Énoncés des exercices

Exercice 1 [Indication] [Correction]

Soient m, n, p des entiers naturels.

1. Montrer que $1 \leq m \leq n \Rightarrow (1+\dfrac{1}{n})^m < 1+\dfrac{m}{n}+(\dfrac{m}{n})^2$.
2. En déduire $(1+\dfrac{1}{n})^n < 3$, puis $(1+\dfrac{p}{n})^n < 3^p$.

Exercice 2 [Indication] [Correction]

Soit $x_1, x_2, \ldots, x_n$ une famille de réels de $[0,1]$.

Prouver l'inégalité $\displaystyle\prod_{k=1}^{n}(1-x_k) \geq 1-\sum_{k=1}^{n} x_k$.

Exercice 3 [Indication] [Correction]

On considère les réels $a_1 \geq a_2 \geq \ldots \geq a_n \geq 0$ et $b_1 \geq b_2 \geq \ldots \geq b_n \geq 0$.
Montrer que $(a_1+a_2+\cdots+a_n)(b_1+b_2+\cdots+b_n) \leq n(a_1b_1+a_2b_2+\cdots+a_nb_n)$.

Exercice 4 [Indication] [Correction]

Soient $x_1, x_2, \ldots, x_n$ dans $\mathbb{R}^+$, et $y_1, y_2, \ldots, y_n$ dans $\mathbb{R}^{+*}$.

Montrer que $\min\Bigl(\dfrac{x_1}{y_1}, \dfrac{x_2}{y_2}, \ldots, \dfrac{x_n}{y_n}\Bigr) \leq \dfrac{x_1+x_2+\ldots+x_n}{y_1+y_2+\ldots+y_n} \leq \max\Bigl(\dfrac{x_1}{y_1}, \dfrac{x_2}{y_2}, \ldots, \dfrac{x_n}{y_n}\Bigr)$.

Indications ou résultats

Indication pour l'exercice 1 [Retour à l'énoncé]

1. On procède par une récurrence finie sur l'entier m, avec $n \geq 1$ fixé.

   Passer par l'inégalité $(1+\frac{1}{n})^{m+1} < 1 + \frac{m+1}{n} + \frac{m^2+m}{n^2} + \frac{m^2}{n^3}$.
2. Que donne la question précédente si $m = n$?

   Pour tout $p \geq 1$, on a $(1+\frac{1}{n})^p = 1 + \frac{p}{n}$.

   On conclut par élévation à la puissance n.

Indication pour l'exercice 2 [Retour à l'énoncé]

Récurrence facile sur l'entier $n \geq 1$.

Indication pour l'exercice 3 [Retour à l'énoncé]

Poser $A_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$, $\quad B_n = \sum_{k=1}^{n} b_k \quad$ et $\quad S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k b_k$.

Par hypothèse $A_n B_n \leq n S_n$ et on veut $(A_n + a_{n+1})(B_n + b_{n+1}) \leq (n+1)(S_n + a_{n+1}b_{n+1})$.

Par différence prouver : $(n+1)(S_n + a_{n+1}b_{n+1}) - (A_n + a_{n+1})(B_n + b_{n+1}) \geq nS_n - A_n B_n$.

Indication pour l'exercice 4 [Retour à l'énoncé]

On procède par récurrence sur n. Il est essentiel de traiter le cas $n = 2$.

Corrigés des exercices

Corrigé de l'exercice 1 [Retour à l'énoncé]

1. On procède par une récurrence finie sur l'entier m, avec $n \geq 1$ fixé.

   La propriété est évidente si $m = 1$.

   Soit m un entier compris entre 1 et $n - 1$. On suppose que $(1 + \frac{1}{n})^m < 1 + \frac{m}{n} + (\frac{m}{n})^2$.

   On en déduit : $(1 + \frac{1}{n})^{m+1} < (1 + \frac{1}{n}) \left(1 + \frac{m}{n} + (\frac{m}{n})^2\right)$.

   Autrement dit : $(1 + \frac{1}{n})^{m+1} < 1 + \frac{m+1}{n} + \frac{m^2+m}{n^2} + \frac{m^2}{n^3}$.

   Mais $m < n \Rightarrow m^2 < n(m+1)$. Il en découle $\frac{m^2}{n^3} < \frac{m+1}{n^2}$.

   On en déduit $(1 + \frac{1}{n})^{m+1} < 1 + \frac{m+1}{n} + \frac{m^2+2m+1}{n^2} = 1 + \frac{m+1}{n} + \frac{(m+1)^2}{n^2}$.

   Cela prouve la propriété au rang $m + 1$ et achève la récurrence.

2. Dans le cas particulier $m = n$, on trouve bien sûr : $(1 + \frac{1}{n})^n < 3$.

   Pour tout $p \geq 1$, on a $(1 + \frac{1}{n})^p = 1 + \frac{p}{n} + \sum\limits_{k=2}^{p} \mathrm{C}_p^k \frac{1}{n^k} \geq 1 + \frac{p}{n}$.

   On en déduit, par élévation à la puissance n :

   $(1 + \frac{p}{n})^n \leq (1 + \frac{1}{n})^{np} = \left((1 + \frac{1}{n})^n\right)^p < 3^p$.

Corrigé de l'exercice 2 [Retour à l'énoncé]

On procède par récurrence sur l'entier $n \geq 1$. C'est évident si $n = 1$.

