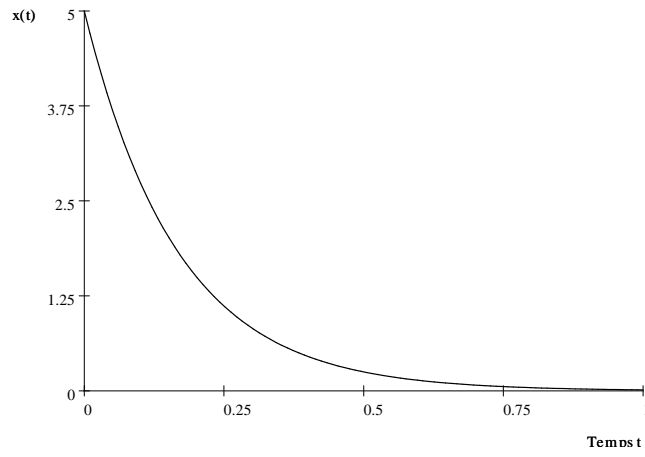


FIG. 1.7 – Signal exponentiel décroissant

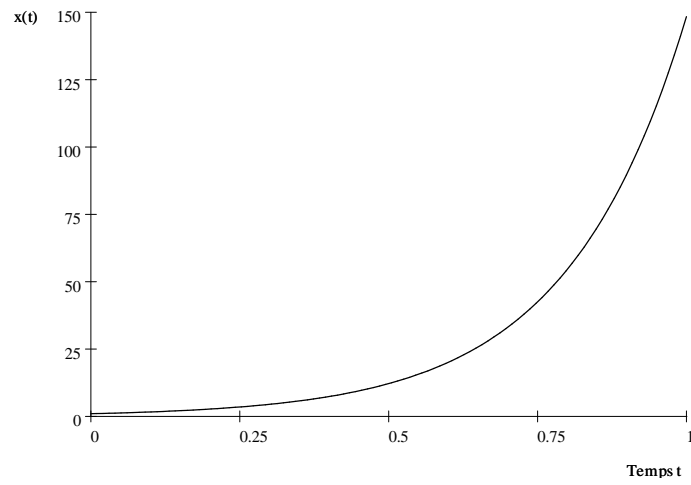


FIG. 1.8 – Signal exponentiel croissant

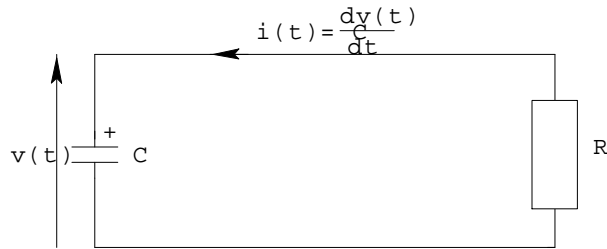


FIG. 1.9 – Condensateur avec pertes initialement chargé

La solution de cette équation différentielle d'ordre 1, ayant comme condition initiale  $E_0$  est (1-26).

$$v(t) = E_0 e^{-t/(RC)} \quad (1-26)$$

Le produit  $RC$  joue le rôle de constante de temps. La tension  $v(t)$  décroît exponentiellement avec le temps à une vitesse qui dépend de la constante de temps  $RC$ . Plus grande est la valeur de  $R$  (donc moins le condensateur a de pertes) et plus lente est la décroissance. Le condensateur garde plus ou moins sa charge.

**Pour les signaux à variation temporelle discrète, l'équivalent du signal exponentiel réel a pour expression (1-27).**

$$x[n] = Br^n \quad (1-27)$$

En définissant  $r = e^\alpha$ , on met facilement en évidence la nature exponentielle de ce signal. Suivant les valeurs de  $r$ , on peut encore mettre en évidence deux comportements différents :

$0 < r < 1$  le signal exponentiel à variation temporelle discrète est décroissant.

$r > 1$  le signal exponentiel à variation temporelle discrète est croissant.

Ces comportements sont représentés sur les figures 1.10 et 1.11.

**Remarque :** Si la valeur de  $r$  est négative, les signaux  $x[n]$  prennent alternativement des valeurs positives puis négatives suivant la parité de  $n$ .

Les signaux exponentiels que nous venons de définir, tant en variation temporelle continue que discrète, prennent des valeurs réelles. Il est possible que les signaux exponentiels prennent des valeurs complexes. La généralisation est facile. Pour les signaux à variation temporelle continue, les paramètres  $B$  et  $a$  peuvent prendre des valeurs complexes.

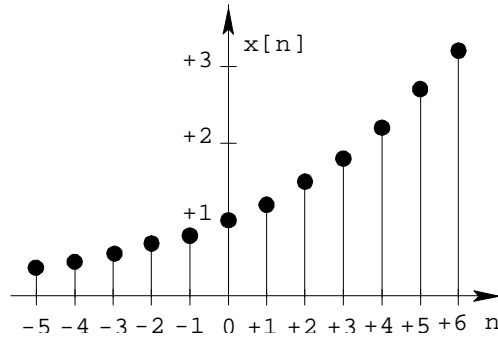


FIG. 1.10 – Exponentielle croissante à variation temporelle discrète

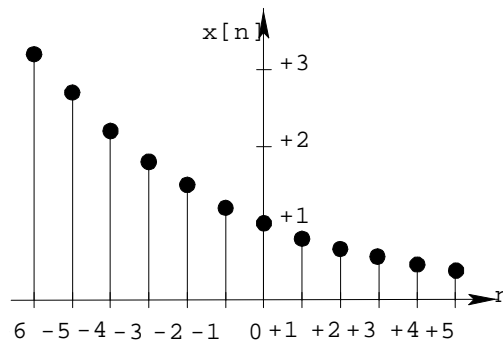


FIG. 1.11 – Exponentielle décroissante à variation temporelle discrète

Pour les signaux à variation temporelle discrète,  $B$  et  $r$  peuvent prendre des valeurs complexes.

Les deux formes communément rencontrées de signaux exponentiels complexes sont :  $e^{j\omega t}$ ,  $e^{j\Omega n}$  ou  $e^{pt}$  avec  $p = \sigma + j\omega$ .

## 1.2.2 Signaux sinusoïdaux

La forme générale d'un signal sinusoïdal à variation temporelle continue est (1-28).

$$x(t) = A \cos(\omega t + \varphi) \quad (1-28)$$

$A$  est l'amplitude,  $\omega$  est la pulsation en radians par seconde et  $\varphi$  est la phase à l'origine temporelle exprimée en radians.

La figure 1.12 représente la forme d'onde du signal sinusoïdal pour  $A = 4$  et  $\varphi = \frac{\pi}{6}$ . Un signal sinusoïdal est un exemple de signal périodique, la période de ce signal est  $T = \frac{2\pi}{\omega}$ .

Vérifions que  $T$  est la période de ce signal sinusoïdal en appliquant la définition (1-8).

$$\begin{aligned} x(t + T) &= A \cos(\omega(t + T) + \varphi) = A \cos(\omega t + \omega T + \varphi) \quad (1-29) \\ &= A \cos(\omega t + 2\pi + \varphi) = A \cos(\omega t + \varphi) = x(t) \end{aligned}$$

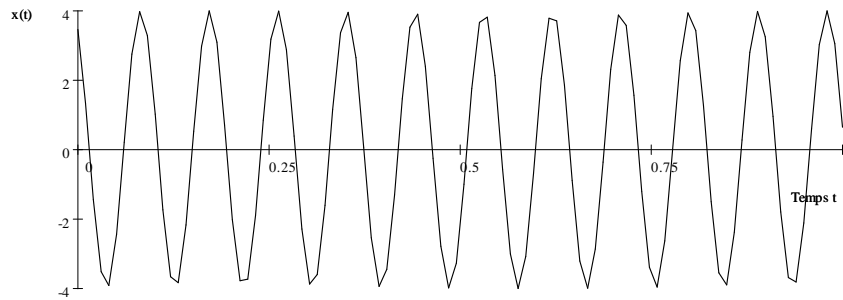


FIG. 1.12 –  $4 \cos(70t + \frac{\pi}{6})$

Pour illustrer la génération physique d'un signal sinusoïdal, considérons le schéma représenté sur la figure 1.14. Une bobine  $L$  et un condensateur  $C$  sont connectés en parallèle. Les deux composants sont considérés comme idéaux :

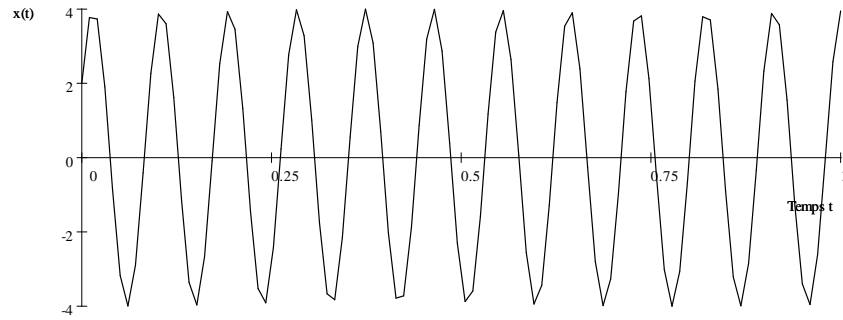


FIG. 1.13 –  $4 \sin \left( 70t + \frac{\pi}{6} \right)$

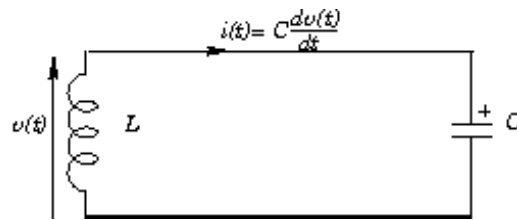


FIG. 1.14 – Circuit LC parallèle



aucun n'a des pertes. On s'est arrangé pour que la tension aux bornes du condensateur à l'instant  $t = 0$  ait pour valeur  $E_0$ .

Ecrivant les relations constitutives des composants (bobine, condensateur) et les relations de Kirchhoff, il est aisé de montrer que le comportement de ce circuit pour  $t \geq 0$  satisfait à l'équation différentielle (1-30).

$$LC \frac{d^2 v(t)}{dt^2} + v(t) = 0 \quad v(0) = E_0 \quad (1-30)$$

La solution de cette équation différentielle d'ordre deux avec condition initiale est (1-31).

$$v(t) = E_0 \cos(\omega_0 t) \quad t \geq 0 \text{ avec } \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} \quad (1-31)$$

$\omega_0$  est appelée pulsation de résonance de ce circuit.

$v(t)$  peut être interprété comme définissant un signal sinusoïdal à variation temporelle continue, d'amplitude  $A = E_0$  de pulsation  $\omega = \omega_0$  et de phase à l'origine des temps nulle.

Considérant maintenant un **signal sinusoïdal à variation temporelle discrète**. Il est défini par la relation (1-32).

$$x[n] = A \cos(\Omega n + \varphi) \quad (1-32)$$

Il n'est pas sur que le signal défini précédemment soit périodique. Pour être périodique, de période fondamentale  $N$ , il devrait satisfaire à la relation (1-33).

$$x[n + N] = A \cos(\Omega n + \Omega N + \varphi) \quad (1-33)$$

Cette relation sera satisfaite si et seulement si la condition (1-34) est vérifiée.

$$\Omega N = 2\pi m \text{ radians} \quad (1-34)$$

Soit la relation fondamentale (1-35).

$$\Omega = \frac{2\pi m}{N} \text{ radians/cycle; } m \text{ et } N \text{ entiers} \quad (1-35)$$

**Remarque :** *Il est important de noter que, contrairement à tous les signaux sinusoïdaux à variation temporelle continue, tous les signaux sinusoïdaux à variation temporelle discrète ne sont pas périodiques. Pour qu'ils aient la propriété de périodicité, il faut que la pulsation  $\Omega$  soit un multiple rationnel de  $2\pi$ .*

La figure 1.15 représente un signal sinusoïdal à variation temporelle discrète, périodique de période  $N = 2\pi$ , avec  $A = 1$  et  $\varphi = 0$ .

On notera aussi que puisque  $\Omega N$  représente un angle, il est mesuré en radians. De plus, puisque  $N$  est le nombre d'échantillons contenus dans une période de  $x[n]$ ,  $\Omega$  est mesuré en radians par cycle.

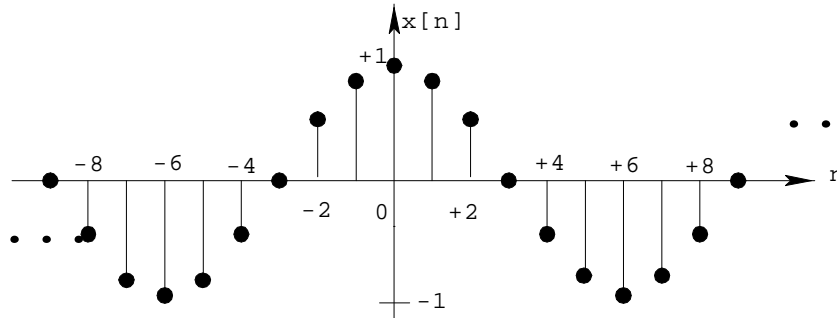


FIG. 1.15 – Signal sinusoïdal à variation temporelle discrète

**Exemple E4 :** Signaux sinusoïdaux à variation temporelle discrète. Soient deux signaux sinusoïdaux  $x_1[n]$  et  $x_2[n]$  de même fréquence angulaire définis par les relations :

$$x_1[n] = \sin[5\pi n] \text{ et } x_2[n] = \sqrt{3} \cos[5\pi n]$$

$x_1[n]$  et  $x_2[n]$  sont périodiques : déterminer leur période commune.

Exprimer le signal composite :  $y[n] = x_1[n] + x_2[n]$  sous la forme :  $y[n] = A \cos[\Omega n + \varphi]$ .

**Solution :** La fréquence angulaire des deux signaux  $x_1[n]$  et  $x_2[n]$  est :

$$\Omega = 5\pi \text{ radians/cycle}$$

Utilisant la relation :  $\Omega N = 2\pi m$ , on obtient :

$$N = \frac{2\pi m}{\Omega} = \frac{2\pi m}{5\pi} = \frac{2m}{5}$$

Il faut que  $N$  soit un entier. Les solutions sont donc :  $m = 5, m = 10, 15$ . Les valeurs correspondantes de  $N$  sont donc :  $N = 2, 4, 6 \dots$

Utilisant l'identité trigonométrique :

$$A \cos [\Omega n + \varphi] = A \cos [\Omega n] \cos \varphi - A \sin [\Omega n] \sin \varphi$$

et imposant  $\Omega = 5\pi$ , on s'aperçoit que le membre de droite de l'identité précédente est de la forme :  $x_1 [n] + x_2 [n]$ .

Il suffit d'imposer :  $A \sin \varphi = -1$  et  $A \cos \varphi = \sqrt{3}$ .

$$\begin{aligned} \Rightarrow \tan \varphi &= \frac{\sin \varphi}{\cos \varphi} = \frac{\text{amplitude de } x_1 [n]}{\text{amplitude de } x_2 [n]} = \frac{-1}{\sqrt{3}} \\ \Rightarrow \varphi &= -\frac{\pi}{3} \text{ radians} \end{aligned}$$

Soit  $A \sin \varphi = -1$ , qui permet de déterminer l'amplitude  $A$ .

$$\Rightarrow A = 2$$

$y [n]$  peut donc s'exprimer sous la forme :  $y [n] = 2 \cos [5\pi n - \frac{\pi}{3}]$ .

**Problème P.6 :** Déterminer la période fondamentale du signal sinusoïdal suivant :

$$x [n] = 10 \cos \left[ \frac{4\pi}{31}n + \frac{\pi}{5} \right]$$

**Réponse :**  $N = 31$  échantillons.

**Problème P.7 :** Considérons les signaux sinusoïdaux suivants :

1.  $x [n] = 5 \sin [2n]$ .
2.  $x [n] = 5 \cos [0.2\pi n]$ .
3.  $x [n] = 5 \cos [6\pi n]$ .
4.  $x [n] = 5 \sin [6\pi n/35]$ .

Déterminer si ces signaux  $x [n]$  sont périodiques. Si oui, indiquer leur période fondamentale.

**Réponse :**

1. Non périodique.
2. Périodique de période fondamentale 10.
3. Périodique de période fondamentale 1.
4. Périodique de période fondamentale 35.

**Problème P.8 :** Trouver les fréquences angulaires les plus petites  $\Omega$ , pour lesquelles les signaux sinusoïdaux à variation temporelle discrète, sont périodiques et de période fondamentale :

1.  $N = 8$ .
2.  $N = 32$ .
3.  $N = 64$ .
4.  $N = 128$ .

**Réponse :**

1.  $\Omega = \pi/4$ .
2.  $\Omega = \pi/16$ .
3.  $\Omega = \pi/32$ .
4.  $\Omega = \pi/64$ .

### 1.2.3 Relation entre signaux sinusoïdaux et exponentielle complexe

Considérons l'exponentielle complexe  $e^{j\theta}$ . Rappelons l'identité d'Euler (1-37).

$$e^{j\theta} = \cos \theta + j \sin \theta; \quad \cos \theta = \Re \{ e^{j\theta} \} \quad (1-37)$$

Tout signal sinusoïdal à variation temporelle continue peut donc s'exprimer comme la partie réelle d'un signal exponentiel complexe  $Be^{j\omega t}$  avec  $B = Ae^{j\varphi}$ .

Soit (1-38).

$$A \cos(\omega t + \varphi) = \Re \{ Be^{j\varphi} \} \quad (1-38)$$

$\Re \{ \cdot \}$  signifie la partie réelle de la quantité complexe à l'intérieur des parenthèses. On peut démontrer facilement (1-39).

$$Be^{j\omega t} = Ae^{j\varphi} e^{j\omega t} = Ae^{j(\omega t + \varphi)} = A [\cos(\omega t + \varphi) + j \sin(\omega t + \varphi)] \quad (1-39)$$

Le signal sinusoïdal est défini en termes de la fonction cosinus. Bien évidemment, on peut aussi définir le signal sinusoïdal en termes de la fonction sinus par (1-40).

$$x(t) = A \sin(\omega t + \varphi) \quad (1-40)$$

C'est la partie imaginaire du signal exponentiel complexe  $Be^{j\omega t}$ , c'est à dire que l'on peut écrire (1-41).

$$A \sin(\omega t + \varphi) = \Im \{ Be^{j\omega t} \} \quad (1-41)$$

où :  $B = Ae^{j\omega t}$  et  $\Im m \{ . \}$  signifie la partie imaginaire de la quantité complexe à l'intérieur des parenthèses.

La différence entre un cosinus et un sinus est un déphasage de  $90^\circ$  : c'est à dire que le signal sinusoïdal  $A \cos(\omega t + \varphi)$  est en retard par rapport au signal sinusoïdal  $A \sin(\omega t + \varphi)$ . C'est ce qui est représenté sur les figures 1.12 et 1.13 dans le cas où  $\varphi = \pi/6$ .

