Exercice : compression isotherme et changement de phase

Un cylindre muni d'un piston contient une mole d'eau
M = 18g à l'état de vapeur. Les parois du cylindre sont supposées perméables à la chaleur et placées dans un bain dont on peut régler la température T. On considèrera la vapeur, même à l'état de vapeur saturante, comme un gaz parfait.

1) La température étant maintenue à T_0=300K, on comprime la vapeur de manière réversible du volume $V_0=3m^3$ au volume $V_1=0,63m^3$. La vapeur se trouve alors partiellement liquéfiée, la pression étant $P_1=13.10^2$Pa.

a- Calculer le volume V_g où apparaît la première goutte de liquide.

b- Quel est le travail échangé pendant la compression isotherme de V_0 à V_1?

c- Le volume massique de l'eau liquide étant $v_f=1cm^3/g$, calculer la fraction de mole de vapeur d'eau dans l'état P_1, V_1, càd le titre x_1.

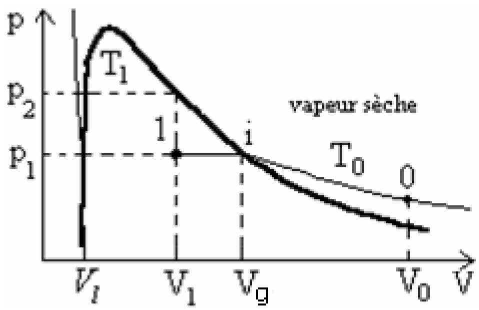
2) Le volume étant fixé à V_1, on élève la température de T_0 à T.

Sachant que la chaleur latente de vaporisation de l'eau varie avec la température selon la loi empirique $L_v = aT + b$ (a=-48,66J/mol/K ; b=56587J/mol).

a- montrer que, si l'on néglige le volume molaire de l'eau liquide devant celui de la vapeur saturante, la pression de vapeur saturante est liée à la température T par une relation de la forme $\ln P_g = A - \frac{B}{T} + C \ln T$.

b- trouver une relation donnant la température T_2 à laquelle la phase liquide disparait (on calculera une valeur approchée de T_2 en posant $T_2 = T_0 + \delta T$ et en considérant $\delta T << T_0$).

Solution :



1a/La vapeur saturant, état i a le comportement du gaz parfait $P_1V_g = P_0V_0 = RT_0$; $V_g = 1{,}92 m^3$

b/ $W = \int_1^2 -PdV = -RT_0 \ln\frac{V_g}{V_0} - P_1(V_1 - V_g)$

$W = 2790 J$

c/ $x = \dfrac{V_1 - Mv_f}{V_g - Mv_f} \approx \dfrac{V_1}{V_g} = 0{,}328$

2a/ Puisque la vapeur est un gaz parfait, alors on a $\dfrac{dP}{P} \approx \dfrac{l_v dT}{RT^2}$

et si l_v=aT+b, on aura : $\ln P = A - \dfrac{B}{T} + C\ln T$, Formule de Dupré,

avec $B = \dfrac{b}{R}$, $C = \dfrac{a}{R}$ et A constante.

b/ $\ln P_1 = \dfrac{a}{R}\ln T_0 - \dfrac{b}{RT_0} + A$; $\ln P_2 = \dfrac{a}{R}\ln T_2 - \dfrac{b}{RT_2} + A$

Soit $\ln\dfrac{P_2}{P_1} = \dfrac{a}{R}\ln\dfrac{T_2}{T_0} - \dfrac{b}{R}(\dfrac{1}{T_2} - \dfrac{1}{T_0})$. D'autre part $P_2V_1 = RT_2$ et

$P_1V_g = RT_0$ donne $\dfrac{P_2}{P_1} = \dfrac{V_gT_2}{V_1T_0} \approx \dfrac{T_2}{xT_0}$. En reportant, on obtient :

$$(1 - \frac{a}{R})\ln\frac{T_2}{T_0} = \ln x - \frac{b}{R}(\frac{1}{T_2} - \frac{1}{T_0})$$

$T_2 = T_0 + \delta T$ $(\delta T << T_0)$ donne $\ln\dfrac{T_2}{T_0} \approx \dfrac{\delta T}{T_0}$ et $\dfrac{1}{T_2} - \dfrac{1}{T_0} \approx -\dfrac{\delta T}{T_0^2}$ soit

$\delta T = (T_0 \ln x)(1 - \dfrac{a}{R} - \dfrac{b}{RT_0})^{-1}$.

A.N. $\delta T = 21K$; $\dfrac{\delta T}{T_0} = 0{,}07 << 1$ (l'application numérique justifie à postériori l'hypothèse faite pour linéariser la résolution à savoir $\delta T << T_0$).