C'est vrai pour $n = 2$ car : $(1 - x_1)(1 - x_2) = 1 - (x_1 + x_2) + x_1x_2 \geq 1 - (x_1 + x_2)$.

On suppose que le résultat est établi au rang $n \geq 2$.

On se donne $x_1, \ldots, x_n, x_{n+1}$ dans $[0, 1]$.

On trouve : $\displaystyle\prod_{k=1}^{n+1}(1 - x_k) = (1 - x_{n+1}) \prod_{k=1}^{n}(1 - x_k) \geq (1 - x_{n+1}) \left(1 - \sum_{k=1}^{n} x_k\right)$

Ainsi : $\displaystyle\prod_{k=1}^{n+1}(1 - x_k) \geq 1 - \sum_{k=1}^{n+1} x_k + x_{n+1} \sum_{k=1}^{n} x_k \geq 1 - \sum_{k=1}^{n+1} x_k$.

On a ainsi prouvé la propriété au rang $n + 1$, ce qui achève la récurrence.

CORRIGÉ DE L'EXERCICE 3 [Retour à l'énoncé]

La propriété est évidente si $n = 1$.

Supposons qu'elle soit vraie pour un certain entier $n \geq 1$.

On se donne les réels $\begin{cases} a_1 \geq a_2 \geq \ldots \geq a_n \geq a_{n+1} \geq 0 \\ b_1 \geq b_2 \geq \ldots \geq b_n \geq b_{n+1} \geq 0 \end{cases}$

Posons $A_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$, $B_n = \sum_{k=1}^{n} b_k$ et $S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k b_k$. Par hypothèse $A_n B_n \leq n S_n$.

On doit prouver $(A_n + a_{n+1})(B_n + b_{n+1}) \leq (n+1)(S_n + a_{n+1}b_{n+1})$.

On évalue la différence entre les deux termes à comparer :

$$\begin{aligned}
&(n+1)(S_n + a_{n+1}b_{n+1}) - (A_n + a_{n+1})(B_n + b_{n+1}) \\
&= nS_n - A_nB_n + S_n + na_{n+1}b_{n+1} - a_{n+1}B_n - b_{n+1}A_n \\
&= nS_n - A_nB_n + \sum_{k=1}^{n}(a_kb_k + a_{n+1}b_{n+1} - a_{n+1}b_k - b_{n+1}a_k) \\
&= nS_n - A_nB_n + \sum_{k=1}^{n} \underbrace{(a_k - a_{n+1})(b_k - b_{n+1})}_{\geq 0} \geq nS_n - A_nB_n \geq 0
\end{aligned}$$

On a ainsi prouvé la propriété au rang n, ce qui achève la récurrence.

CORRIGÉ DE L'EXERCICE 4 [Retour à l'énoncé]

La propriété est évidente si $n = 1$.

Pour la prouver au rang $n = 2$, on peut supposer $\frac{x_1}{y_1} \leq \frac{x_2}{y_2}$ c'est-à-dire $x_1y_2 \leq x_2y_1$.

Il s'agit alors d'établir $\frac{x_1}{y_1} \leq \frac{x_1 + x_2}{y_1 + y_2} \leq \frac{x_2}{y_2}$.

Or $\frac{x_2}{y_2} - \frac{x_1 + x_2}{y_1 + y_2} = \frac{x_2y_1 - y_2x_1}{y_2(y_1 + y_2)} \geq 0$ et $\frac{x_1 + x_2}{y_1 + y_2} - \frac{x_1}{y_1} = \frac{x_2y_1 - y_2x_1}{y_1(y_1 + y_2)} \geq 0$.

On a donc prouvé la propriété au rang 2.

On suppose maintenant que la propriété est vraie au rang n, avec $n \geq 2$.

On se donne $x_1, x_2, \ldots, x_n, x_{n+1}$ dans $\mathbb{R}^+$ et $y_1, y_2, \ldots, y_n, y_{n+1}$ dans $\mathbb{R}^{+*}$.

Notons $X_n = x_1 + x_2 + \cdots + x_n$ et $Y_n = y_1 + y_2 + \cdots + y_n$.

La démonstration au rang 2 a montré que : $\min\left(\frac{X_n}{Y_n}, \frac{x_{n+1}}{y_{n+1}}\right) \leq \frac{X_n + x_{n+1}}{Y_n + y_{n+1}} \leq \max\left(\frac{X_n}{Y_n}, \frac{x_{n+1}}{y_{n+1}}\right)$

Par hypothèse de récurrence, on a : $\min\left(\frac{x_1}{y_1}, \frac{x_2}{y_2}, \ldots, \frac{x_n}{y_n}\right) \leq \frac{X_n}{Y_n} \leq \max\left(\frac{x_1}{y_1}, \frac{x_2}{y_2}, \ldots, \frac{x_n}{y_n}\right)$.

On en déduit $\min\left(\frac{x_1}{y_1}, \frac{x_2}{y_2}, \ldots, \frac{x_n}{y_n}, \frac{x_{n+1}}{y_{n+1}}\right) \leq \frac{X_n + x_{n+1}}{Y_n + x_{n+1}} \leq \max\left(\frac{x_1}{y_1}, \frac{x_2}{y_2}, \ldots, \frac{x_n}{y_n}, \frac{x_{n+1}}{y_{n+1}}\right)$

Ce qui prouve la propriété au rang $n+1$ et achève la récurrence.