Université de Tlemcen | **Faculté des Sciences** | **Janvier 2015**

Première année ST (S1) | **Examen Final de Math1** | **Durée 01H30**

L'usage de tout ***appareil électronique*** *est strictement* ***interdit***

Exercice 1: *Soit* (u_n) *la suite numérique définie par :*

$$u_0 = 1 \quad et, \quad \forall n \in \mathbb{N}: \ u_{n+1} = \sqrt{2 + u_n}\,.$$

1. *Calculer les termes* u_1 *et* u_2.
2. *Démontrer que pour tout entier naturel n :* $0 < u_n < 2$.
3. *Etudier la monotonie de la suite* (u_n).
4. *En déduire que la suite* (u_n) *est convergente et calculer sa limite.*

Exercice 2: *Soit* f *la fonction numérique de la variable réelle* x *définie par :*

$$f(x) = \frac{x\ \ln(1+x^2)}{\sin x}\,.$$

1. *Déterminer le domaine de définition* D_f *de* f.
2. *Calculer* $f(1)$ *et* $f(-1)$.
3. *Etudier la parité de la fonction f.*
   La fonction f est –elle injective ?
4. *Calculer* $\lim_{x\to 0} f(x)$.
5. *En déduire que la fonction f est prolongeable par continuité en 0.*
   Soit F ce prolongement, écrire l'expression de $F(x)$.
6. *Soit la fonction* $g: [-1,\ 1] \longrightarrow \mathbb{R}$
   $$x \longmapsto g(x) = F(x).$$
   a. *Etudier la dérivabilité de g en 0.*
   b. *Montrer que g admet un extremum dans l'intervalle* $]-1,\ 1[$.

$$(C.-\text{à}-d.:\ \ \exists x_0 \in\ ]-1,\ 1[\,;\ \ g'(x_0) = 0.)$$

Exercice 3: *1. Décomposer en éléments simples la fonction rationnelle :*

$$t \longmapsto \frac{1}{t^2 - 3t + 2}\,.$$

2. Calculer l'intégrale indéfinie suivante :

$$\int \frac{dx}{\cos x - 3\sin x + 3}\,.$$

Barème: *Exercice 1 : 6 pts* *Exercice 2 : 8 pts* *Exercice 3 : 6 pts*

Bon courage

Université de Tlemcen	***Faculté des Sciences***	***Janvier 2015***
Première année ST (S1)	**Examen Final de Math1**	**Durée 01H30**

Corrigé

Exercice 1(6pts) : *(u_n) est la suite la suite numérique définie par :*

$$u_0 = 1 \quad et, \quad \forall n \in \mathbb{N}: \ u_{n+1} = \sqrt{2 + u_n}\,.$$

1. $u_1 = \sqrt{2+u_0} = \sqrt{3}$, $u_2 = \sqrt{2+u_1} = \sqrt{2+\sqrt{3}}.$ **2x0,5 pt**
2. *Montrons que ,* $\forall n \in \mathbb{N}: \ 0 < u_n < 2.$

   Par récurrence : - On a : $0 < u_0 < 2$ *car* $u_0 = 1.$ **0,5 pt**

   - *Supposons que pour n fixé :* $0 < u_n < 2$ *,*

   et montrons que : $0 < u_{n+1} < 2.$

   On a: $0 < u_n < 2 \Longrightarrow 2 < 2 + u_n < 4 \Longrightarrow \sqrt{2} < \sqrt{2+u_n} < 2$

   $\Longrightarrow \sqrt{2} < u_{n+1} < 2.$ **0,5 pt**

   Ce qui implique que, $0 < u_{n+1} < 2.$ **0,5 pt**

   Ainsi, $\forall n \in \mathbb{N}: \ 0 < u_n < 2.$
3. *Monotonie de (u_n) : On a de la question 1. :* $u_0 < u_1 < u_2.$

   Montrons alors que (u_n) est croissante, c.à.d: $\forall n \in \mathbb{N}: \ u_n < u_{n+1}$.

   Par récurrence : - On a déjà, $u_0 < u_1.$ **0,5 pt**

   - *Supposons que pour n fixé :* $u_n < u_{n+1}$ *,*

   et montrons que : $u_{n+1} < u_{n+2}$

   On a : $u_n < u_{n+1} \Longrightarrow 2 + u_n < 2 + u_{n+1} \Longrightarrow \sqrt{2+u_n} < \sqrt{2+u_{n+1}}.$ **0,5**

   Ceci donne : $u_{n+1} < u_{n+2}.$ **0,5 pt**

   Ainsi , $\forall n \in \mathbb{N}: \ u_n < u_{n+1}$. *La suite (u_n) est donc croissante.*
4. *La suite (u_n) est croissante et majorée par 2,* **2x0,5 pt**

   donc elle est convergente.