De façon semblable, **pour les signaux à variation temporelle discrète**, on peut écrire (1-42).

$$\begin{aligned} A \cos(\Omega n + \varphi) &= \Re e \{ B e^{j\Omega n} \} \\ A \sin(\Omega n + \varphi) &= \Im m \{ B e^{j\Omega n} \} \end{aligned} \quad (1-42)$$

Avec  $B = Ae^{j\varphi}$ .

La figure 1.16 montre une représentation bi-dimensionnelle de l'exponentielle complexe  $e^{j\Omega n}$  pour  $\Omega = \pi/4$  et  $n = 0, 1, \dots, 7$ . La projection de chaque valeur sur l'axe réel est  $\cos[\Omega n]$ , tandis que la projection sur l'axe imaginaire est :  $\sin[\Omega n]$ .

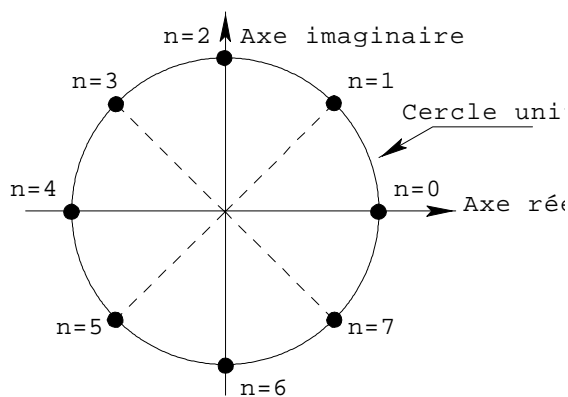


FIG. 1.16 – Plan complexe et huit points uniformément répartis

## 1.2.4 Signaux sinusoïdaux amortis exponentiellement

La multiplication d'un signal sinusoïdal par une exponentielle réelle décroissante conduit à un nouveau signal que l'on appelle signal sinusoïdal exponentiellement amorti.

Plus spécifiquement, si on multiplie le signal sinusoïdal à variation temporelle continue  $A \sin(\omega t + \varphi)$  par l'exponentielle décroissante :  $e^{-\alpha t}$ , on obtient le signal sinusoïdal exponentiellement amorti (1-43).

$$x(t) = Ae^{-\alpha t} \sin(\omega t + \varphi) \quad \alpha > 0 \quad (1-43)$$

Ce signal est représenté sur la figure 1.17, pour  $A = 60$ ,  $\alpha = 6$ ,  $\omega = 70$  et  $\varphi = 0$ . Lorsque le temps augmente, l'amplitude des oscillations sinusoïdales décroît de manière exponentielle et tend vers zéro quand  $t$  tend vers l'infini.

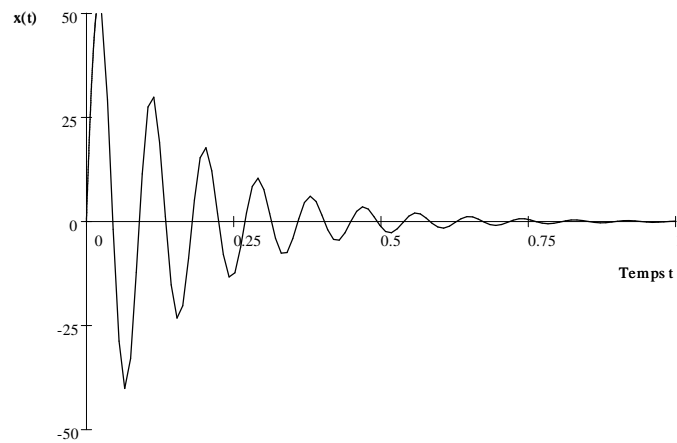


FIG. 1.17 –  $60 \sin(70t) \exp(-6t)$

Pour illustrer la génération d'un signal sinusoïdal exponentiellement amorti, considérons le circuit parallèle représenté sur la figure 1.18. Un condensateur de capacité  $C$  et une bobine d'inductance  $L$  sont branchés en parallèle avec une résistance  $R$ .

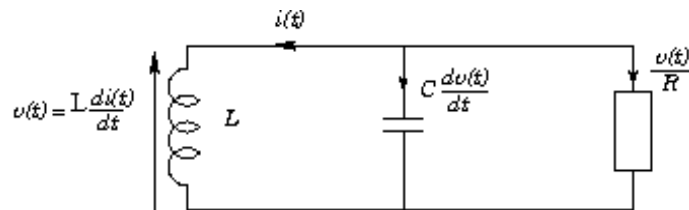


FIG. 1.18 – Circuit RLC parallèle

Supposons qu'à l'instant  $t = 0$ , le condensateur est initialement chargé sous une tension  $E_0$ .

Utilisant les relations de Kirchhoff et les relations constitutives des éléments, on obtient facilement l'équation intégral-différentielle (1-44).

$$C \frac{dv(t)}{dt} + \frac{1}{R}v(t) + \frac{1}{L} \int_{-\infty}^t v(\tau) d\tau = 0 \quad (1-44)$$

$v(t)$  est la tension aux bornes du condensateur pour  $t \geq 0$ .

La solution de cette équation intégral-différentielle avec la condition initiale  $v(0) = E_0$  a la forme (1-45).

$$v(t) = E_0 e^{-t/(2RC)} \cos(\omega_0 t) \quad t \geq 0 \quad (1-45)$$

avec :  $\omega_0 = \sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{1}{4C^2R^2}}$

Pour que  $\omega_0$  soit réel, on a supposé  $R > \sqrt{L/(4C)}$ .  $v(t)$  a donc la forme générique  $Ae^{-\alpha t} \sin(\omega t + \varphi)$  en posant :  $A = E_0$ ,  $\alpha = 1/(2RC)$ ,  $\omega = \omega_0$ ,  $\varphi = \pi/2$ .

Pour générer des signaux exponentiels, des signaux sinusoïdaux et des signaux sinusoïdaux exponentiellement amortis, on a pris comme exemple des circuits électriques. Leur modélisation a permis d'obtenir des équations différentielles. Ces équations différentielles peuvent se résoudre à l'aide de plusieurs méthodes : dans le domaine temporel, dans le plan de Laplace.

Décrivons maintenant la version variation temporelle discrète du signal sinusoïdal exponentiellement amorti. Soit (1-46).

$$x[n] = Br^n \sin[\Omega n + \varphi] \quad (1-46)$$

Pour que ce signal ait une décroissance exponentielle avec le temps, le paramètre  $r$  doit satisfaire la relation  $0 < |r| < 1$ .

**Problème P.9 :** Dans le circuit RLC, nous avons supposé que :  $R > \sqrt{L/(4C)}$ . Que se passe-t-il pour la forme d'onde de  $v(t)$  si cette condition n'est pas satisfaite ?

**Réponse :** Si  $R < \sqrt{L/(4C)}$ , le signal  $v(t)$  est la somme de deux exponentielles décroissantes avec deux constantes de temps différentes :

$$2RC / \left(1 + \sqrt{1 - 4R^2C/L}\right) \quad \text{et} \quad 2RC / \left(1 - \sqrt{1 - 4R^2C/L}\right)$$

**Problème P.10 :** Considérons le signal exponentiel à valeurs complexes :

$$x(t) = Ae^{\alpha t + j\omega t} \quad \alpha > 0$$

Evaluer les composantes réelle et imaginaire de  $x(t)$  pour les cas suivants :

1.  $\alpha$  réel.
2.  $\alpha$  imaginaire.
3.  $\alpha$  complexe.

**Réponse :**

1.  $\Re\{x(t)\} = Ae^{\alpha_1 t} \cos(\omega t)$ ;  $\Im\{x(t)\} = Ae^{\alpha_1 t} \sin(\omega t)$ .
2.  $\Re\{x(t)\} = A \cos(\omega_1 t + \omega t)$ ;  $\Im\{x(t)\} = A \sin(\omega_1 t + \omega t)$ .
3.  $\Re\{x(t)\} = Ae^{\alpha_1 t} \cos(\omega_1 t + \omega t)$ ;  $\Im\{x(t)\} = Ae^{\alpha_1 t} \sin(\omega_1 t + \omega t)$ .

**Problème P.11 :** Considérons le couple suivant de signaux sinusoïdaux amortis exponentiellement :

$$\begin{aligned} x_1(t) &= Ae^{\alpha t} \cos(\omega t) \quad t \geq 0 \\ x_2(t) &= Ae^{\alpha t} \sin(\omega t) \quad t \geq 0 \end{aligned}$$

$A$ ,  $\alpha$  et  $\omega$  sont tous des nombres réels; le facteur d'amortissement  $\alpha$  est négatif.

La fréquence d'oscillation  $\omega$  est positive.

- Obtenir le signal à valeur complexe  $x(t)$  dont la partie réelle est  $x_1(t)$  et dont la partie imaginaire est  $x_2(t)$  ?

- La formule :  $a(t) = \sqrt{x_1^2(t) + x_2^2(t)}$  définit l'enveloppe complexe du signal  $x(t)$ . Déterminer  $a(t)$  pour le signal défini précédemment.

- Cette enveloppe  $a(t)$  varie-t-elle en fonction du temps ?

**Réponse :**

-  $x(t) = Ae^{pt} \quad t \geq 0$  avec :  $p = \alpha + j\omega$ .

-  $a(t) = |A| e^{\alpha t}$ ,  $t \geq 0$ .

- Pour  $t = 0$ ,  $a(0) = |A|$  et ensuite  $a(t)$  décroît exponentiellement lorsque le temps augmente; lorsque  $t$  tend vers l'infini,  $a(t)$  tend vers zéro.



### 1.2.5 Fonction échelon unité de Heaviside

La version à **variation temporelle discrète de la fonction échelon-unité** est définie par (1-47).

$$u[n] = \begin{cases} 1 & n \geq 0 \\ 0 & n < 0 \end{cases} \quad (1-47)$$

Elle est représentée sur la figure 1.19.

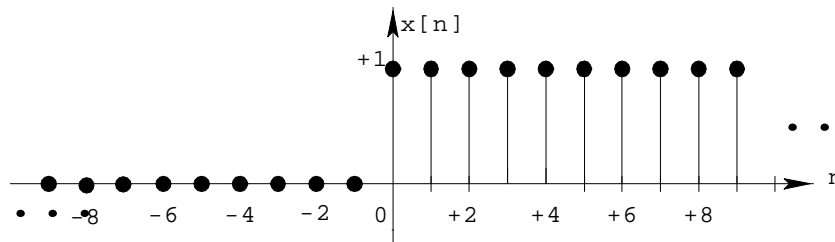


FIG. 1.19 – Echelon unité à variation temporelle discrète

La version à **variation temporelle continue de la fonction échelon-unité** est définie par (1-48).

$$u(t) = \begin{cases} 1 & t > 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases} \quad (1-48)$$

Elle est représentée sur la figure 1.20. La valeur de  $u(t)$  change instantanément pour  $t = 0$  en passant de la valeur 0 à la valeur 1. Il existe donc une discontinuité en  $t = 0$ ; c'est pour cette raison que nous n'avons pas mis les signes  $\geq$  et  $\leq$  dans l'équation de définition.

Dans la définition que nous avons choisi  $u(0)$  est indéterminé : d'autres définitions choisissent  $u(0) = 1/2$ .

La fonction échelon unité  $u(t)$  est un signal particulièrement simple à utiliser ; elle permet de modéliser l'activation d'une source en  $t = 0$ , par exemple, en fermant un interrupteur.

Comme signal test, la fonction échelon unité est très utile : on peut tirer beaucoup d'informations sur un système, en analysant sa sortie, lorsque son entrée est un échelon unité. On peut en déduire si le système répond vite ou non à un changement brusque intervenant dans le signal d'entrée. Des

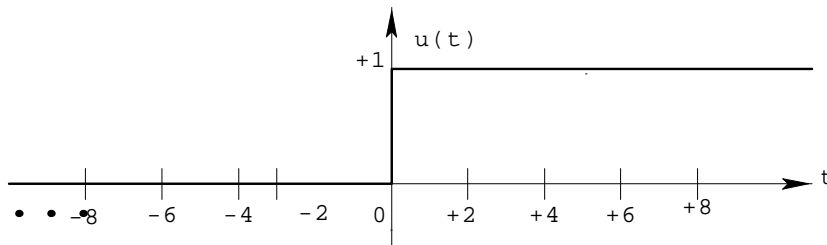


FIG. 1.20 – Echelon unité à variation temporelle continue

remarques semblables s'appliquent à  $u[n]$  dans le contexte des systèmes à variations temporelles discrètes.

**Exemple E5 Impulsion rectangulaire :** *Considérons l'impulsion rectangulaire  $x(t)$  représentée sur la figure 1.21. Son amplitude est  $A$ , elle dure 1 seconde. Exprimons  $x(t)$  à l'aide de fonctions échelon unité.*

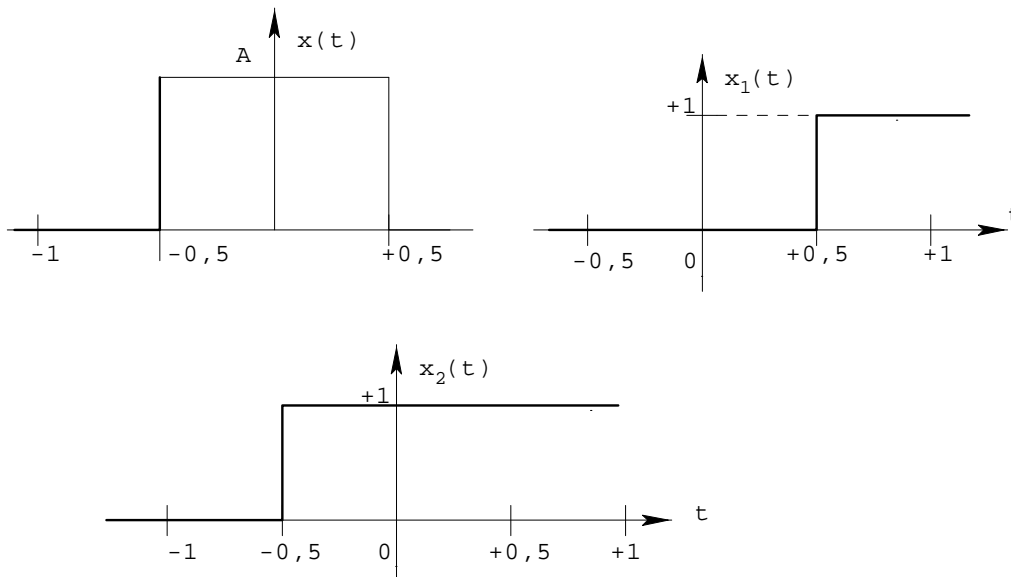


FIG. 1.21 – Impulsion rectangulaire, fonction échelon décalée vers la droite et fonction échelon décalée vers la gauche

$x(t)$  peut être écrite sous la forme mathématique suivante :

$$x(t) = \begin{cases} A & 0 \leq |t| < 0.5 \\ 0 & |t| > 0.5 \end{cases}$$

$|t|$  note la valeur absolue du temps  $t$ .

L'impulsion rectangulaire  $x(t)$  peut être représentée comme la différence de deux échelons unité décalés,  $x_1(t)$  et  $x_2(t)$ . Ceux-ci sont définis sur la figure 1.21. Prenant ces figures pour base, on peut écrire :

$$x(t) = Au(t + 0.5) - Au(t - 0.5)$$

$u(t)$  est l'échelon unité de Heaviside.

**Exemple E6 Circuit RC :** Considérons le circuit RC simple représenté sur la figure 1.22. Le condensateur  $C$  est supposé initialement déchargé. En  $t = 0$ , l'interrupteur connecte la source continue de tension de valeur  $E_0$  au circuit RC. Trouver la tension  $v(t)$  aux bornes du condensateur pour  $t \geq 0$ .

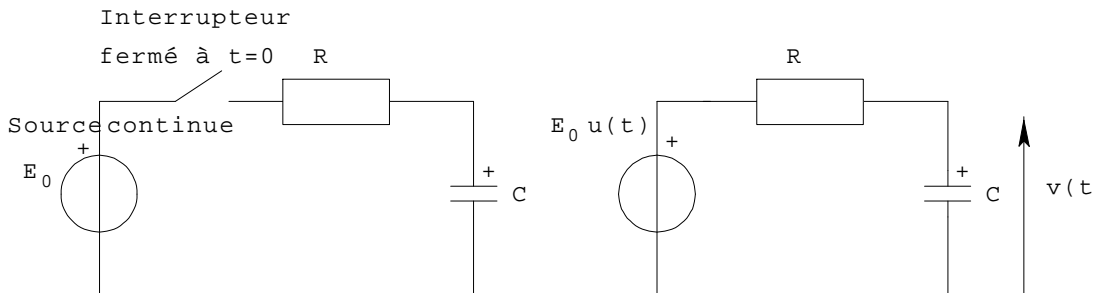


FIG. 1.22 – Circuit RC avec interrupteur et son circuit équivalent.

**Solution :** L'opération "interrupteur" est représentée par la fonction échelon  $E_0 u(t)$  ; ceci est représenté sur la figure 1.22.

La tension aux bornes du condensateur ne peut pas changer brusquement. Comme il est initialement déchargé, on a comme condition initiale  $v(0) = 0$ .

Pour  $t$  très grand ( $t \rightarrow \infty$ ), le condensateur est totalement chargé  $v(\infty) = E_0$ .

Sachant que la tension aux bornes du condensateur augmente exponentiellement avec une constante de temps  $RC$ , on peut directement écrire pour  $v(t)$  :

$$v(t) = E_0 (1 - e^{-t/(RC)}) u(t)$$

**Problème P.12 :** Pour le signal à variation temporelle discrète défini par :

$$x[n] = \begin{cases} 1 & \text{pour } 0 \leq n \leq 9 \\ 0 & \text{partout ailleurs} \end{cases}$$

Ecrire  $x[n]$  comme la superposition de deux fonctions échelon.

**Réponse :**  $x[n] = u[n] - u[n - 10]$ .

### 1.2.6 Impulsion de Dirac

La version à variation temporelle discrète de l'impulsion unité est définie par (1-49).

$$\delta[n] = \begin{cases} 1 & \text{pour } n = 0 \\ 0 & \text{pour } n \neq 0 \end{cases} \quad (1-49)$$

Elle est représentée sur la figure 1.23.

La version à variation temporelle continue de l'impulsion unité est définie par la paire de relations suivantes.

$$\begin{aligned} \delta(t) &= 0 & \text{pour } t \neq 0 \\ \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t) dt &= 1 \end{aligned} \quad (1-50)$$

La relation précédente montre que l'impulsion  $\delta(t)$  est nulle partout excepté à l'origine. De plus, l'aire sous la courbe de l'impulsion unité a pour valeur l'unité. Cette impulsion  $\delta(t)$  est souvent appelée delta de Dirac.

Pour la variation temporelle discrète, la description graphique de  $\delta[n]$  est simple comme nous l'avons vu sur la figure 1.23.

Pour une variation temporelle continue, la visualisation de l'impulsion unité  $\delta(t)$  demande beaucoup plus d'attention (pour les mathématiciens, elle est même impossible).

