Chapitre 2

Suites et limites

2.1 Exercices

1. **Calcul des limites I.**
   (a) Calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{n}{n+2}$.

   (b) Calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{n^2+1}{4n^2+5}$.

   (c) Calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{\sqrt{n^2+2}}{2n}$.

   (d) Calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{\cos\sqrt{n}}{n}$.

   (e) Calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} n\sin\frac{1}{n^2}$.

   (f) Calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} n^2\cos\frac{1}{n^2}\sin\frac{1}{n^3}$.

   (g) Calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{\sin(n+1)-\sin(n-1)}{\cos(n+1)+\cos(n-1)}$.

   (h) Calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{\sin(n+1)+\sin(n-1)}{\sin n}$.

   (i) Calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{\sin\sqrt{n^3+n^2+1}}{n^3+n^2+1}$.

   (j) Calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{\sqrt{n^2+1}-\sqrt{n^2+4}}{2}$.

   (k) Calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} (\sqrt{n^2+7}-\sqrt{(n+3)(n+6)})$.

   (l) Calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} n(\sqrt{n^4+4n+5}-n^2)$.

   (m) Calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt{n}(\sqrt{n^3+n}-\sqrt{n^3+1})$.

   (n) Calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{n^3}{7^n}\cos\sqrt{n}$.

   (o) Calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{2^n}{n!}$.

   (p) Calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} 3^n e^{-3n}$.

   (q) Calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} (1+\frac{2}{n})^n$.

   (r) Calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} (1-\frac{1}{n})^n$.

(s) Calculer $\lim\limits_{n\to+\infty}(1-\frac{1}{n^2})^n$.

(t) Calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} n^3(1-\cos\frac{1}{n})\sin\frac{1}{n}$.

2. **Calcul des limites II.**

   (a) Calculer en fonction de $x\in\mathbb{R}$: $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{1}{1+n^2x^2}$.

   (b) Calculer en fonction de $x\in\mathbb{R}$: $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{1-n^2x^3}{1+n^2x^2}$.

   (c) Calculer en fonction de $x\in\mathbb{R}$, $x\neq-1$: $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{x^n-1}{x^n+1}\right)^2$.

   (d) Calculer en fonction de $x>0$: $\lim\limits_{n\to+\infty}\sqrt{n}(\sqrt[n]{x}-1)$.

3. **Convergence I*.** Soit (x_n) une suite convergente et (y_n) la suite définie par $y_n=x_{n+1}-x_n$. Montrer à l'aide de la définition d'une suite convergente que la suite (y_n) converge et donner sa limite.

4. **Convergence II*.** Donner un exemple d'une suite (x_n) telle que la suite (y_n) définie par $y_n=x_{n+1}-x_n$ converge vers 0 mais la suite (x_n) est divergente.

5. **Nonexistence d'une limite*.** Montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty}\sin n$ n'existe pas.

6. **Suite géométrique.** Soit (x_n) la suite définie par la $x_{n+1}=qx_n$ et $x_0=a$ où a et q sont réels. Montrer que $x_n=aq^n$ pour tout $n\in\mathbb{N}$.

7. **Une suite majorée par une suite géométrique.** Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite telle que pour tout entier naturel n

   $$|x_{n+1}|\leq q|x_n|$$

   pour une constante $q\in]0,1[$. Montrer par récurrence que pour tout entier naturel n

   $$|x_n|\leq q^n|x_0|.$$

   En déduire que (x_n) converge et donner sa limite.

8. **Suites récurrentes nonlinéaires I.**

   (a) Calculer la limite de la suite (x_n) définie par

   $$x_{n+1}=\frac{1}{4}(3x_n+1),\quad x_0=0$$

   (b) Calculer la limite de la suite (x_n) définie par

   $$x_{n+1}=\frac{1}{4}(x_n+4),\quad x_0=0$$

(c) Calculer la limite de la suite (x_n) définie par

$$x_{n+1} = \frac{x_n + 1}{3x_n + 1}, \quad x_0 = 1$$

(d) Calculer la limite de la suite (x_n) définie par

$$x_{n+1} = \frac{1}{1 + x_n}, \quad x_0 = 0$$

(e) Calculer la limite de la suite (x_n) définie par

$$x_{n+1} = \sqrt{3x_n}, \quad x_0 = 1$$

9. **Suites récurrentes linéaires d'ordre 2.**

(a) Calculer la limite de la suite (x_n) définie par

$$x_{n+1} = \frac{1}{2}(x_n + x_{n-1}), \quad x_0 = 0, \quad x_1 = 1$$

(b) Calculer la limite de la suite (x_n) définie par

$$x_{n+1} = \frac{1}{4}(5x_n - x_{n-1}), \quad x_0 = 0, \quad x_1 = 1$$

(c) Montrer que la suite (x_n) définie par

$$x_{n+1} = 5x_n - 4x_{n-1}, \quad x_0 = 0, \quad x_1 = 1$$

est divergente.