   Soit l la limite de la suite (u_n) :

   $$l = \lim_{n\to\infty} u_n = \lim_{n\to\infty} u_{n+1} = \lim_{n\to\infty} \sqrt{2+u_n} = \sqrt{2+l} \qquad \mathbf{0,25\ pt}$$

   $$l = \sqrt{2+l} \Leftrightarrow \left(l \geq 0 \quad et \quad l^2 = 2 + l\right)$$

   $$\Leftrightarrow (l \geq 0 \ \ et \ \ l^2 - l - 2 = 0)$$

   $$\Leftrightarrow (l \geq 0 \ \ et, \ \ l = -1 \ ou \ \ l = 2\,). \quad \mathbf{0,5\ pt}$$

   Ainsi, $l = 2$ *c.à.d. :* $\lim_{n\to\infty} u_n = 2.$ **0,25 pt**

Université de Tlemcen **_Faculté des Sciences_** **_Janvier 2015_**

Première année ST (S1) **Examen Final de Math1** **Durée 01H30**

Corrigé

Exercice 2(8pts): *Soit* $f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$, *la fonction définie par :*

$$f(x)=\frac{x\ \ln(1+x^2)}{\sin x}.$$

1. $f\ est\ définie \Leftrightarrow \sin x\neq 0 \Leftrightarrow x\neq k\pi,\ (k\in\mathbb{Z}).$

$$D_f=\mathbb{R}-\{k\pi,\ k\in\mathbb{Z}\}. \qquad \textbf{1pt}$$

2.

$$f(1)=\frac{\ln 2}{\sin 1},\qquad f(-1)=\frac{-\ln 2}{\sin(-1)}=\frac{-\ln 2}{-\sin 1}=\frac{\ln 2}{\sin 1}.\qquad \mathbf{2x0,5pt}$$

(Car la fonction $x\longmapsto\sin x$, *est impaire.)*

Parité de la fonction f : Soit $x\in D_f$, *alors,* $-x\in D_f$ **(0,5pt)** *et on a :*

$$f(-x)=\frac{-x\ \ln(1+(-x)^2)}{\sin(-x)}=\frac{-x\ \ln(1+x^2)}{-\sin x}=\frac{x\ \ln(1+x^2)}{\sin x}=f(x).\ \ \mathbf{0,5}$$

Ainsi la fonction f est paire.

- *f n'est pas injective* **(0,5pt)**, *car elle est paire, d'ailleurs d'après la question 2.* $f(1)=\ f(-1).$ $\mathbf{0,5pt}$

3. $\lim_{x\to0}f(x)=\lim_{x\to0}\frac{x\ \ln(1+x^2)}{\sin x}=\lim\limits_{x\to0}\left(\frac{x}{\sin x}\right)\lim\limits_{x\to0}\ln(1+x^2)=1\times0=0.$

   (car $\lim\limits_{x\to0}\frac{x}{\sin x}=\lim\limits_{x\to0}\frac{\sin x}{x}=1.$*)* **(1pt sur le calcul de** $\lim_{x\to0}f(x)$ **)**

4. *La limite de f en 0 existe et est finie donc f est prolongeable par continuité en 0.* $(\mathbf{0,5pt})$. *Le prolongement F de f en 0 est défini par :*

$$F(x)=\frac{x\ \ln(1+x^2)}{\sin x}\quad si\ x\neq0,\qquad et\ \ F(0)=0.\quad(\mathbf{0,5pt})$$

$$(D_F=\mathbb{R}-\{k\pi,\qquad k\in\mathbb{Z}^*\})$$

5. $g\colon[-1,\ 1]\longrightarrow\mathbb{R}\ ,\ \ x\longmapsto g(x)=F(x).$

   a. *Dérivabilité de g en 0 :*

$$\lim_{x\to0}\frac{g(x)-g(0)}{x-0}=\lim_{x\to0}\frac{F(x)-F(0)}{x-0}=\lim_{x\to0}\frac{\frac{x\ \ln(1+x^2)}{\sin x}}{x}=\lim_{x\to0}\frac{\ln(1+x^2)}{\sin x}\quad \mathbf{0,5pt}$$

On est devant une forme indéterminée (0/0), on peut utiliser la règle de l'Hospital.

$$\lim_{x\to0}\frac{(\ln(1+x^2))'}{(\sin x)'}=\lim_{x\to0}\frac{\frac{2x}{1+x^2}}{\cos x}=0.$$

Ainsi, $\lim\limits_{x\to0}\frac{g(x)-g(0)}{x-0}=0,$ *et g est dérivable en 0 et* $g'(0)=\ 0.$ $(\mathbf{0,5pt})$

b. Montrons que g admet un extremum dans l'intervalle $]-1,\ 1[$.