Un moyen de visualiser  $\delta(t)$  est de l'interpréter comme cas limite d'une impulsion rectangulaire de surface unité. Ceci est représenté sur la figure 1.24a) : on s'arrange pour que le produit : durée de l'impulsion x amplitude de l'impulsion reste constant, égal à l'unité.

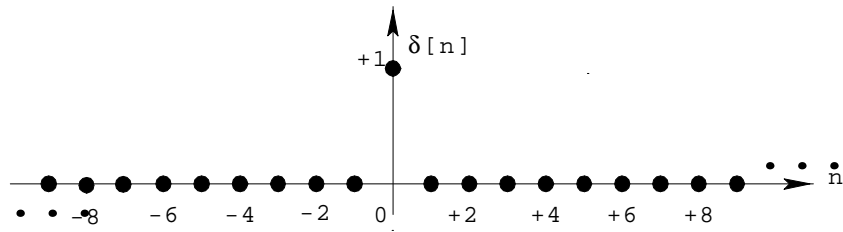


FIG. 1.23 – Impulsion unité à variation temporelle discrète

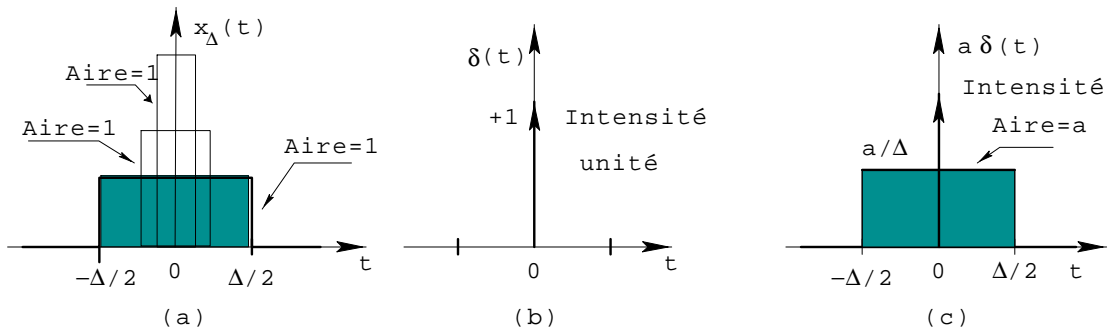


FIG. 1.24 – a) Evolution d'une impulsion; b) Impulsion de Dirac; c) Impulsion d'intensité a.

Plus la durée est petite, mieux est approximée l'impulsion unité. Sans aucune rigueur mathématique (mais avec la bonne conscience que ça marche en physique), on peut écrire (1-51).

$$\delta(t) = \lim_{\Delta \rightarrow 0} x_{\Delta}(t) \quad (1-51)$$

$x_{\Delta}(t)$  est une impulsion rectangulaire quelconque, fonction paire du temps de durée  $\Delta$  et d'aire unité. L'aire sous la courbe définit l'intensité de l'impulsion. En fait, lorsque l'on parle de l'impulsion unité  $\delta(t)$ , on parle de la valeur de son intensité. Le symbole graphique de l'impulsion unité est représenté sur la figure 1.24b). Une impulsion d'intensité  $a$  sera écrite  $a\delta(t)$ . Une telle impulsion peut se modéliser par une impulsion rectangulaire d'aire  $a$ , ceci est représenté sur la figure 1.24c).

L'impulsion  $\delta(t)$  et la fonction échelon  $u(t)$  sont étroitement liées. Sans aucune rigueur mathématique, nous écrivons (1-52).

$$\delta(t) = \frac{du(t)}{dt} \quad (1-52)$$

Inversement la fonction échelon unité  $u(t)$  est l'intégrale de l'impulsion de Dirac  $\delta(t)$  par rapport au temps (1-53).

$$u(t) = \int_{-\infty}^t \delta(\tau) d\tau \quad (1-53)$$

**Exemple E7 :** *Circuit RC continue.*

Considérons le circuit simple représenté sur la figure 1.25. Le condensateur est initialement déchargé, l'interrupteur le connectant à la source de tension  $E_0$  est soudainement fermé à l'instant  $t = 0$  (ce circuit est le même que le circuit précédemment étudié, sauf que nous avons une résistance nulle). Déterminons le courant  $i(t)$  qui parcourt le condensateur après que l'interrupteur ait été fermé.

**Solution :** L'opération "interrupteur" est équivalente à connecter la source de tension  $E_0 u(t)$  au condensateur. Ceci est représenté sur la figure 1.25. La tension aux bornes du condensateur vaut donc :  $v(t) = E_0 u(t)$ .

Le courant traversant le condensateur est donné par la relation :

$$i(t) = C \frac{dv(t)}{dt}$$

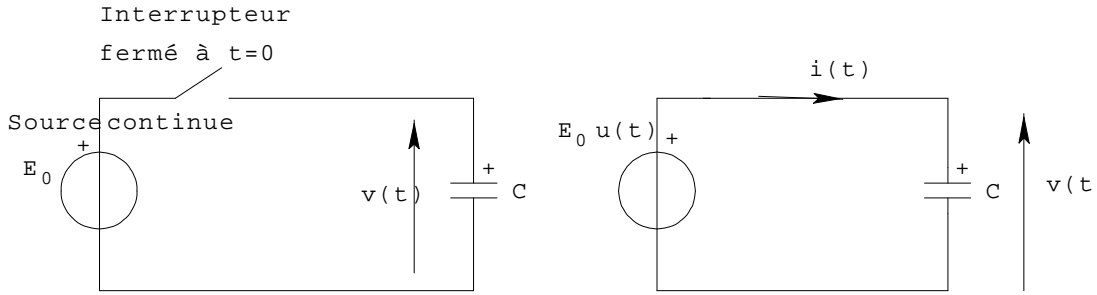


FIG. 1.25 – Interrupteur fermé en  $t = 0$  et son circuit équivalent

Ainsi donc, pour le problème qui nous intéresse, on peut écrire :

$$i(t) = CE_0 \frac{du(t)}{dt} = CE_0 \delta(t)$$

Le courant qui s'écoule à travers le condensateur  $C$  est donc une impulsion de Dirac d'intensité  $CE_0$ .

### Quelques propriétés de l'impulsion de Dirac.

A partir de l'équation de définition, on peut immédiatement déduire que  $\delta(t)$  est une fonction paire du temps (1-54).

$$\delta(-t) = \delta(t) \quad (1-54)$$

Cependant pour que  $\delta(t)$  ait une signification mathématique, elle doit apparaître comme facteur multiplicatif dans l'intégrand d'une intégrale temporelle et ceci, à proprement parler, seulement lorsque l'autre facteur de l'intégrand est une fonction continue du temps, à l'instant auquel se produit l'impulsion. Soit  $x(t)$  une telle fonction, et considérons le produit de  $x(t)$  par l'impulsion de Dirac, décalée temporellement  $\delta(t - t_0)$ . L'intégrale de ce produit jouit de la propriété (1-55).

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x(t) \delta(t - t_0) dt = x(t_0) \quad (1-55)$$

On supposera que  $x(t)$  est continue en  $t = t_0$ , instant auquel se produit l'impulsion.

L'opération du membre de gauche tamise  $x(t)$  pour en extraire  $x(t_0)$ . On parle souvent de la propriété de tamisage de l'impulsion de Dirac. A contrario, dans beaucoup d'ouvrages cette propriété est utilisée comme définition de l'impulsion de Dirac.

Une autre propriété utile de l'impulsion unité  $\delta(t)$  est la propriété de mise à l'échelle temporelle, qui s'exprime par la relation 1-56.

$$\delta(at) = \frac{1}{a}\delta(t) \quad a > 0 \quad (1-56)$$

Pour démontrer cette relation, on remplace  $t$  par  $at$  et on écrit 1-57.

$$\delta(at) = \lim_{\Delta \rightarrow 0} x_{\Delta}(at) \quad (1-57)$$

Pour représenter la fonction  $x_{\Delta}(t)$ , on utilise l'impulsion rectangulaire de la figure 1.26a) qui a une durée  $\Delta$ , une amplitude  $1/\Delta$  et donc une surface unité. En conséquence, la fonction mise à l'échelle temporelle  $x_{\Delta}(at)$  est représentée sur la figure 1.26b) pour  $a > 1$ . L'amplitude de  $x_{\Delta}(at)$  reste inchangée par l'opération de mise à l'échelle temporelle : il est alors évident que pour conserver l'aire sous la courbe égale à l'unité,  $x_{\Delta}(at)$  doit être multiplié par le facteur  $a$ , c'est ce qui est représenté sur la figure 1.26c). La fonction temporelle est ainsi notée :  $ax_{\Delta}(at)$ . Il s'en suit donc 1-58, et la propriété précédente est démontrée.

$$\lim_{\Delta \rightarrow 0} ax_{\Delta}(at) = \frac{1}{a}\delta(t) \quad (1-58)$$

Maintenant que nous avons défini l'impulsion unité et que nous avons décrit ses propriétés, reste encore à dire quel est l'intérêt pratique de cette impulsion unité ?

On ne peut pas générer une fonction impulsion physique, car cela correspondrait à un signal d'amplitude infinie en  $t = 0$  et une amplitude nulle partout ailleurs. Cependant, l'impulsion sert de modèle mathématique en fournissant une approximation pour un signal physique de durée très courte et d'amplitude importante. Comme nous le verrons, la réponse d'un système à un tel signal permet de mieux connaître ce système.

Considérons par exemple un circuit *RLC* parallèle initialement au repos. Supposons qu'une source de courant lui soit appliqué à l'instant  $t = 0$  et que l'on puisse approximer celle-ci par une impulsion. Celle-ci est notée  $I_0\delta(t)$  sur la figure 1.27a). A l'instant  $t = 0$ , la bobine se comporte comme un circuit



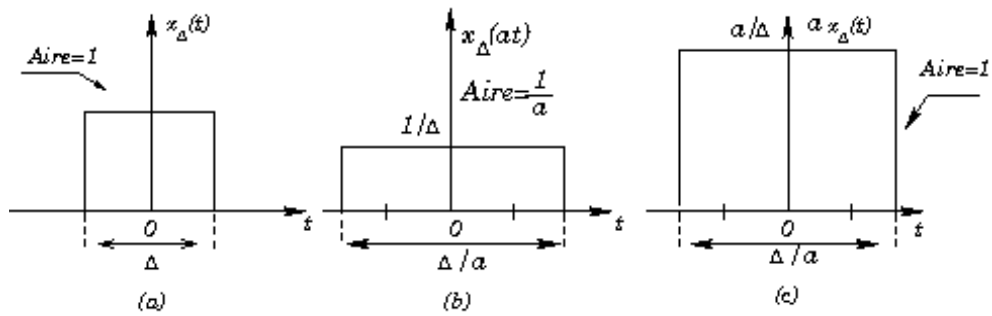


FIG. 1.26 – a) Impulsion initiale; b) Impulsion comprimée d'un facteur  $a$ ; c) Mise à l'échelle de l'impulsion comprimée afin de restaurer l'unité.

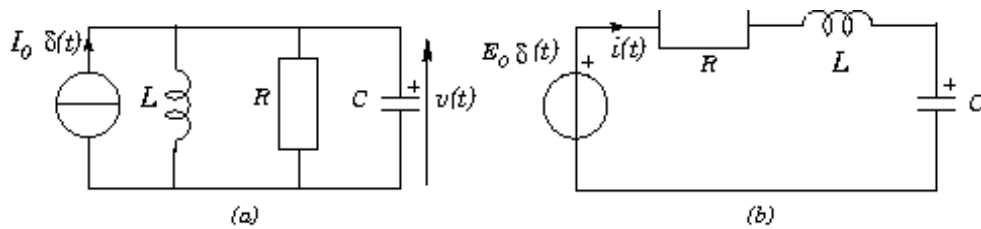


FIG. 1.27 – a) Circuit RLC parallèle alimenté par une impulsion de courant ; b) Circuit RLC série alimenté par une impulsion de tension

ouvert tandis que le condensateur se comporte comme un court-circuit. L'impulsion de courant  $I_0\delta(t)$  s'écoule donc en entier, à travers le condensateur, ce qui a pour conséquence que la tension aux bornes du condensateur passe rapidement à l'instant  $t = 0^+$  à sa nouvelle valeur.

$$E_0 = \frac{1}{C} \int_{0^-}^{0^+} I_0\delta(t) dt = \frac{I_0}{C}$$

Après l'instant  $t = 0$ , il n'y a plus de source additionnelle de signal. La tension  $v(t)$  évolue alors comme précédemment indiqué :

$$v(t) = E_0 e^{-\frac{t}{2RC}} \cos(\omega_0 t)$$

La réponse  $v(t)$  est appelée la réponse transitoire du circuit.

**Problème P.13 :** Soit le circuit RLC parallèle de la figure 1.27a) et le circuit RLC série de la figure 1.27b). C'est une paire de circuits duaux en ce sens que, il est mathématiquement identique de décrire celui de la figure 1.27a) en terme de tension  $v(t)$  et celui de la figure 1.27b), en terme de courant  $i(t)$ . Tout ce que l'on a déjà démontré pour le circuit parallèle, peut être retranscrit à l'identique pour les grandeurs correspondantes du circuit série de la figure 1.27b), en faisant l'hypothèse que celui-ci est initialement au repos.

- Trouver la valeur du courant à l'instant  $t = 0^+$ .
- Ecrire l'équation intégro-différentielle caractérisant l'évolution de  $i(t)$  pour  $t \geq 0^+$ .

**Réponse :**  $I_0 = E_0/L$  et  $L \frac{di(t)}{dt} + Ri(t) + \frac{1}{C} \int_{0^+}^t i(\tau) d\tau = 0$ .

### 1.2.7 Dérivées de l'impulsion

Dans l'analyse des systèmes, on rencontre souvent le problème de déterminer la dérivée première de l'impulsion  $\delta(t)$ , voire même des dérivées d'ordre plus élevé. Une très grande attention doit être portée à la résolution de ce problème.

On se rappellera que l'impulsion  $\delta(t)$  peut être obtenue par passage à la limite d'une impulsion rectangulaire de durée  $\Delta$  et d'amplitude  $1/\Delta$ . Sur

ces bases, on pourra interpréter la dérivée de  $\delta(t)$  comme cas limite de la dérivée première de l'impulsion rectangulaire. Dans un exemple précédent, nous avons montré que l'impulsion rectangulaire peut se décomposer sous la forme 1-59.

$$\frac{1}{\Delta}u\left(t + \frac{\Delta}{2}\right) - \frac{1}{\Delta}u\left(t - \frac{\Delta}{2}\right) \quad (1-59)$$

Nous avons montré que la dérivée de l'échelon unité était l'impulsion unité. Dérivant l'impulsion rectangulaire par rapport au temps, on obtient une paire d'impulsions :

- Une impulsion d'intensité  $1/\Delta$ , située en  $t = -\Delta/2$ .
- Une deuxième impulsion d'intensité  $-1/\Delta$ , située en  $t = \Delta/2$ .

Pour le passage à la limite, lorsque la durée  $\Delta$  tend vers zéro, deux choses apparaissent.

D'abord les deux impulsions résultant de la différentiation se rapprochent l'une de l'autre ; à la limite, elles coïncident pratiquement avec l'origine.

Ensuite, les intensités de ces deux impulsions tendent l'une vers  $+\infty$ , l'autre vers  $-\infty$ .

On peut donc conclure que la dérivée première de l'impulsion  $\delta(t)$  est formée d'une paire d'impulsions, l'une d'intensité infinie positive en  $t = 0_-$ , l'autre d'une intensité infinie négative en  $t = 0_+$ . Comme d'habitude on appelle  $0_+$  et  $0_-$ , les valeurs du temps  $t$  par passage à la limite lorsque  $t$  tend vers zéro par valeur positive et lorsque  $t$  tend vers zéro par valeur négative.

La dérivée première de l'impulsion unité est appelée "doublet" et notée :  $\delta^1(t)$ . Le doublet peut être interprété comme la sortie d'un système qui réalise la différentiation, lorsque l'entrée du système est l'impulsion unité.

Mathématiquement parlant, le doublet n'a de signification que lorsqu'il intervient comme facteur dans l'intégrand d'une intégrale par rapport au temps. De plus, l'autre facteur de l'intégrale doit être à dérivée continue à l'instant  $t$  auquel agit le doublet. Les propriétés du doublet se déduisent de sa description comme cas limite de deux impulsions et des propriétés de l'impulsion. En écrivant par exemple :

$$\delta^1(t) = \lim_{\Delta \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta} \left\{ \delta\left(t + \frac{\Delta}{2}\right) - \delta\left(t - \frac{\Delta}{2}\right) \right\}$$

On peut démontrer les propriétés fondamentales suivantes du doublet.

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta^1(t) dt = 0$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \delta^1(t - t_0) dt = \left. \frac{d}{dt} f(t) \right|_{t=t_0}$$

$f(t)$  est une fonction continue du temps à dérivée continue en  $t = t_0$ .

On peut aussi déterminer les dérivées d'ordre supérieur de l'impulsion unité en prenant les dérivées du doublet.

En particulier, la dérivée seconde de l'impulsion unité est la dérivée première du doublet, c'est à dire :

$$\begin{aligned} \frac{d^2}{dt^2} \delta(t) &= \frac{d}{dt} \delta^1(t) \\ &= \lim_{\Delta \rightarrow 0} \frac{\delta^1(t + \frac{\Delta}{2}) - \delta^1(t - \frac{\Delta}{2})}{\Delta} \end{aligned}$$

L'équation précédente peut se généraliser pour définir la dérivée d'ordre  $n$  de l'impulsion unité, que l'on notera  $\delta^n(t)$ .

**Problème P.14 :**

1. Evaluer la propriété de tamisage de  $\delta^2(t)$ .
2. Généraliser le résultat à la propriété de tamisage de la dérivée d'ordre  $n$  de l'impulsion de Dirac.

**Réponse :**

1.  $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \delta^2(t - t_0) dt = \left. \frac{d^2}{dt^2} f(t) \right|_{t=t_0}$
2.  $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \delta^n(t - t_0) dt = \left. \frac{d^n}{dt^n} f(t) \right|_{t=t_0}$

### 1.2.8 Fonction Rampe

$\delta(t)$  est la dérivée de la fonction échelon  $u(t)$ ; l'intégrale de la fonction  $u(t)$  par rapport au temps est la fonction rampe. Ce nouveau signal test est formellement défini par la relation 1-60.

$$r(t) = \begin{cases} t & \text{pout } t \geq 0 \\ 0 & \text{pout } t < 0 \end{cases} \quad (1-60)$$

On peut écrire de façon équivalente :  $r(t) = tu(t)$ .