10. **Récurrence logistique - la route vers le chaos.** On considère la suite (x_n) définie par

$$x_{n+1} = \mu x_n(1 - x_n), \quad x_0 \in [0, 1]$$

pour un paramètre $\mu \in]0, 4]$. Montrer que $x_n \in [0, 1]$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

(a) Exemple $\mu = 1$. Montrer que pour tout $x_0 \in [0, 1]$

$$\lim_{n\to+\infty} x_n = 0.$$

(b) Exemple $\mu = 2$. Montrer que pour tout $x_0 \in [0, 1]$ la suite (x_n) est donnée par

$$x_n = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}(1 - 2x_0)^{2^n}.$$

Montrer ensuite que pour tout $x_0 \in]0, 1[$

$$\lim_{n\to+\infty} x_n = \frac{1}{2}.$$

(c) Exemple $\mu = 4$. On définit θ_0 par $x_0 = \sin^2 \theta_0$. Montrer que pour tout $x_0 \in [0, 1]$

$$x_n = \sin^2(2^n \theta_0).$$

Calculer $\lim_{n\to+\infty} x_n$ pour tout θ_0 de la forme $\theta_0 = \frac{\pi}{2^k}$ et $k \in \mathbb{N}$.
Calculer $\lim_{n\to+\infty} x_n$ pour tout θ_0 de la forme $\theta_0 = \frac{\pi}{3 \cdot 2^k}$ et $k \in \mathbb{N}$.
Donner la suite (x_n) si $x_0 = \sin^2 \frac{\pi}{5}$, i.e. $\theta_0 = \frac{\pi}{5}$.
Facultatif pour voir plus : Etudier numériquement le comportement de x_n pour d'autres conditions initiales x_0.

2.2 Corrigés

1. **Calcul des limites.**
   (a) $\lim_{n\to+\infty} \frac{n}{n+2} = 1$.
   (b) $\lim_{n\to+\infty} \frac{n^2+1}{4n^2+5} = \frac{1}{4}$.
   (c) $\lim_{n\to+\infty} \frac{\sqrt{n^2+2}}{2n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{n\sqrt{2+2/n^2}}{2n} = \frac{1}{2}$.
   (d) $\lim_{n\to+\infty} \frac{\cos \sqrt{n}}{n} = 0$.
   (e) $\lim_{n\to+\infty} n \sin \frac{1}{n^2} = 0$ car $0 \leq \sin \frac{1}{n} \leq \frac{1}{n}$.
   (f) $\lim_{n\to+\infty} n^2 \cos \frac{1}{n^2} \sin \frac{1}{n^3} = 0$.
   (g) $\lim_{n\to+\infty} \frac{\sin(n+1)-\sin(n-1)}{\cos(n+1)+\cos(n-1)} = \lim_{n\to+\infty} \frac{2\cos n \sin 1}{2 \cos n \cos 1} = \tan 1$.
   (h) $\lim_{n\to+\infty} \frac{\sin(n+1)+\sin(n-1)}{\sin n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{2 \sin n \cos 1}{\sin n} = 2\cos 1$.
   (i) $\lim_{n\to+\infty} \frac{\sin \sqrt{n^3+n^2+1}}{n^3+n^2+1} = 0$.
   (j) $\lim_{n\to+\infty} \frac{\sqrt{n^2+1}-\sqrt{n^2+4}}{2} = \lim_{n\to+\infty} \frac{-3}{2(\sqrt{n^2+1}+\sqrt{n^2+4})} = 0$.
   (k) $\lim_{n\to+\infty} (\sqrt{n^2+7} - \sqrt{(n+3)(n+6)}) = -\frac{9}{2}$.
   (l) $\lim_{n\to+\infty} n(\sqrt{n^4+4n+5} - n^2) = 2$.
   (m) $\lim_{n\to+\infty} \sqrt{n}(\sqrt{n^3+n} - \sqrt{n^3+1}) = \frac{1}{2}$.
   (n) $\lim_{n\to+\infty} \frac{n^3}{7^n} \cos \sqrt{n} = 0$.
   (o) $\lim_{n\to+\infty} \frac{2^n}{n!} = 0$.
   (p) $\lim_{n\to+\infty} 3^n e^{-3n} = 0$.
   (q) $\lim_{n\to+\infty} (1+\frac{2}{n})^n = \lim_{n\to+\infty} (1+\frac{1}{n})^n (1+\frac{1}{n+1})^{n+1} \frac{n+1}{n+2} = e^2$.
   (r) $\lim_{n\to+\infty} (1-\frac{1}{n})^n = \lim_{n\to+\infty} \frac{n-1}{n} \frac{1}{(1+\frac{1}{n-1})^{n-1}} = \frac{1}{e}$.
   (s) $\lim_{n\to+\infty} (1-\frac{1}{n^2})^n = \lim_{n\to+\infty} (1-\frac{1}{n})^n (1+\frac{1}{n})^n = 1$.
   (t) $\lim_{n\to+\infty} n^3 (1-\cos \frac{1}{n}) \sin \frac{1}{n} = \frac{1}{2}$.