On applique le théorème de Rolle :

- *g est définie sur* $[-1,\ 1]$, **(0,25 pt)**
- *dérivable sur* $]-1,\ 1[$, **(0,25 pt)** *et,*

$$g(1) = g(-1) = \frac{\ln 2}{\sin 1}. \qquad (\mathbf{0,25\ pt})$$

Ainsi d'après le théorème de Rolle : $\exists x_0 \in\ ]-1,\ 1[\ ;\ g'(x_0) = 0.$ **(0,25 pt)**

Exercice 3(6pts): *1. On décompose en éléments simples la fonction rationnelle :*

$$t \longmapsto \frac{1}{t^2-3t+2}\ .$$

$t^2 - 3t + 2 = (t-1)(t-2)$, $(\mathbf{0,25pt})$, *d'où* $\frac{1}{(t-1)(t-2)} = \frac{a}{t-1} + \frac{b}{t-2}$ $(\mathbf{0,5pt})$

Calcul de a: $\frac{1}{t-2} = a + (t-1)\frac{b}{t-2}$, *En prenant t=1, on trouve ;* $a = -1.$ **(0,5pt)**

Calcul de b: $\frac{1}{t-1} = (t-2)\frac{a}{t-1} + b$, *En prenant t=2, on trouve ;* $b = 1.$ **(0,5pt)**

Ainsi : $$\frac{1}{t^2-3t+2} = \frac{1}{t-2} - \frac{1}{t-1}.\ \ (\mathbf{0,25pt})$$

2. Calculons l'intégrale : $\int \frac{dx}{\cos x - 3\sin x + 3}$.

On utilise le changement de variable : $t = \mathrm{tg}\left(\frac{x}{2}\right)$, *d'où :* **(4x0,25pt)**

$$\cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2},\quad \sin x = \frac{2t}{1+t^2} \qquad et \quad dx = \frac{2dt}{1+t^2}.$$

$$D'où, \int \frac{dx}{\cos x - 3\sin x + 3} = \int \frac{\frac{2dt}{1+t^2}}{\frac{1-t^2}{1+t^2} - 3\frac{2t}{1+t^2} + 3} = \int \frac{2dt}{1-t^2-6t+3+3t^2} = \int \frac{dt}{t^2-3t+2},\ \ (\mathbf{1pt})$$

$$et \qquad \int \frac{dt}{t^2-3t+2} = \int \left(\frac{1}{t-2} - \frac{1}{t-1}\right) dt$$

$$= \ln(t-2) - \ln(t-1) + C, (\ C\!: cste\ réelle) \qquad (\mathbf{1pt})$$

Finalement :

$$\int \frac{dx}{\cos x - 3\sin x + 3} = \ln\left[\mathrm{tg}\left(\frac{x}{2}\right) - 2\right] - \ln\left[\mathrm{tg}\left(\frac{x}{2}\right) - 1\right] + C. \quad (\mathbf{1pt})$$

Université de Tlemcen ***Faculté des Sciences*** ***Janvier 2015***

Première année ST (S1) **Examen Final de Math1** **Durée 01H30**

Remarques et commentaires :

Exercice 1 : *3. Pour la monotonie de* (u_n)*, on peut étudier le signe de :* $u_{n+1} - u_n$*,*

c.à.d. celui de : $\sqrt{2+u_n} - u_n$*, ce qui revient à étudier le signe de la fonction h :*

$$h(x) = \sqrt{2+x} - x, \quad sur\ [0,\ 2].$$

- Ou bien montrer directement que : $\forall n \in \mathbb{N}:\ u_{n+1} > u_n$.

C.à.d. : $\forall n \in \mathbb{N}: \qquad \sqrt{2+u_n} > u_n$ *,*

Comme $u_n > 0$ *, l'inégalité précédente devient :* $2 + u_n > u_n^2$

c.à.d. : $u_n^2 - u_n - 2 < 0,$ *(avec* $0 < u_n < 2$*.)*

Exercice 2 :

6. b. Pour montrer l'existence d'un extremum, on peut appliquer le théorème des valeurs intermédiaires à la fonction g' sur l'intervalle $[-1,\ 1]$*.*

La fonction g' est continue sur $[-1,\ 1]$*.*

$g'(1)\, g'(-1) < 0,$ *car g' est impaire (puisque g est paire) et que* $g'(1) > 0$.

$$\left(on\ a, \qquad g'(x) = \frac{(\sin x - x\cos x)\ln(1+x^2) + 2x^2 \sin x/(1+x^2)}{\sin^2 x} \right)$$

$$g'(1) = \frac{(\sin 1 - \cos 1)\ln 2 + \sin 1}{\sin^2 1} > 0$$

(car, $\sin 1 > \cos 1 > 1/2$ *, puisque* $\pi/4 < 1 < \pi/3$*).*