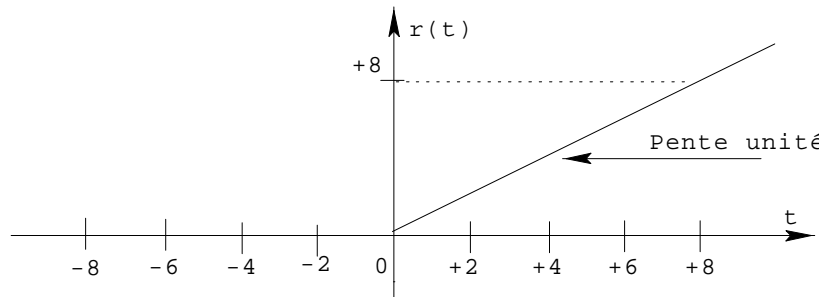


FIG. 1.28 – Fonction rampe de pente unité

La fonction rampe  $r(t)$  est représentée graphiquement sur la figure 1.28.

Comme signal test, la fonction rampe permet d'évaluer comment un système à variation temporelle continue se comporte lorsqu'on l'alimente par un signal qui croît linéairement avec le temps.

La version à variation temporelle discrète de la fonction rampe est analytiquement définie par 1-61.

$$r[n] = \begin{cases} n & \text{pour } n \geq 0 \\ 0 & \text{pour } n < 0 \end{cases} \quad (1-61)$$

ou de façon équivalente :  $r[n] = nu[n]$ .

La fonction rampe à variation temporelle discrète est représentée sur la figure 1.29.

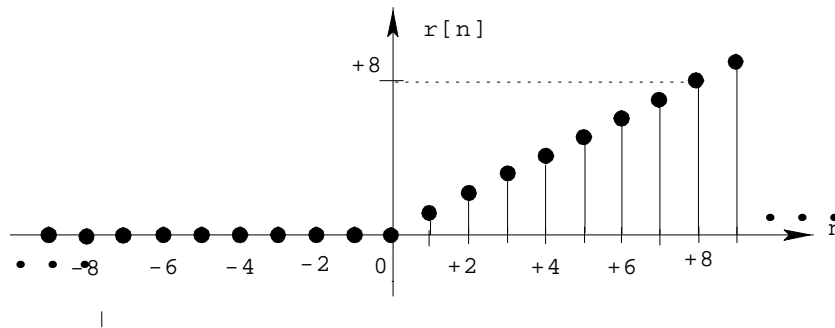


FIG. 1.29 – Fonction rampe de pente unité

**Exemple E8 :** *Circuit parallèle.*

Soit le circuit parallèle représenté sur la figure 1.30. Il comprend une source de courant continu  $I_0$  et un condensateur initialement déchargé  $C$ . L'interrupteur est ouvert soudainement à  $t = 0$ . Déterminer le courant  $i(t)$  qui parcourt le condensateur et la tension  $v(t)$  à ses bornes pour  $t \geq 0$ .

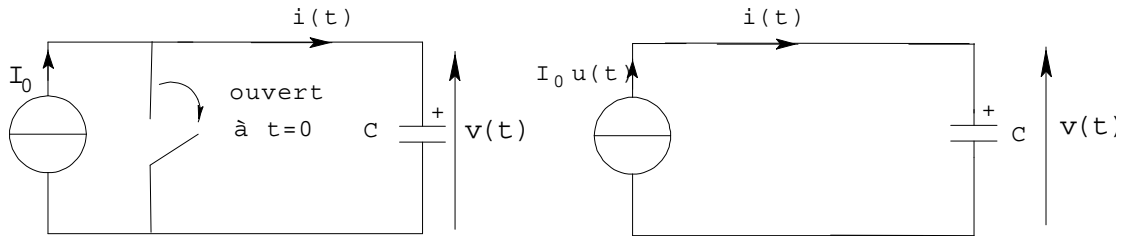


FIG. 1.30 – Source de courant et circuit ouvert à  $t = 0$  et son circuit équivalent

**Solution :** Une fois que l'interrupteur est ouvert, à l'instant  $t = 0$ , le courant  $i(t)$  passe de 0 à  $I_0$ ; son comportement peut être modélisé en termes de la fonction échelon unité, c'est à dire :

$$i(t) = I_0 u(t).$$

En représentant ce circuit par son équivalent comme sur la figure 1.30, on détermine alors par définition, la relation entre la tension aux bornes du condensateur  $v(t)$  et le courant  $i(t)$ .

$$v(t) = \frac{1}{C} \int_{-\infty}^{+\infty} i(\tau) d\tau$$

En remplaçant donc dans cette intégrale,  $i(\tau)$  par  $I_0 u(\tau)$ , on peut écrire :

$$v(t) = \frac{1}{C} \int_{-\infty}^{+\infty} I_0 u(\tau) d\tau$$

Soit :

$$v(t) = \begin{cases} 0 & \text{pour } t < 0 \\ \frac{I_0}{C} t & \text{pour } t \geq 0 \end{cases}$$

Soit :

$$v(t) = \frac{I_0}{C} t u(t) = \frac{I_0}{C} r(t)$$

Ainsi, la tension aux bornes du condensateur est une tension rampe de pente  $\frac{I_0}{C}$ .

## 1.3 Opérations de base sur les signaux

On peut identifier deux classes d'opération.

### 1.3.1 Opérations effectuées directement sur les signaux

#### Mise à l'échelle en amplitude

Soit  $x(t)$  un signal à variation temporelle continue, le signal  $y(t)$  résultant d'une mise à l'échelle en amplitude est défini par 1-62.

$$y(t) = Cx(t) \quad (1-62)$$

$C$  est le facteur d'échelle.

Un amplificateur réalise une telle fonction.

De la même façon, pour les signaux à variation temporelle discrète 1-63.

$$y[n] = Cx[n] \quad (1-63)$$

#### Addition

Soit  $x_1(t)$  et  $x_2(t)$  deux signaux à variation temporelle continue, le signal somme  $y(t)$  est défini par 1-64.

$$y(t) = x_1(t) + x_2(t) \quad (1-64)$$

Un "mixer" audio combine la musique et les voix.

De la même façon, pour les signaux à variation temporelle discrète, la relation (1-65) est vraie.

$$y[n] = x_1[n] + x_2[n] \quad (1-65)$$

#### Multiplication

Soit  $x_1(t)$  et  $x_2(t)$  deux signaux à variation temporelle continue, le signal  $y(t)$  obtenu par multiplication de  $x_1(t)$  et  $x_2(t)$  est défini par 1-66.

$$y(t) = x_1(t) \times x_2(t) \quad (1-66)$$

C'est à dire que pour une valeur donnée du temps, la valeur de  $y(t)$  est donnée par le produit des valeurs correspondantes de  $x_1(t)$  et  $x_2(t)$ . Un exemple physique est le signal radio à modulation d'amplitude :

$$y(t) = \{1 + m(t)\} \cos(\omega_0 t)$$

De façon semblable, pour des signaux à variation temporelle discrète, on obtient la relation de définition suivante 1-67.

$$y[n] = x_1[n] \times x_2[n] \quad (1-67)$$

### Différentiation

Soit  $x(t)$  un signal à variation temporelle continue. La dérivée de  $x(t)$  par rapport au temps est définie par 1-68.

$$y(t) = \frac{d}{dt}x(t) \quad (1-68)$$

Une bobine par exemple, effectue l'opération de différentiation. Si  $i(t)$  représente le courant traversant la bobine, d'inductance  $L$  (figure 1.31a)) alors la tension  $v(t)$  apparaissant aux bornes de la bobine est définie par :

$$v(t) = L \frac{d}{dt}i(t)$$

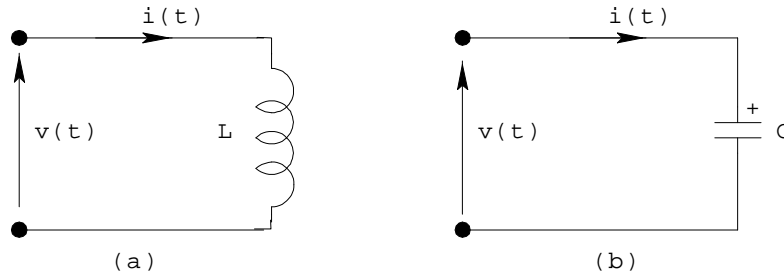


FIG. 1.31 – a) Bobine ; b) Condensateur

### Intégration

Soit  $x(t)$  un signal à variation temporelle continue. Alors, l'intégrale de  $x(t)$  par rapport au temps est définie par 1-69.

$$y(t) = \int_{-\infty}^t x(\tau) d\tau \quad (1-69)$$



$\tau$  est la variable d'intégration. Un condensateur par exemple, effectue l'opération d'intégration.

Soit  $i(t)$  un courant traversant un condensateur de capacité  $C$  (figure 1.31b)). La tension qui apparaît aux bornes du condensateur est définie par :

$$v(t) = \frac{1}{C} \int_{-\infty}^t i(\tau) d\tau$$

### 1.3.2 Opérations effectuées sur la variable indépendante

#### Mise à l'échelle temporelle (ou changement d'unité temporelle)

Soit  $x(t)$  un signal à variation temporelle continue. Le signal  $y(t)$  est obtenu en multipliant la variable indépendante  $t$  par un facteur  $a$ , conformément à la relation de définition 1-70.

$$y(t) = x(at) \tag{1-70}$$

Si  $a > 1$ , le signal  $y(t)$  est une version comprimée de  $x(t)$ .

Si  $a < 1$ , le signal  $y(t)$  est une version dilatée de  $x(t)$ .

Ces deux opérations sont représentées sur les figures 1.32.

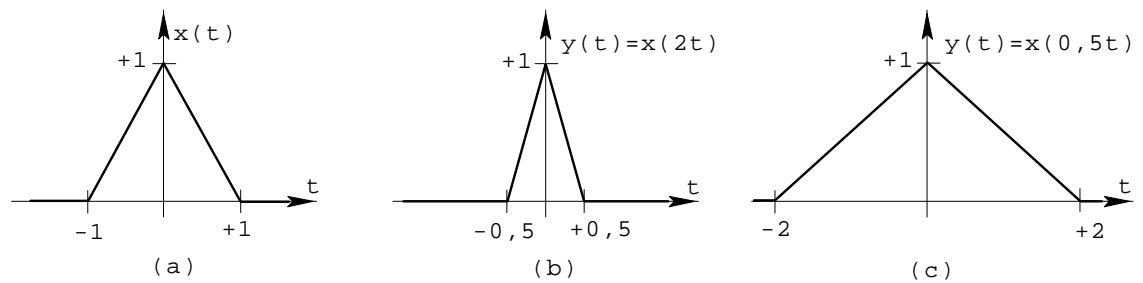


FIG. 1.32 – a) Signal  $x(t)$ ; b) version de  $x(t)$  comprimée; c) version de  $x(t)$  expansée.

Pour des signaux à variation temporelle discrète, on écrit 1-71.

$$y[n] = x[kn] \quad \text{pour } k > 0 \tag{1-71}$$

La relation précédente n'est définie évidemment que pour des valeurs entières du paramètre  $k$ .

Si  $k > 1$ , certaines valeurs de la variable discrète du signal  $y[n]$  sont perdues, comme ceci est représenté sur la figure 1.33 montrant une application pour  $k = 2$ . Les échantillons  $x[n]$  pour  $n = \pm 1, \pm 3 \dots$  sont perdus car en imposant  $k = 2$  dans  $x[kn]$ , ces échantillons sont sautés.

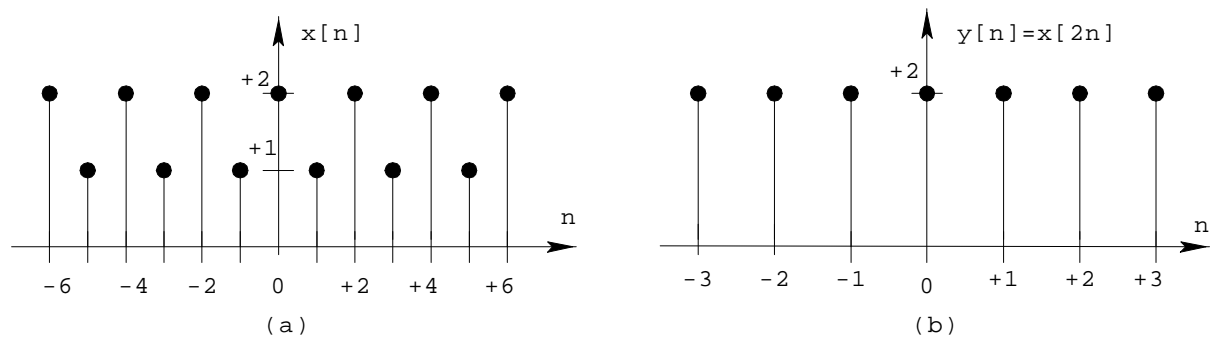


FIG. 1.33 – Signaux  $x[n]$  et  $x[2n]$  (certaines valeurs de l'original sont perdues)

**Problème P.15 :** Soit :  $x[n] = \begin{cases} 2n + 1 & \text{pour } n \text{ impair} \\ 0 & \text{pour } n \text{ pair} \end{cases}$

Déterminer  $y[n] = x[2n]$

**Réponse :**  $y[n] = 0$  pour tout  $n$ .

### Symétrie miroir vertical (Réflexion)

Soit  $x(t)$  un signal à variation temporelle continue; soit  $y(t)$  le signal obtenu à partir de  $x(t)$  en remplaçant  $(t)$  par  $(-t)$ ; c'est à dire 1-72.

$$y(t) = x(-t) \tag{1-72}$$

Le signal  $y(t)$  représente une image réfléchie dans un miroir vertical positionné en  $t = 0$ .

Les deux cas suivants sont particulièrement intéressants :

- les signaux pairs : ils satisfont la relation :  $x(-t) = x(t)$  pour tout  $t$ .

Un signal pair est identique à sa version réfléchie.

- les signaux impairs : ils satisfont la relation :  $x(-t) = -x(t)$  pour tout  $t$ . Un signal impair est l'opposé de sa version réfléchié (réflexion miroir vertical).

Des observations semblables sont valables pour des signaux à variation temporelle discrète.

### Exemple de la symétrie miroir vertical

Considérons le signal triangulaire  $x(t)$  de durée finie, représenté sur la figure 1.34a). Trouver la version réfléchié de  $x(t)$ .

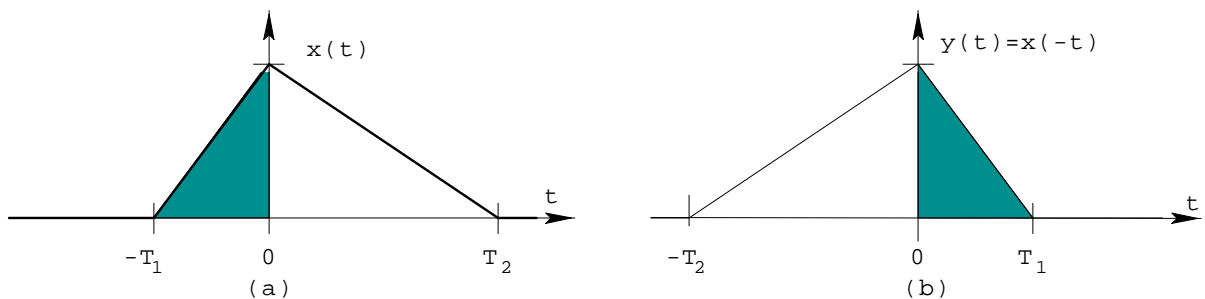


FIG. 1.34 – a) Signal  $x(t)$ ; b) Signal  $x(-t)$

**Solution :** Remplaçant la variable indépendante  $t$  dans  $x(t)$  par  $(-t)$ , on obtient :  $y(t) = x(-t)$  représenté sur la figure 1.34b).

**Remarque :** Pour cet exemple,  $x(t) = 0$  pour  $t < -T_1$  et  $t > T_2$ . On peut donc en déduire :  $y(t) = 0$  pour  $t > T_1$  et  $t < -T_2$ .

**Problème associé :** Soit le signal à variation temporelle discrète :

$$x[n] = \begin{cases} 1 & \text{pour } n = 1 \\ -1 & \text{pour } n = -1 \\ 0 & \text{pour } n = 0 \text{ et } |n| > 1 \end{cases}$$

Déterminer le signal composite :  $y[n] = x[n] + x[-n]$ .

**Réponse :**  $y[n] = 0$  pour toutes les valeurs entières de  $n$ .

Refaire la question précédente pour le signal :

$$x[n] = \begin{cases} 1 & \text{pour } n = 1 \text{ et } n = -1 \\ 0 & \text{pour } n = 0 \text{ et } |n| > 1 \end{cases}$$

Le signal composite est alors :  $y[n] = \begin{cases} 2 & \text{pour } n = 1 \text{ et } n = -1 \\ 0 & \text{pour } n = 0 \text{ et } |n| > 1 \end{cases}$

## Décalage temporel

Soit  $x(t)$  un signal à variation temporelle continue. La version temporellement décalée de  $t_0$  pour  $x(t)$  est 1-73.

$$y(t) = x(t - t_0) \quad (1-73)$$

$t$  est le temps de décalage. Si  $t_0 > 0$ ,  $y(t)$  est obtenu en décalant  $x(t)$  vers la droite de  $t_0$ , par translation de l'axe temporel.

Si  $t_0 < 0$ ,  $x(t)$  est décalé vers la gauche de  $t_0$ .

### Exemple du décalage temporel :

La figure 1.35a) représente un signal rectangulaire  $x(t)$ , d'amplitude unité et de durée unité. Trouver  $y(t) = x(t - 2)$ .

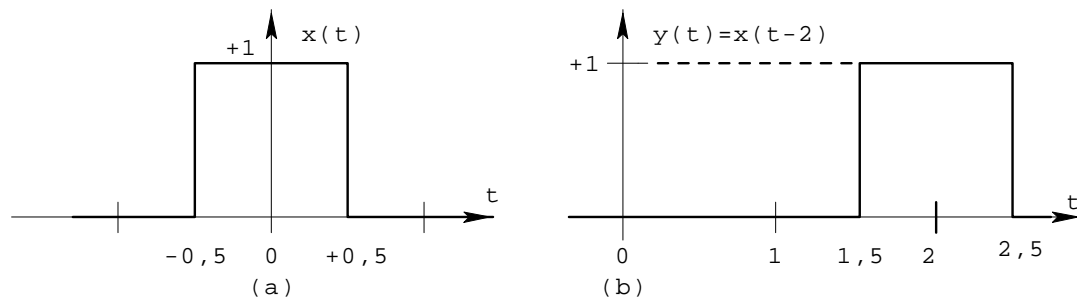


FIG. 1.35 – a) Signal  $x(t)$ ; b) Version décalée  $x(t - 2)$

**Solution :** Dans cet exemple, le décalage temporel  $t_0$  est égal à deux unités de temps. Donc en décalant  $x(t)$  vers la droite de deux unités temporelles, on obtient le signal rectangulaire  $y(t)$  représenté sur la figure 1.35b).

**Remarque :**  $y(t)$  a exactement la même forme que le signal initial, il est simplement translaté le long de l'axe temporel.

Dans le cas d'un signal à variation temporelle discrète, on définit sa version décalée temporellement par la relation 1-74

$$y[n] = x[n - n_0] \quad (1-74)$$

$n_0$ , temps de décalage, doit être un entier pouvant être positif ou négatif.

**Problème :** Soit le signal à variation temporelle discrète défini par :

$$x[n] = \begin{cases} 1 & \text{pour } n = 1 \text{ et } n = 2 \\ -1 & \text{pour } n = -1 \text{ et } n = -2 \\ 0 & \text{pour } n = 0 \text{ et } |n| > 2 \end{cases}$$

Déterminer le signal  $y[n]$  défini par :  $y[n] = x[n+3]$ .

$$\text{Réponse : } x[n] = \begin{cases} 1 & \text{pour } n = -1 \text{ et } n = -2 \\ -1 & \text{pour } n = -4 \text{ et } n = -5 \\ 0 & \text{pour } n = -3, n < -5 \text{ et } n > -1 \end{cases}$$

### 1.3.3 Règle de préséance entre le décalage temporel et la mise à l'échelle temporelle

Soit  $y(t)$  un signal à variation temporelle continue, obtenu à partir d'un autre signal à variation temporelle continue  $x(t)$  en combinant une mise à l'échelle temporelle et un décalage temporel; c'est à dire :  $y(t) = x(at - b)$ .

Cette relation entre  $y(t)$  et  $x(t)$  satisfait les conditions :  $y(0) = x(-b)$  et  $y\left(\frac{b}{a}\right) = x(0)$ .

Il est souvent utile de garder en mémoire ces deux relations, pour vérifier facilement, la transformation de  $x(t)$  en  $y(t)$ .

Pour obtenir  $y(t)$  à partir de  $x(t)$ , les opérations de décalage temporel et de mise à l'échelle temporelle, doivent être effectuées dans l'ordre adéquat. Pour comprendre l'ordre correct, il faut toujours avoir à l'esprit que l'opération de mise à l'échelle remplace toujours  $(t)$  par  $(at)$ , alors que l'opération de décalage temporel remplace  $(t)$  par  $(t - b)$ . Donc l'opération de décalage temporel doit toujours être effectuée en premier sur  $x(t)$ , ce qui conduit à un signal intermédiaire  $v(t)$  tel que :

$$v(t) = x(t - b)$$

Le décalage temporel a remplacé dans  $x(t)$ ,  $(t)$  par  $(t - b)$ . Maintenant l'opération de mise à l'échelle peut agir sur  $v(t)$ , en remplaçant  $(t)$  par  $(at)$  et conduisant à la sortie souhaitée :

$$y(t) = v(at) = x(at - b)$$

Afin de bien visualiser, comment cette double opération s'exécute, prenons une situation réelle : considérons le signal vocal enregistré sur un magnétophone. Si la cassette est rejouée à une vitesse plus rapide que la vitesse originale d'enregistrement, on a compression (c'est à dire  $a > 1$ ); si la cassette est

rejouée à une vitesse plus lente que la vitesse originale d'enregistrement, on a expansion (c'est à dire  $a < 1$ ). La constante  $b$  que l'on supposera positive, tient compte du décalage : moment à partir duquel on rejoue la cassette.

**Exemple de préséance :** pour des signaux à variation temporelle continue, considérons le signal rectangulaire  $x(t)$ , d'amplitude unité et de durée deux unités de temps, représenté sur la figure 1.36a). Trouver  $y(t) = x(2\bar{t} + 3)$ .

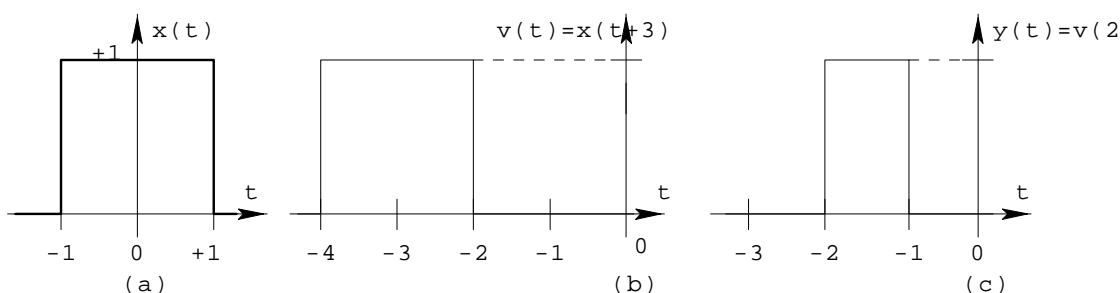


FIG. 1.36 – a) Signal original; b) Signal décalé; c) Signal mis à l'échelle.

**Solution :** Dans cet exemple, on a :  $a = 2$  et  $b = -3$ . On commence donc par un décalage de  $x(t)$  vers la gauche de trois unités de temps. On obtient le signal  $v(t)$  représenté sur la figure 1.36b). Effectuons ensuite la mise à l'échelle de la variable indépendante  $t$  dans  $v(t)$  d'un coefficient  $a = 2$ . On obtient la solution pour  $y(t)$  représentée sur la figure 1.36c).

On remarque que la solution trouvée satisfait bien les deux conditions :  $y(0) = x(3)$  et  $y(-\frac{3}{2}) = x(0)$ .

Supposons maintenant que nous n'ayons pas suivi la règle de préséance. On aurait d'abord appliqué la règle de mise à l'échelle, puis la règle de décalage temporel. Pour notre signal particulier, représenté de nouveau sur la figure 1.37a), l'application de la mise à l'échelle d'un facteur 2 conduit au signal intermédiaire  $v(t) = x(2t)$  représenté sur la figure 1.37b). Décalant ensuite temporellement  $v(t)$  de trois unités vers la gauche, on obtient le signal représenté sur la figure 1.37c). Ce signal est défini par :

$$y(t) = v(t + 3) = x[2(t + 3)] \neq x(2t + 3)$$

Ce signal ne satisfait pas  $y(-\frac{3}{2}) = x(0)$ .

**Problème P.16 :** Pour le signal triangulaire  $x(t)$  représenté sur la figure

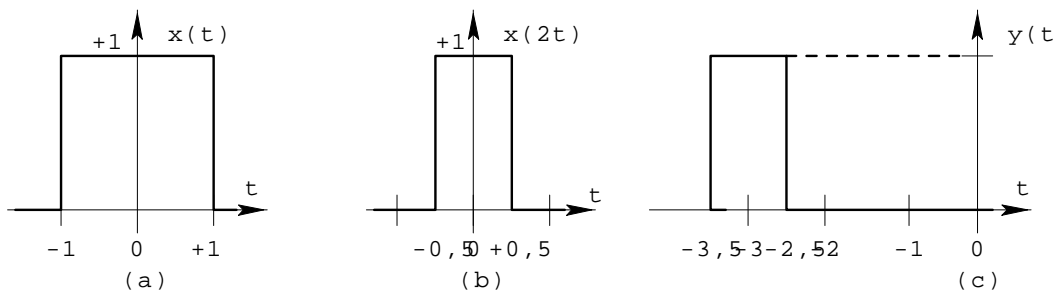


FIG. 1.37 – a) Signal  $x(t)$ ; b) Signal décalé; c) Signal mis à l'échelle.

1.38, représenter les différents signaux  $y(t)$ , obtenus à partir de  $x(t)$  à l'aide des définitions suivantes :

1.  $x(3t)$
2.  $x(3t + 2)$
3.  $x(-2t - 1)$
4.  $x[2(t + 2)]$
5.  $x[2(t - 2)]$
6.  $x(3t) + x3t + 2$

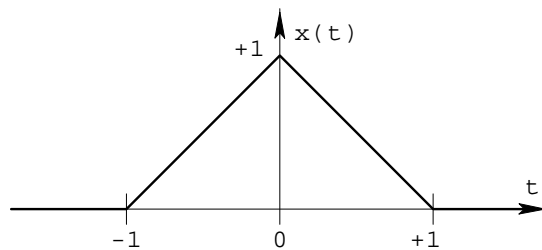


FIG. 1.38 – Signal  $x(t)$

**Solution :** Les réponses représentant les différents signaux obtenus à partir de  $x(t)$  en appliquant les relations de définition sont représentées sur la figure 1.39.

On vient donc de mettre clairement en évidence que le signal  $y(t)$  est construit à partir du signal  $x(t)$  en appliquant la règle de préséance suivante : d'abord effectuer le décalage temporel, puis l'opération de mise à l'échelle.

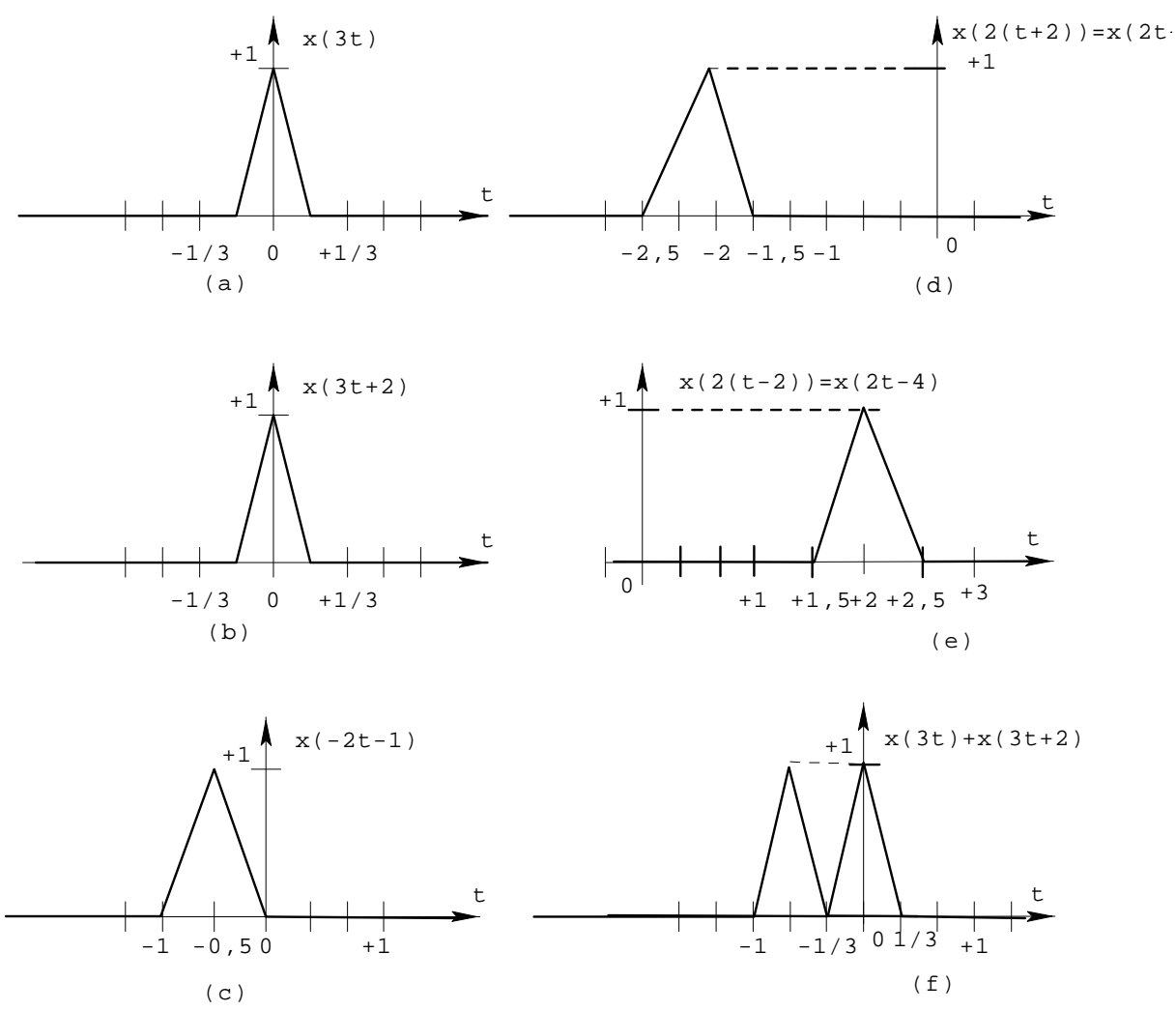


FIG. 1.39 – Différents signaux réponse



Des remarques semblables s'appliquent aux signaux à variation temporelle discrète.

**Exemple :** Règle de préséance pour des signaux à variation temporelle discrète. Soit le signal  $x[n]$  à variation temporelle discrète, défini par la relation :

$$x[n] = \begin{cases} 1 & \text{pour } n = 1 \text{ et } n = 2 \\ -1 & \text{pour } n = -1 \text{ et } n = -2 \\ 0 & \text{pour } n = 0 \text{ et } |n| > 2 \end{cases}$$

Représenter le signal  $y[n] = x[2n + 3]$ .

**Solution :** Le signal  $x[n]$  est représenté sur la figure 1.40a). Un décalage temporel vers la gauche de trois unités, conduit au signal intermédiaire  $v[n]$  représenté sur la figure 1.40b). Enfin, la mise à l'échelle de  $n$  dans  $v[n]$  par un facteur 2, permet d'obtenir la solution  $y[n]$  représentée sur la figure 1.40c).

**Remarque :** Lors de la compression effectuée pour passer de  $v[n]$  à  $y[n] = v[2n]$ , on a perdu dans  $y[n]$ , les échantillons non nuls de  $v[n]$  pour  $n = -5$  et  $n = -1$ .

**Problème P.17 :** Soit le signal  $x[n]$  à variation temporelle discrète, défini par la relation :

$$x[n] = \begin{cases} 1 & \text{pour } -2 \leq n \leq 2 \\ 0 & \text{pour } |n| > 2 \end{cases}$$

Trouver  $y[n] = x[3n - 2]$ .

**Solution :**  $y[n] = \begin{cases} 1 & \text{pour } n = 0 \text{ et } n = 1 \\ 0 & \text{partout ailleurs} \end{cases}$

## 1.4 Propriétés des systèmes

Les propriétés d'un système décrivent les propriétés de l'opérateur  $H$  représentant le système. Dans ce qui suit, nous allons étudier quelques unes des propriétés de base des systèmes.

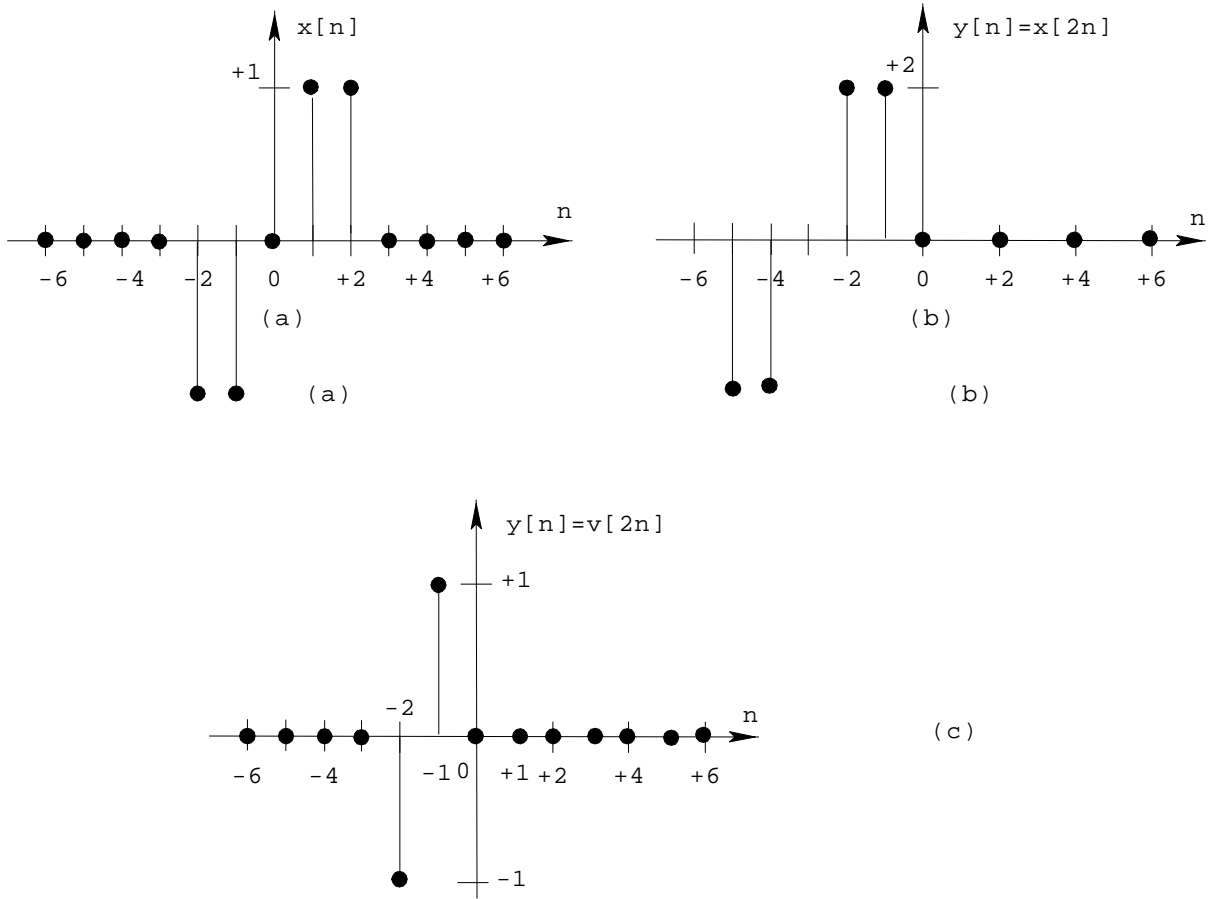


FIG. 1.40 – a) Signal  $x[n]$ ; b) Signal décalé de 3 unités vers la gauche; c) Signal final.

### 1.4.1 Stabilité

Un système est dit stable EBRB (Entrée Bornée - Réponse Bornée ou BIBO Bounded Input - Bounded Output) si et seulement si, pour n'importe quelle entrée bornée, sa sortie est bornée. La sortie de ce système ne doit pas diverger si son entrée ne diverge pas.

Pour énoncer formellement cette propriété de stabilité EBRB, considérons un système à variation temporelle continue pour lequel, la relation entrée-sortie peut être décrite par la relation :

$$y(t) = H\{x(t)\}$$

L'opérateur H est stable EBRB, si le signal de sortie  $y(t)$  satisfait la condition :

$$|y(t)| \leq M_y < \infty \text{ pour tout } t$$

pourvu que le signal d'entrée  $x(t)$  satisfasse la condition :

$$|x(t)| \leq M_x < \infty \text{ pour tout } t$$

$M_x$  et  $M_y$  sont des nombres réels, positifs, finis, quelconques.

Pour les systèmes à variation temporelle discrète, les conditions de stabilité EBRB s'énoncent de façon semblable.

D'un point de vue ingénieur, il est important que le système sous test reste stable, quelles que soient les conditions physiques opératoires. Il est garanti que le système produira une sortie stable si le signal d'entrée est borné.

Les systèmes instables sont en général éliminés, à moins que l'on trouve un mécanisme quelconque qui permette de les stabiliser.

**Exemple :** Système à moyenne glissante.

Montrer que le système à moyenne glissante défini par la relation suivante est stable au sens EBRB.

$$y[n] = \frac{1}{3} \{x[n] + x[n-1] + x[n-2]\}$$

**Solution :** Supposons que :

$$|x[n]| < M_x < \infty \text{ pour tout } n$$

En utilisant la relation entrée-sortie de définition, on peut écrire :

$$\begin{aligned} |y[n]| &= \frac{1}{3} |x[n] + x[n-1] + x[n-2]| \\ &\leq \frac{1}{3} \{|x[n]| + |x[n-1]| + |x[n-2]|\} \\ &\leq \frac{1}{3} \{M_x + M_x + M_x\} = M_x \end{aligned}$$

Ainsi donc, la valeur absolue du signal de sortie  $y[n]$  est toujours inférieure à la valeur absolue maximum du signal d'entrée  $x[n]$ , ce qui prouve que le système à moyenne glissante est stable.

**Exemple :** Système instable.

Considérons le système à variation temporelle discrète dont la relation d'entrée-sortie est définie par :

$$y[n] = r^n x[n] \text{ avec } r > 1$$

Montrer que ce système n'est pas stable.

**Solution :** On supposera que le signal d'entrée  $x[n]$  satisfait la condition :

$$|x[n]| \leq M_x < \infty \text{ pour tout } n$$

On trouve alors que :  $|y[n]| = |r^n x[n]| = |r^n| |x[n]|$

Puisque  $r > 1$ , le facteur multiplicatif  $r^n$  diverge lorsque  $n$  augmente. La condition que le signal d'entrée est borné, n'est pas suffisante pour garantir que le signal de sortie soit aussi borné et donc le système est instable. Pour démontrer sa stabilité, il est nécessaire d'établir que toutes les entrées bornées produisent une sortie bornée.

**Problème :** Pour un système à variation temporelle discrète, la relation d'entrée-sortie s'écrit :

$$y[n] = \sum_{k=0}^{\infty} p^k x[n-k]$$

Montrer que ce système est stable EBRB si  $|p| < 1$ .

## 1.4.2 Système avec mémoire ou sans mémoire

Un système est dit **avec mémoire**, si le signal de sortie dépend du passé ou des valeurs futures que va prendre le signal d'entrée. L'influence plus ou

moins grande des valeurs passées définit la mémoire plus ou moins grande du système.

On dira qu'un système est **sans mémoire** si le signal de sortie dépend uniquement de la valeur présente du signal d'entrée.

Par exemple, un résistor est sans mémoire puisque le courant  $i(t)$  qui le traverse, causé par une tension appliquée  $v(t)$  est défini par :

$$i(t) = \frac{1}{R}v(t)$$

$R$  est la valeur de la résistance du résistor.

D'un autre côté, une bobine est un générateur avec mémoire, puisque le courant qui la parcourt est lié à la tension appliquée  $v(t)$  par :

$$i(t) = \frac{1}{L} \int_{-\infty}^t v(\tau) d\tau$$

$L$  est l'inductance de la bobine. C'est à dire que, contrairement à ce qui se passe pour une résistance, le courant dans une bobine à l'instant  $t$  dépend de toutes les valeurs passées de la tension  $v(t)$ ; la mémoire d'une bobine a une étendue infinie.

La moyenne glissante définie par la relation précédemment énoncée a une mémoire puisque la valeur du signal de sortie  $y[n]$  dépend du présent et des deux valeurs passées. Par contre le système décrit par la relation suivante est sans mémoire car  $y[n]$  uniquement de la valeur présente du signal d'entrée  $x[n]$  :

$$y[n] = 2x^2[n]$$

**Problème :** De combien s'étend dans le passé, la mémoire du système à moyenne glissante décrit par la relation entrée-sortie suivante :

$$y[n] = \frac{1}{3} \{x[n] + x[n-2] + x[n-4]\}$$

**Réponse :** de 4 unités.

**Problème :** La relation entrée-sortie d'une diode semi-conductrice est représentée par la relation :

$$i(t) = a_0 + a_1v(t) + a_2v^2(t) + \dots$$

$v(t)$  est la tension appliquée,  $i(t)$  est le courant s'écoulant à travers la diode,  $a_0, a_1, a_2\dots$  sont des constantes réelles. La diode est-elle un dispositif avec mémoire ?

**Réponse :** non.

**Problème :** La relation entrée-sortie d'un condensateur est décrite par :

$$v(t) = \frac{1}{C} \int_{-\infty}^t i(\tau) d\tau$$

Quelle est l'étendue de la mémoire d'un condensateur ?

**Réponse :** la mémoire d'un condensateur s'étend de l'instant présent  $t$  jusqu'à l'infini dans le passé.

### 1.4.3 Causalité

On dit qu'un système est **causal**, si la valeur présente du signal de sortie, dépend uniquement des valeurs présentes et passées du signal d'entrée. Par opposition, on dira qu'un système n'est pas causal, si le signal de sortie dépend d'une ou de plusieurs valeurs futures du signal d'entrée.

Par exemple, le système à moyenne glissante défini par la relation suivante est un système causal :

$$y[n] = \frac{1}{2} \{x[n] + x[n-1] + x[n-2]\}$$

Par opposition, le système de moyenne glissante défini par :

$$y[n] = \frac{1}{4} \{x[n+1] - x[n] + x[n-1]\}$$

n'est pas causal puisque le signal de sortie  $y[n]$  dépend d'une valeur du futur du signal d'entrée, c'est à dire  $x[n+1]$ .

Le point important qu'il faut noter ici est que la causalité est une condition nécessaire pour que le système soit capable de travailler dans l'espace physique réel. Dans le premier exemple de moyenne glissante que nous avons traité, la sortie  $y[n]$  est calculée, une fois que l'échantillon présent  $x[n]$  est reçu, permettant donc au système de travailler dans l'espace réel, pour toute valeur de  $n$ . Par opposition, pour le dernier exemple de moyenne glissante

traité, le système doit attendre l'échantillon à venir  $x[n + 1]$  avant de produire la sortie  $y[n]$ ; la cause ne pouvant suivre l'effet, le système ne peut travailler dans la réalité.

**Problème :** Considérons le circuit  $RC$  représenté sur la figure 1.41, l'entrée étant la tension  $v_1(t)$  et la sortie étant la tension  $v_2(t)$ ; ce système est-il causal ou non causal ?

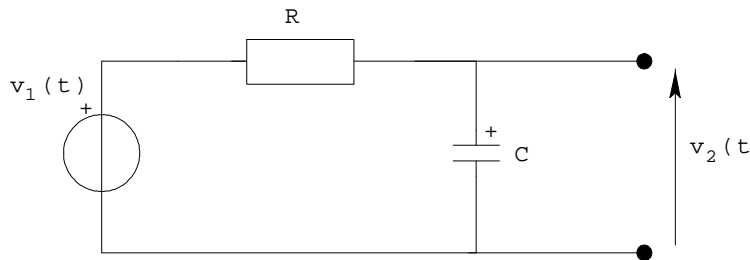


FIG. 1.41 – Circuit RC et source de tension

**Réponse :** Causal.

**Problème :** Soit le système à variation temporelle discrète, défini par la relation :  $y[n] = x[n - k]$ . Le système est-il causal pour n'importe quelle valeur de  $k$ , positive ou négative ?

**Réponse :** Non causal pour  $k$  négatif.

#### 1.4.4 Inversibilité

On dit qu'un système est inversible si au lieu de considérer la relation entrée-sortie, on peut considérer la relation sortie-entrée; en d'autres termes, si à partir de la connaissance de la sortie, on peut remonter à la valeur de l'entrée. On peut voir les opérations nécessaires pour retrouver le signal d'entrée comme un deuxième système, connecté en cascade avec le premier de telle sorte que le signal de sortie du deuxième système soit égal au signal d'entrée du premier système.

Afin de mettre la notion d'inversibilité sur des bases formelles, soit  $H$  l'opérateur représentant le premier système à variation temporelle continue ayant  $x(t)$  comme signal d'entrée et  $y(t)$  comme signal de sortie. Ce signal de sortie  $y(t)$  est appliqué à un deuxième système à variation temporelle continue représenté par un opérateur  $H^{inv}$ , comme montré sur la figure 1.42.

Le signal de sortie de ce deuxième système est défini par :

$$H^{inv} \{y(t)\} = H^{inv} [H \{x(t)\}] = H^{inv} H \{x(t)\}$$

On a utilisé le fait que les deux opérateurs  $H^{inv}$  et  $H$  connectés en cascade sont équivalents à un opérateur unique  $H^{inv} H$ . Pour que le signal de sortie soit égal au signal d'entrée original  $x(t)$ , il est nécessaire d'avoir la relation :

$$H^{inv} H = I$$

$I$  est l'opérateur identité.

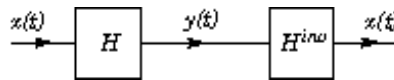


FIG. 1.42 – Notion de système inversible

La sortie d'un système décrit par l'opérateur identité est égale exactement à son entrée. L'opérateur  $H^{inv}$  est appelé opérateur inverse et le système associé est appelé système inverse. En général, le problème de trouver le système inverse d'un système donné n'est pas simple. Un système n'est pas inversible chaque fois que des entrées distinctes appliquées au système ne produisent pas des sorties distinctes. Il doit y avoir une correspondance bi-univoque entre les signaux d'entrée et de sortie pour que le système soit inversible. Des conditions identiques doivent être vérifiées pour qu'un système à variation temporelle discrète soit inversible.

La propriété d'inversibilité est de grande importance dans la conception des systèmes de communication. En effet, lorsqu'un signal se propage à travers un canal de communication, il est distordu car le canal n'est pas idéal. Une méthode très utilisée pour compenser cette distorsion et d'inclure dans le récepteur, un dispositif appelé égaliseur connecté en cascade avec le canal. En concevant l'égaliseur de telle sorte qu'il soit l'inverse du canal, le signal transmis est restauré sous sa forme originale si l'on fait l'hypothèse qu'il n'y a pas de bruit introduit.

**Exemple** : Système inverse

Considérons le système "décaleur temporel" décrit par la relation entrée-sortie suivante :

$$y(t) = x(t - t_0) = S^{t_0} \{x(t)\}$$



L'opérateur  $S^{t_0}$  représente un décalage temporel de  $t_0$  secondes. Trouver l'inverse de ce système.

**Solution** : Pour cet exemple, l'inverse du décalage retard de  $t_0$  secondes, est un décalage avance soit  $-t_0$  secondes. On peut représenter le décalage temporel de  $-t_0$  par un opérateur  $S^{-t_0}$  qui est l'inverse de  $S^{t_0}$ . Ainsi, en appliquant  $S^{-t_0}$  au signal de sortie du système initial, on obtient :

$$S^{-t_0} \{y(t)\} = S^{-t_0} \{S^{t_0} \{x(t)\}\} = S^{-t_0} S^{t_0} \{x(t)\}$$

Pour que ce signal de sortie, soit égal au signal d'entrée d'origine  $x(t)$ , il est nécessaire de satisfaire la relation

$$S^{-t_0} S^{t_0} = I$$

Cette condition est bien entendu réalisée.

**Problème** : Une bobine est décrite par la relation entrée-sortie suivante :

$$y(t) = \frac{1}{L} \int_{-\infty}^t x(\tau) d\tau$$

Trouver l'opérateur définissant le système inverse.

**Réponse** :  $x(t) = L \frac{dy(t)}{dt}$

#### Exemple d'un système non inversible

Montrer que le système élévateur à la puissance deux, décrit par la relation entrée-sortie  $y(t) = x^2(t)$  n'est pas inversible.

**Solution** : On remarquera que le système élévateur à la puissance deux ne remplit pas la condition nécessaire pour l'inversibilité, c'est à dire que des entrées distinctes doivent produire des sorties distinctes. En effet, des entrées distinctes  $x(t)$  et  $-x(t)$  produisent la même sortie  $y(t)$ . Le système élévateur à la puissance deux n'est donc pas inversible.

### 1.4.5 Invariance temporelle

Un système est dit invariant temporellement si un décalage temporel (avance ou retard) du signal d'entrée conduit à un décalage temporel identique du signal de sortie. Ceci signifie qu'un système invariant temporellement répond de façon identique, quel que soit le moment où le signal d'entrée est

appliqué : autrement dit, les caractéristiques d'un système invariant temporellement, sont conservées, quelle que soit l'origine temporelle. Dans les autres cas, le système sera dit variant temporellement.

Considérons un système à variation temporelle continue, dont la relation entrée-sortie est de la forme :

$$y_1(t) = H \{x_1(t)\}$$

Supposons que le signal d'entrée  $x_1(t)$  soit décalé temporellement de  $t_0$  secondes soit  $x_1(t - t_0)$ . Cette opération peut donc être décrite analytiquement par :

$$x_2(t) = x_1(t - t_0) = S^{t_0} \{x_1(t)\}$$

Soit  $y_2(t)$  représentant le signal de sortie du système  $H$  ; c'est le signal réponse à l'entrée décalée  $x_1(t - t_0)$ . On peut écrire :

$$y_2(t) = H \{x_1(t - t_0)\} = H \{S^{t_0} [x_1(t)]\} \implies y_2(t) = HS^{t_0} \{x_1(t)\}$$

Les implications précédentes sont représentées sur la figure 1.43a). Supposons



FIG. 1.43 – a) L'opérateur  $S^{t_0}$  précède l'opérateur  $H$ . b) L'opérateur  $S^{t_0}$  suit l'opérateur  $H$ .

maintenant que  $y_1(t - t_0)$  représente la sortie du système  $H$  décalée temporellement de  $t_0$  secondes ; soit :

$$y_1(t - t_0) = S^{t_0} \{y_1(t)\} = S^{t_0} [H \{x_1(t)\}] \implies y_1(t - t_0) = S^{t_0} H \{x_1(t)\}$$

Les implications précédentes sont représentées dans le schéma-bloc de la figure 1.43b).

Le système sera dit invariant temporellement si les sorties  $y_2(t)$  et  $y_1(t - t_0)$  sont identiques, quel que soit le signal d'entrée  $x_1(t)$ . Il faut donc que soit réalisée la condition :

$$HS^{t_0} = S^{t_0}H$$

Autrement dit, pour que le système décrit par l'opérateur  $H$  soit invariant temporellement, il faut que l'opérateur du système  $H$  et l'opérateur de décalage temporel  $S^{t_0}$  commutent pour tout  $t_0$ .

Une relation semblable peut être énoncée pour que soit temporellement invariant, un système à variation temporelle discrète.

**Exemple** : Bobine.

On supposera que  $v(t)$ , tension aux bornes de la bobine est le signal d'entrée  $x_1(t)$  et que le courant parcourant la bobine  $i(t)$  représente le signal de sortie  $y_1(t)$ . La bobine est donc décrite par la relation entrée-sortie suivante :

$$y_1(t) = \frac{1}{L} \int_{-\infty}^t x_1(\tau) d\tau$$

$L$  est l'inductance de la bobine. Montrer que la bobine ainsi décrite est un système invariant temporellement.

**Solution** : Décalons temporellement l'entrée  $x_1(t)$  de  $t_0$  secondes. La réponse  $y_2(t)$  de la bobine à  $x_1(t - t_0)$  a l'expression analytique suivante :

$$y_2(t) = \frac{1}{L} \int_{-\infty}^t x_1(\tau - t_0) d\tau$$

Maintenant, soit  $y_1(t - t_0)$  la sortie originelle de la bobine, décalée temporellement de  $t_0$  secondes ; c'est à dire :

$$y_1(t - t_0) = \frac{1}{L} \int_{-\infty}^{t-t_0} x_1(\tau) d\tau$$

Bien qu'à première vue,  $y_2(t)$  et  $y_1(t - t_0)$  soient formellement différents, ils sont en fait égaux comme le montre un simple changement de la variable d'intégration. Soit :  $\tau' = \tau - t_0 \implies d\tau' = d\tau$ . En changeant les limites de l'intégrale, l'expression de  $y_2(t)$  peut se réécrire de la façon suivante :

$$y_2(t) = \frac{1}{L} \int_{-\infty}^{t-t_0} x_1(\tau') d\tau'$$

En termes mathématiques, c'est une expression identique à  $y_1(t - t_0)$ . Il s'ensuit donc que la bobine est un système invariant temporellement.

**Exemple :** Thermistor

Un thermistor est une résistance qui varie avec le temps ; ceci est dû à des variations de température. Soit donc  $R(t)$  la résistance du thermistor. Considérons que le signal d'entrée  $x_1(t)$  est la tension aux bornes de la thermistance et que le signal de sortie  $y_1(t)$  est le courant qui parcourt la thermistance. La relation entrée-sortie de ce dispositif peut s'écrire :

$$y_1(t) = \frac{x_1(t)}{R(t)}$$

Montrer que la thermistance ainsi décrite est un dispositif variant temporellement.

**Solution :** Soit  $y_2(t)$  la réponse de la thermistance à la cause  $x_1(t - t_0)$ . On peut écrire :

$$y_2(t) = \frac{x_1(t - t_0)}{R(t)}$$

Soit  $y_1(t - t_0)$ , la sortie temporellement décalée de  $t_0$  de la thermistance due à l'entrée  $x_1(t)$  ; c'est à dire :

$$y_1(t - t_0) = \frac{x_1(t - t_0)}{R(t - t_0)}$$

Puisqu'en général,  $R(t) \neq R(t - t_0)$  pour  $t_0 \neq 0$ , on voit immédiatement que :

$$y_1(t - t_0) \neq y_2(t) \text{ pour } t_0 \neq 0$$

Ainsi donc, la thermistance est un système variant temporellement, ce qui intuitivement est satisfaisant.

**Problème :** Un système à variation temporelle discrète, dont la relation entrée-sortie est  $y[n] = r^n x[n]$  est il temporellement invariant ?

**Réponse :** Non

### 1.4.6 Linéarité

Un système est dit linéaire, en termes d'entrée (excitation  $x(t)$ ) et de sortie (réponse  $y(t)$ ), s'il satisfait simultanément les deux propriétés de superposition et d'homogénéité que nous allons énoncer.

**Superposition :** Considérons un système initialement au repos. Le système est soumis à une entrée  $x_1(t)$  produisant une sortie  $y_1(t)$ . Supposons que

le même système soit soumis à une entrée différente  $x(t) = x_2(t)$  produisant une sortie correspondante  $y(t) = y_2(t)$ . Pour que le système soit linéaire, il est nécessaire que l'entrée composite  $x(t) = x_1(t) + x_2(t)$  produise une sortie  $y(t) = y_1(t) + y_2(t)$ . Nous venons de décrire le principe de superposition sous sa forme la plus simple.

**Homogénéité :** Considérons encore le système initialement au repos et supposons que l'entrée  $x(t)$  conduise à une sortie  $y(t)$ . On dira que le système présente la propriété d'homogénéité, si pour toute entrée multipliée par un facteur constant  $a$ , la sortie  $y(t)$  est multipliée par ce facteur  $a$ .

Quand un système ne satisfait pas la propriété de superposition ou celle d'homogénéité, il sera appelé non-linéaire.

Soit un opérateur  $H$  représentant un système à variation temporelle continue. Supposons que le signal appliqué à l'entrée de ce système soit la somme pondérée suivante :

$$x(t) = \sum_{i=1}^N a_i x_i(t)$$

$x_1(t), x_2(t), \dots, x_N(t)$  représentent un ensemble de signaux d'entrée et  $a_1, a_2, \dots, a_N$  sont les facteurs de pondération correspondants. Le signal de sortie résultant s'écrit alors :

$$y(t) = H \{x(t)\} = H \left\{ \sum_{i=1}^N a_i x_i(t) \right\}$$

Si le système est linéaire, en appliquant le principe de superposition et la propriété d'homogénéité, on peut exprimer le signal de sortie de ce système, sous la forme suivante :

$$y(t) = \sum_{i=1}^N a_i y_i(t)$$

Les  $y_i(t)$  sont les réponses du système aux entrées  $x_i(t)$ , agissant séparément, c'est à dire :

$$y_i(t) = H \{x_i(t)\}, i = 1, 2, \dots, N.$$

La somme pondérée décrivant le signal de sortie  $y(t)$  a la même forme mathématique que la somme pondérée décrivant le signal d'entrée  $x(t)$ .

$$y(t) = H \left\{ \sum_{i=1}^N a_i x_i(t) \right\} = \sum_{i=1}^N a_i H \{x_i(t)\}$$

En d'autres termes, l'opérateur du système  $H$  doit commuter avec la sommation et la mise à l'échelle.

La linéarité est représentée sur les figures 1.44. Pour des systèmes linéaires

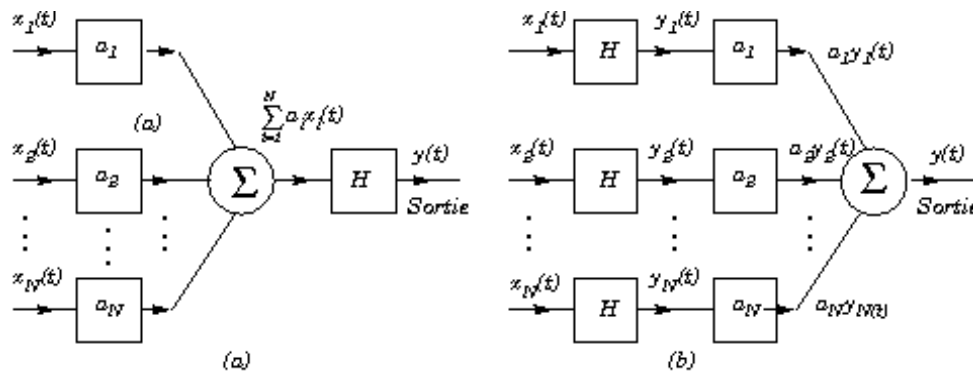


FIG. 1.44 – a) La multiplication par une constante et la sommation précèdent  $H$ . b)  $H$  précède la multiplication par une constante et la sommation.

à variation temporelle discrète, les relations suivantes doivent être satisfaites :

$$y[n] = H \left\{ \sum_{i=1}^N a_i x_i[n] \right\} = \sum_{i=1}^N a_i H \{x_i[n]\} = \sum_{i=1}^N a_i y_i[n]$$

**Exemple :** Comme système linéaire à variation temporelle discrète, considérons le système décrit par la relation entrée-sortie suivante :

$$y[n] = nx[n]$$

Montrer que ce système est linéaire.

**Solution :** Exprimons le signal d'entrée  $x[n]$  sous la forme de la somme pondérée suivante :

$$x[n] = \sum_{i=1}^N a_i x_i[n]$$

Cherchons l'expression analytique caractérisant le signal de sortie résultant :

$$y[n] = nx[n] = n \sum_{i=1}^N a_i x_i[n] = \sum_{i=1}^N a_i nx_i[n]$$

$y[n]$  peut alors s'écrire sous la forme analytique suivante, après avoir posé  $y_i[n] = nx_i[n]$  :

$$y[n] = \sum_{i=1}^N a_i y_i[n]$$

La relation précédente peut être interprétée de la façon suivante : c'est la sortie due à chaque entrée individuelle agissant indépendamment. On peut donc voir que le système ainsi défini, satisfait à la fois à la propriété de superposition et à la propriété d'homogénéité. Il est donc linéaire.

**Exemple** : On va maintenant s'intéresser à un système non linéaire. Considérons le système à variation temporelle continue, décrit par la relation entrée-sortie suivante :

$$y(t) = x(t) \times x(t - 1)$$

Montrer que ce système est non linéaire.

**Solution** : Supposons que le signal d'entrée  $x(t)$  puisse être décomposé suivant la somme pondérée suivante :

$$x(t) = \sum_{i=1}^N a_i x_i(t)$$

Pour ce système, le signal de sortie correspondant est donné par :

$$y(t) = \sum_{i=1}^N a_i x_i(t) \times \sum_{j=1}^N a_j x_j(t - 1)$$

$y(t)$  peut mathématiquement se transformer de la façon suivante :

$$y(t) = \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N a_i a_j x_i(t) x_j(t)$$

Si le système avait été linéaire, on aurait eu un signal de sortie  $z(t)$  ayant l'expression analytique suivante :

$$z(t) = \sum_{i=1}^N a_i x_i(t) \times x_i(t - 1)$$

On remarque que la forme du signal de sortie est totalement différente de celle attendue. Le système ne satisfait pas le principe de superposition et est donc un système non linéaire.

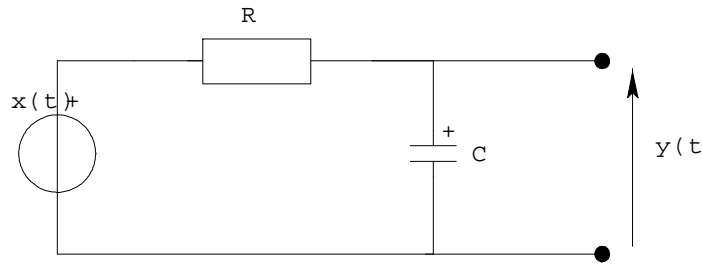


FIG. 1.45 – Circuit  $RC$  dont on connaît la réponse à  $u(t)$ .

**Problème :** Montrer que le système décrit par la moyenne glissante suivante est linéaire :

$$y[n] = \frac{1}{3} \{x[n] + x[n - 1] + x[n - 2]\}$$

**Problème :** Est-il possible qu'un système linéaire soit non causal ?

**Réponse :** Oui

**Problème :** Le limiteur "dur" est un système sans mémoire dont la relation entrée-sortie est définie par :

$$y(t) = 1 \text{ pour } x(t) \geq 0$$

$$y(t) = 0 \text{ pour } x(t) < 0$$

Ce système est-il linéaire ?

**Réponse :** Non.

**Exemple :** Réponse impulsionnelle d'un circuit  $RC$ .

Dans cet exemple, nous allons utiliser la linéarité, l'invariance temporelle et la représentation d'une impulsion de Dirac comme cas limite d'une impulsion rectangulaire afin d'obtenir la réponse d'un circuit série, représenté sur la figure (1-45). Nous avons déjà discuté de ce système lors du calcul de la réponse de ce circuit à un échelon unité. On peut écrire la tension aux bornes du condensateur sous la forme :

$$y(t) = \{1 - e^{-t/(RC)}\} u(t) \text{ et } x(t) = u(t)$$

Connaissant la réponse à l'échelon unité, le but de cet exercice est de trouver par déduction, la réponse à une impulsion de Dirac.

**Solution :** Pour trouver la réponse  $y(t)$  produite par une cause  $x(t) = \delta(t)$ , nous allons utiliser quatre concepts, précédemment définis : les proprié-



tés de linéarité et d'invariance temporelle, la définition graphique de l'impulsion de Dirac par passage à la limite de la fonction rectangle et la définition de la dérivée d'une fonction continue du temps.

Nous avons déjà noté que l'on peut exprimer l'impulsion rectangulaire  $x_\Delta(t)$  comme la différence de deux fonctions échelon pondérées et décalées temporellement ; soit :

$$x_1(t) = \frac{1}{\Delta} u \left\{ t + \frac{\Delta}{2} \right\} \text{ et } x_2(t) = \frac{1}{\Delta} u \left\{ t - \frac{\Delta}{2} \right\}$$

Soient  $y_1(t)$  et  $y_2(t)$ , les réponses du circuit  $RC$  aux deux fonctions échelon  $x_1(t)$  et  $x_2(t)$  respectivement. Appliquant la propriété d'invariance temporelle, on obtient :

$$y_1(t) = \frac{1}{\Delta} \left\{ 1 - e^{-(t+\frac{\Delta}{2})/(RC)} \right\} u \left( t + \frac{\Delta}{2} \right) \text{ et } x(t) = x_1(t)$$

$$y_2(t) = \frac{1}{\Delta} \left\{ 1 - e^{-(t-\frac{\Delta}{2})/(RC)} \right\} u \left( t - \frac{\Delta}{2} \right) \text{ et } x(t) = x_2(t)$$

Rappelons la relation de définition :  $x_\Delta(t) = x_1(t) - x_2(t)$ . Invoquant la propriété de linéarité pour exprimer les réponses correspondantes du circuit  $RC$ , on obtient les expressions suivantes :

$$\begin{aligned} y_\Delta(t) &= \frac{1}{\Delta} \left\{ 1 - e^{-(t+\frac{\Delta}{2})/(RC)} \right\} u \left( t + \frac{\Delta}{2} \right) \\ &\quad - \frac{1}{\Delta} \left\{ 1 - e^{-(t-\frac{\Delta}{2})/(RC)} \right\} u \left( t - \frac{\Delta}{2} \right) \\ &= \frac{1}{\Delta} \left\{ u \left( t + \frac{\Delta}{2} \right) - u \left( t - \frac{\Delta}{2} \right) \right\} \\ &\quad - \frac{1}{\Delta} \left\{ e^{-(t+\frac{\Delta}{2})/(RC)} \times u \left( t + \frac{\Delta}{2} \right) - e^{-(t-\frac{\Delta}{2})/(RC)} \times u \left( t - \frac{\Delta}{2} \right) \right\} \end{aligned}$$

Tout ce qu'il nous reste à faire est de déterminer la forme limite de  $y_\Delta(t)$ . lorsque la durée  $\Delta$  de l'impulsion tend vers zéro. Pour arriver à nos fins, nous devons invoquer les deux définitions suivantes :

- Représentation de  $\delta(t)$  comme cas limite de  $x_\Delta(t)$

$$\delta(t) = \lim_{\Delta \rightarrow 0} x_\Delta(t)$$

– Ecriture de la dérivée d'une fonction continue du temps :

$$\frac{dz(t)}{dt} = \lim_{\Delta \rightarrow 0} \left\{ \frac{1}{\Delta} \left[ z \left( t + \frac{\Delta}{2} \right) - z \left( t - \frac{\Delta}{2} \right) \right] \right\}$$

Appliquons ces deux définitions, à la dernière ligne de la relation définissant  $y_{\Delta}(t)$  en rappelant  $x(t) = \delta(t)$ ; on obtient la réponse souhaitée à l'impulsion de Dirac :

$$y(t) = \lim_{\Delta \rightarrow 0} y_{\Delta}(t) = \delta(t) - \frac{d}{dt} \{ e^{-t/RC} u(t) \}$$

$$y(t) = \delta(t) - e^{-t/RC} \frac{d}{dt} u(t) - u(t) \frac{d}{dt} \{ e^{-t/RC} \}$$

$$y(t) = \delta(t) - e^{-t/RC} \delta(t) + \frac{1}{RC} e^{-t/RC} u(t)$$

Nous avons appliqué la règle de dérivation d'un produit de fonctions  $u(t)$  et  $e^{-t/RC}$ . Enfin, puisque  $\delta(t)$  n'agit qu'à l'origine et que  $e^{-t/RC} = 1$  pour  $t = 0$ , les termes  $\delta(t)$  et  $\delta(t)e^{-t/RC}$  s'annulent. L'expression pour la réponse au Dirac  $\delta(t)$  du circuit  $RC$  s'écrit donc simplement sous la forme suivante :

$$y(t) = \frac{1}{RC} e^{-t/RC} u(t) \text{ avec } x(t) = \delta(t)$$

Ce résultat est classique.

**Problème** : Circuit  $RL$

La figure 1.46 représente le circuit  $RL$  constitué de la mise en série d'une bobine et d'une résistance. La réponse de ce circuit à un échelon unité est :

$$y(t) = \{ 1 - e^{-tR/L} \} u(t) \text{ avec } x(t) = \delta(t)$$

Trouver la réponse de ce circuit à l'impulsion de Dirac, c'est à dire la tension  $y(t)$  apparaissant aux bornes de la résistance, lorsque la tension d'entrée  $x(t)$  est égale à  $\delta(t)$ . **Réponse** :  $\frac{R}{L} e^{-tR/L} u(t)$ .

## 1.5 Représentation sous forme de schéma bloc des systèmes LIT

Dans ce paragraphe, nous allons examiner la représentation sous forme de schéma-blocs de systèmes LIT décrits par des équations différentielles

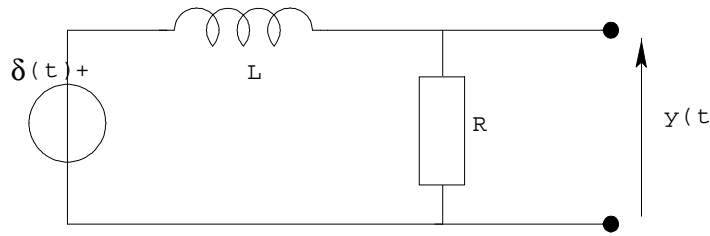


FIG. 1.46 – Réponse impulsionnelle d'un circuit  $RL$

ou des équations aux différences. Un schéma-bloc est une interconnection d'opérateurs élémentaires qui agissent sur le signal d'entrée. Pour le système, le schéma-bloc est une représentation plus détaillée que la réponse impulsionnelle ou que la description par des équations différentielles ou aux différences. La description par schéma-blocs permet de rendre compte de certaines opérations internes au système et de décrire comment elles sont ordonnées. Comme nous l'avons déjà vu, la réponse impulsionnelle ou la description par équations différentielles ou aux différences représente uniquement la relation entrée-sortie du système.

Nous allons montrer qu'un système ayant une caractéristique entrée-sortie donnée peut se représenter par une interconnection de plusieurs schéma-blocs. Chaque schéma-bloc en particulier, décrit une partie des calculs internes effectués à l'intérieur du système et contribuant à la génération du signal de sortie.

L'interconnection de trois opérations élémentaires permet cette représentation :

- Multiplication par un scalaire :

$$y(t) = Cx(t) \text{ ou } y[n] = Cx[n]$$

- Addition :

$$y(t) = x(t) + w(t) \text{ ou } y[n] = x[n] + w[n]$$

- Intégration pour des systèmes LIT à variation temporelle continue :

$$y(t) = \int_{-\infty}^t x(\tau) d\tau$$

- Le décalage temporel d'une unité pour les systèmes à variation temporelle discrète :

$$y[n] = x[n - 1]$$

La figure 1.47 représente les graphiques utilisés pour représenter les trois symboles des schéma-blocs décrits précédemment.

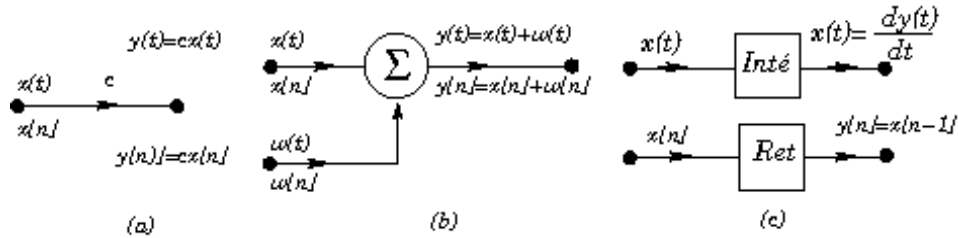


FIG. 1.47 – Symboles représentant les opérations élémentaires : a) Multiplication par un scalaire ; b) addition ; c) Intégration ou décalage temporel.

Afin de pouvoir exprimer les systèmes à variation temporelle continue en termes d'opération "intégration", on doit transformer l'équation différentielle en une équation intégrale; cette opération est préférée à l'opération différentiation car les intégrateurs sont beaucoup plus faciles à construire que les différentiateurs; de plus la présence d'intégrateurs amoindrit le bruit dans les systèmes alors que la présence de différentiateurs l'accroît. On obtient l'équation intégrale ou l'équation aux différences, correspondant au comportement du système, en exprimant en séquence les différentes opérations représentées sous forme d'équations par les schéma-blocs.

Commençons à traiter le cas des systèmes à variation temporelle discrète. La figure 1.48 représente un tel système. Ecrivons l'équation correspondant à la partie du système à l'intérieur du rectangle hachuré. Pour un "décaleur d'une unité", la sortie est  $x[n - 1]$  si l'entrée est  $x[n]$ .

Pour le deuxième "décaleur d'une unité", la sortie est  $x[n - 2]$ . Les multiplications scalaires et les sommations induisent les relations :

$$w[n] = b_0x[n] + b_1x[n - 1] + b_2x[n - 2]$$

Ecrivons ensuite l'expression de  $y[n]$  en fonction de  $w[n]$ . De la lecture du bloc diagramme, on peut écrire :

$$y[n] = w[n] - a_1y[n - 1] - a_2y[n - 2]$$

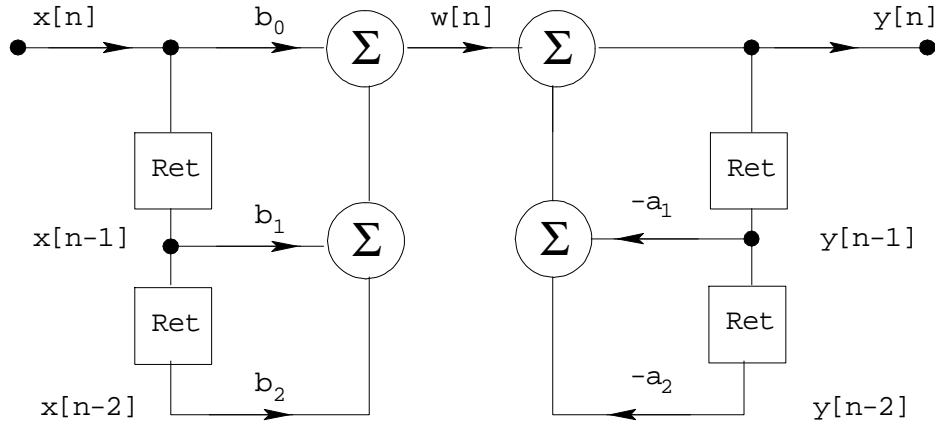


FIG. 1.48 – Représentation sous forme de schéma blocs d’un système du second ordre à variation temporelle discrète.

Eliminant la variable intermédiaire  $w[n]$ , on peut exprimer directement la sortie du système  $y[n]$  en fonction des valeurs de l’entrée, soit :

$$y[n] = -a_1 y[n-1] - a_2 y[n-2] + b_0 x[n] + b_1 x[n-1] + b_2 x[n-2]$$

Soit :

$$y[n] + a_1 y[n-1] + a_2 y[n-2] = b_0 x[n] + b_1 x[n-1] + b_2 x[n-2]$$

Le bloc diagramme de la figure 1.48 décrit donc le bloc-diagramme d’un système LIT dont la caractéristique entrée-sortie est représentée par une équation aux différences d’ordre 2. On remarquera que le bloc diagramme représente explicitement les opérations effectuées pour calculer la sortie lorsqu’on connaît l’entrée et nous donne une indication sur la façon de simuler le système sur ordinateur.

Les opérations de multiplication par une constante et d’addition sont facilement évaluées à l’aide d’un ordinateur. Les sorties des opérateurs de ”décalage temporel ” correspondent à des allocations de mémoire dans les ordinateurs. Pour calculer la sortie à l’instant  $n$ , en fonction de l’entrée à l’instant  $n$ , on doit avoir sauvegardé en mémoire, les valeurs passées aussi bien de la sortie que de l’entrée. Pour entreprendre la simulation du calcul à un instant donné, on doit connaître les valeurs passées de l’entrée et de la

sortie. Les valeurs passées de la sortie, sont les conditions initiales nécessaires à la résolution directe de l'équation aux différences.

**Problème :** Déterminer l'équations aux différences correspondant à la description sous forme de schéma-bloc des systèmes représentés sur les figures 1.49a) et b).

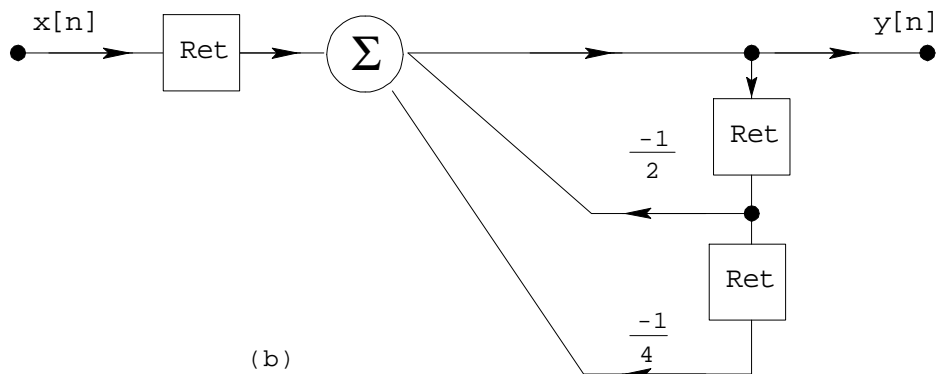
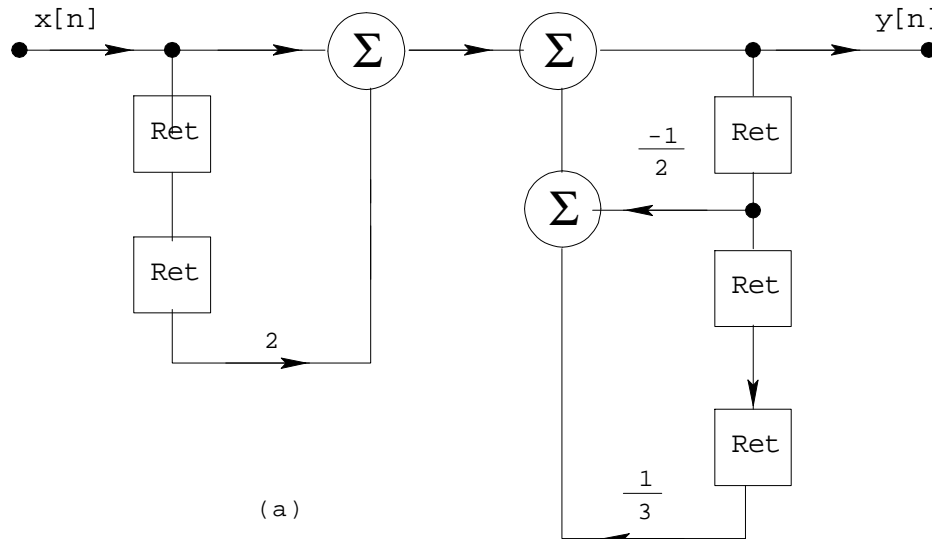


FIG. 1.49 – Représentation sous forme de schéma blocs

**Réponses :**

a)  $y[n] + \frac{1}{2}y[n-1] - \frac{1}{3}y[n-3] = x[n] + 2x[n-2]$

$$b) y[n] + \frac{1}{2}y[n-1] + \frac{1}{4}y[n-2] = x[n-1]$$

La description d'un système sous forme de schéma-blocs n'est pas unique. Nous allons illustrer cette propriété en développant une deuxième description d'un système sous forme de schéma-blocs. Reprenons l'exemple d'équation aux différences du second ordre. On peut considérer le système représenté sur la figure 1.48 comme la connection en cascade de deux systèmes : l'un d'entrée  $x[n]$  et de sortie  $w[n]$ , l'autre d'entrée  $w[n]$  et de sortie  $y[n]$ . Ces deux systèmes sont des systèmes LIT, pour lesquels on peut changer l'ordre de mise en cascade sans changer le comportement global entrée-sortie.

Interchangeons donc l'ordre de mise en cascade, appelons  $f[n]$  la sortie du nouveau premier système (l'ancien deuxième). Cette sortie  $f[n]$  et l'entrée  $x[n]$  sont liées par la relation :

$$f[n] = -a_1f[n-1] - a_2f[n-2] + x[n]$$

Le signal  $f[n]$  est aussi l'entrée du deuxième système. La sortie de ce deuxième système obéit à la relation :

$$y[n] = b_0f[n] + b_1f[n-1] + b_2f[n-2]$$

Les deux systèmes font intervenir les mêmes versions déphasées temporellement de  $f[n]$ . Donc pour cette seconde description sous forme de schéma-blocs du système, on n'a besoin que d'une seule version de "décalages temporels". Le système décrit par les équations intermédiaires précédentes est représenté sur la figure 1.50. Les blocs diagrammes des figures 1.48 et 1.50 représentent deux implémentations différentes du même système LIT d'ordre deux. Le diagramme de la figure 1.48 est appelé "implémentation directe forme I" alors que celui représenté sur la figure 1.50 est appelé "implémentation directe forme II". L'implémentation directe forme II utilise la mémoire de façon plus efficace. Dans cet exemple, seules sont nécessaires deux places mémoire, alors que dans l'implémentation directe forme I, quatre places mémoire sont nécessaires.

**Problème :** Dessiner les implémentations sous forme directe I et II du système décrit par l'équation aux différences suivante :

$$y[n] + \frac{1}{4}y[n-1] + \frac{1}{8}y[n-2] = x[n] + x[n-1]$$

**Réponse :** Les schéma-blocs sont représentés sur les figures 1.51.

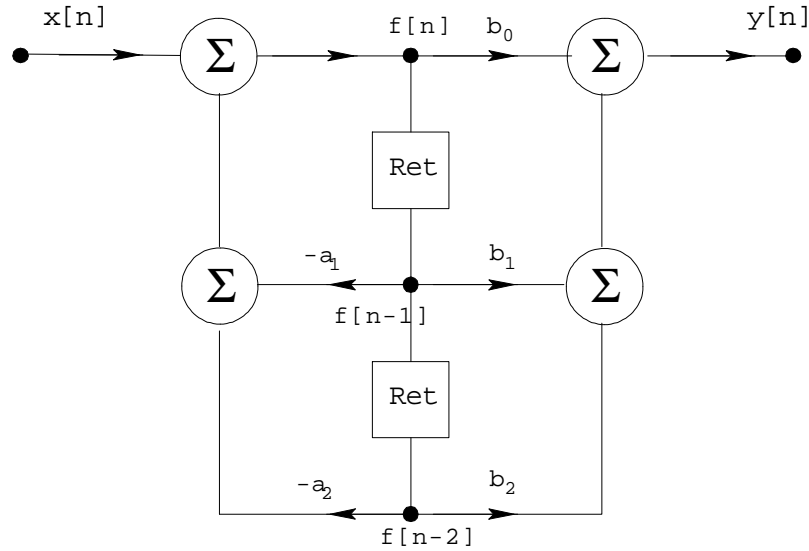


FIG. 1.50 – Représentation sous-forme directe II d'un système LIT décrit par une équation aux différences d'ordre 2.

Nous venons de voir qu'il y a plusieurs implémentations différentes d'un système LIT dont le comportement entrée-sortie est décrit par une équation aux différences. Les deux ont été obtenues en manipulant soit l'équation aux différences, soit la représentation des éléments du schéma-bloc. Bien que ces différentes implémentations soient équivalentes en ce qui concerne le comportement entrée-sortie, elles sont bien évidemment différentes, si l'on choisit différents critères de comparaison : place mémoire, nombre d'opérations nécessaires pour obtenir la valeur de sortie, précision numérique...

Des résultats semblables s'obtiennent pour des systèmes LIT à variation temporelle continue. On pourrait simplement remplacer les opérateurs de décalage temporel, par des opérateurs "différentiation" ce qui permettrait d'obtenir directement la représentation sous forme de schéma-blocs des équations différentielles. Cependant afin de décrire les systèmes LIT à variation temporelle continue en faisant intervenir l'opération d'intégration, on doit d'abord réécrire l'équation différentielle sous forme intégrale.

$$\sum_{k=0}^N a_k \frac{d^k y(t)}{dt^k} = \sum_{k=0}^M b_k \frac{d^k x(t)}{dt^k}$$



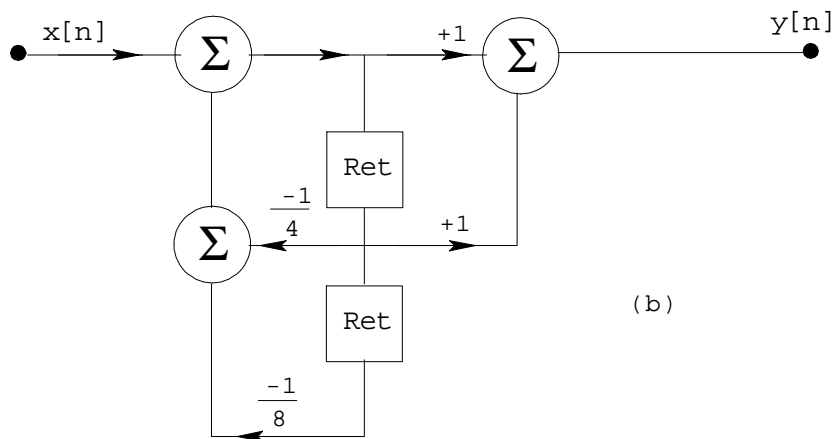
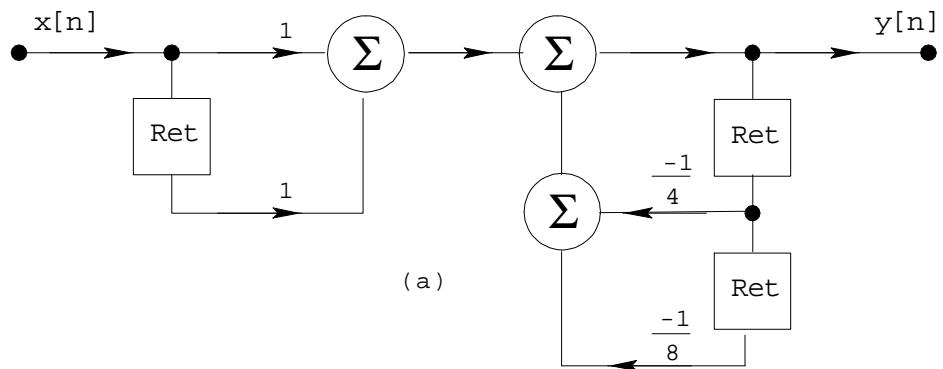


FIG. 1.51 – a) Forme I; b) Forme II.

Pour faire cela, définissons l'opération "intégration" de façon récurrente, afin de simplifier l'écriture. Soit  $v(t)$  un signal quelconque, écrivons :

$$v^{(n)}(t) = \int_{-\infty}^t v^{(n-1)}(\tau) d\tau, \quad n = 1, 2, 3\dots$$

Ainsi  $v^{(n)}(t)$  est l'intégrale de rang  $(n)$  de  $v(t)$  par rapport au temps. Cette définition de l'intégrale prend en compte toutes les valeurs passées du temps. On peut réécrire l'intégrale en faisant intervenir la condition initiale sur l'intégrateur :

$$v^{(n)}(t) = \int_{-\infty}^t v^{(n-1)}(\tau) d\tau + v^{(n)}(0), \quad n = 1, 2, 3\dots$$

Si l'on suppose des conditions initiales nulles, alors, intégration et différenciation sont des opérations inverses l'une de l'autre, c'est à dire :

$$\frac{d}{dt}v^{(n)}(t) = v^{(n-1)}(t), \quad n = 1, 2, 3\dots$$

Ainsi si  $N > M$ , en intégrant  $N$  fois l'équation différentielle, on obtient la description du système sous la forme de l'équation intégrale suivante :

$$\sum_{k=0}^N a_k y^{(k)}(t) = \sum_{k=0}^M a_k x^{(k)}(t)$$

Pour un système d'ordre deux avec  $a_0 = 1$ , l'équation précédente se réécrit :

$$y(t) = -a_1 y^{(1)}(t) - a_0 y^{(2)}(t) + b_2 x(t) + b_1 x^{(1)}(t) + b_0 x^{(2)}(t)$$

Les implémentations de ce système sous forme directe I et II sont représentées sur les figures 1.52 et 1.53 respectivement. On remarquera que l'implémentation sous forme directe II utilise moins d'intégrations que l'implémentation sous forme directe I.

**Problème :** Trouver l'équation différentielle correspondant à la description du système représenté sur la figure 1.54.

**Réponse :**  $\frac{d^2 y}{dt^2} + 3y = \frac{dx}{dt} + 2\frac{d^2 x}{dt^2}$

On peut utiliser les représentations sous forme de schéma-blocs des systèmes LIT à variation temporelle continue pour effectuer des simulations

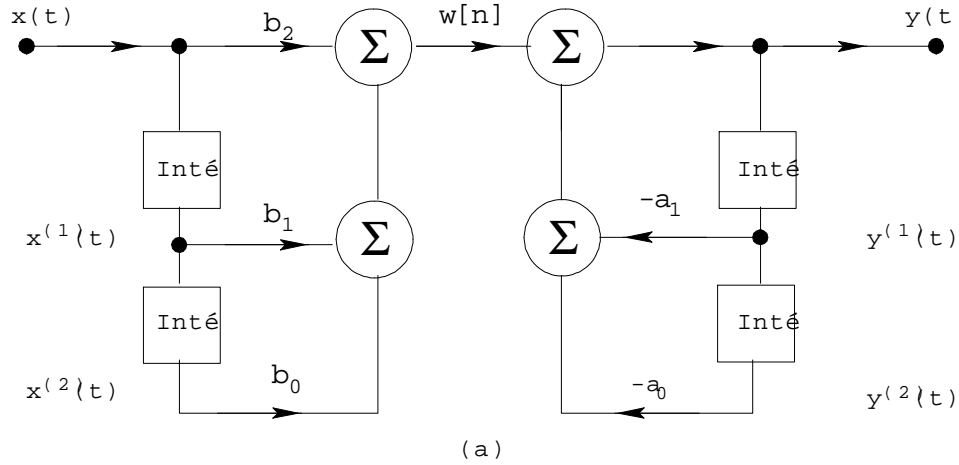


FIG. 1.52 – Représentation d'un système d'ordre 2 sous forme intégrale

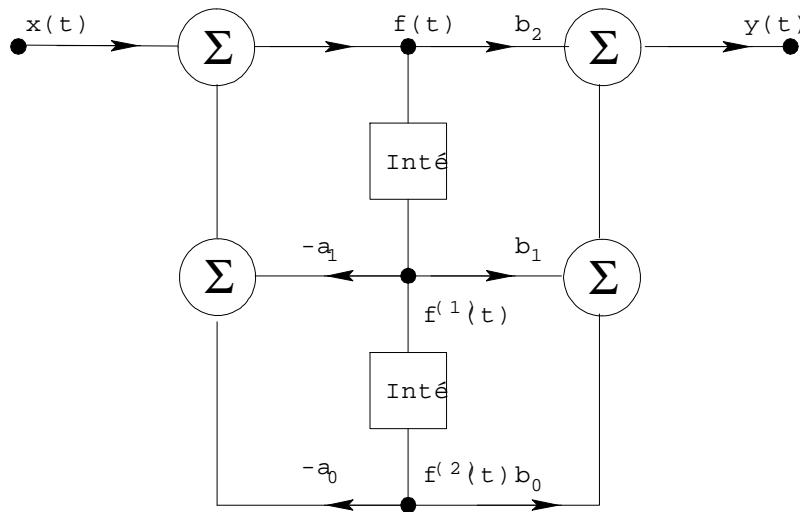


FIG. 1.53 – Représentation d'un système d'ordre 2 sous forme intégrale

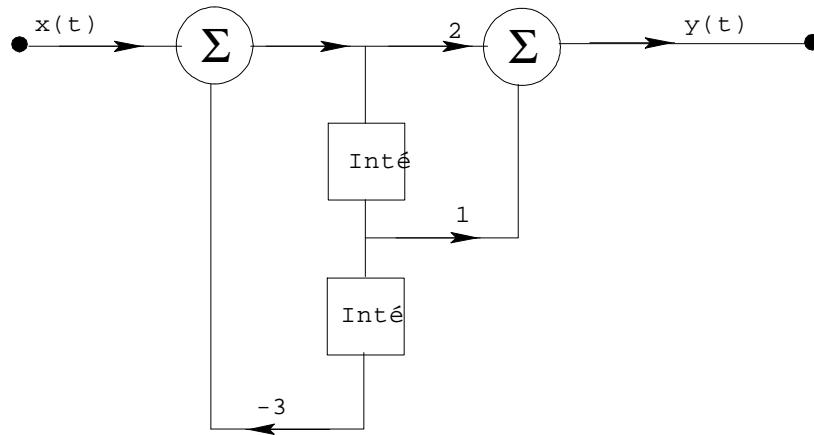


FIG. 1.54 – Représentation sous forme de schéma bloc du problème.

analogiques de ces systèmes. Dans cette simulation, les signaux sont préférentiellement des tensions. Les résistances sont utilisées pour implémenter l'opérateur "multiplication par une constante", les intégrateurs sont construits à partir de résistances, de condensateurs et d'opérateurs opérationnels. Les conditions initiales sont spécifiées comme tensions initiales des intégrateurs. Les simulations à l'aide de calculateurs analogiques sont beaucoup plus pénibles que les simulations à l'aide de calculateurs numériques; elles sont de plus sujettes à une dérive dans le temps. Ces problèmes pratiques sont éliminés en simulant les systèmes à variation temporelle continue sur des calculateurs digitaux en utilisant des approximations numériques pour les opérations d'intégration ou de dérivation. Cependant, lors de simulations avec des calculateurs numériques, on doit faire attention à ne pas perdre en précision.