**Université Cadi Ayyad** **Février 2015**
**Faculté des Sciences-Semlalia** **Filière SMA-S1**
**Département de Mathématiques** **Contrôle d'Analyse I**

# Corrigé de l'épreuve d'Analyse I $\dfrac{21}{20}$

**Exercice 1 (6 points)**

1. Pour chaque $x \in \mathbb{R}$, on a

$$\begin{aligned} f\left(x+\frac{1}{2}\right) &= \left[x+\frac{1}{2}\right] + [x+1] - [2x+1] \\ &= \left[x+\frac{1}{2}\right] + [x] + 1 - [2x] - 1 \quad (\text{car } [x+1] = [x]+1) \\ &= \left[x+\frac{1}{2}\right] + [x] - [2x] = f(x) \end{aligned}$$

2. Par récurrence sur $n$, on montre facilement que $\forall n \in \mathbb{N},\ f\left(x+\frac{n}{2}\right) = f(x)$.
   Pour $n \in \mathbb{Z}$, avec $n < 0$, on a $-n > 0$, donc $f\left(x+\frac{n}{2}\right) = f\left(x+\frac{n}{2}+\frac{-n}{2}\right) = f(x)$.
3. Soit $x \in \left[0, \frac{1}{2}\right[$, alors on a $0 \le x < \frac{1}{2},\ 0 \le x+\frac{1}{2} < 1$ et $0 \le 2x < 1,$ donc on aura

$$[x] = \left[x+\frac{1}{2}\right] = [2x] = 0$$

   par suite, $f(x) = 0$.
4. Pour $x \in \mathbb{R}$, on pose $m = [2x]$, donc on aura $0 \le 2x - m < 1$, par suite, $0 \le x - \frac{m}{2} < \frac{1}{2}$.
5. Soit $x \in \mathbb{R}$, alors d'après la question précédente, il existe $m \in \mathbb{Z}$, tel que $0 \le x - \frac{m}{2} < \frac{1}{2}$.
   Donc d'après la question 3), $f\left(x-\frac{m}{2}\right) = 0$ et comme $m \in \mathbb{Z}$, alors d'après la question 2), on a $f\left(x-\frac{m}{2}\right) = f\left(x-\frac{m}{2}+\frac{m}{2}\right) = f(x)$, donc pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = 0$.
6. D'après la questrion précédente, pour chaque $k \in \{0, 1, \ldots, n\}$, on a

$$\begin{aligned} \left[\frac{x+2^k}{2^{k+1}}\right] &= \left[2\frac{x+2^k}{2^{k+1}}\right] - \left[\frac{x+2^k}{2^{k+1}}+\frac{1}{2}\right] \\ &= \left[\frac{x+2^k}{2^k}\right] - \left[\frac{x+2^{k+1}}{2^{k+1}}\right] \end{aligned}$$

Donc, si pour chaque $k \in \{0, 1, \ldots, n\}$, on pose $u_k = \left[\dfrac{x+2^k}{2^k}\right]$, on en déduit que

$$\sum_{k=0}^{n} \left[\frac{x+2^k}{2^{k+1}}\right] = \sum_{k=0}^{n} (u_k - u_{k+1}) = u_0 - u_{n+1}$$

avec $u_0 = [x+1] = [x]+1$ et $u_{n+1} = \left[\dfrac{x+2^{n+1}}{2^{n+1}}\right] = \left[\dfrac{x}{2^{n+1}} + 1\right] = \left[\dfrac{x}{2^{n+1}}\right] + 1$, donc on a

$$\sum_{k=0}^{n} \left[\frac{x+2^k}{2^{k+1}}\right] = [x] - \left[\frac{x}{2^{n+1}}\right]$$

**Exercice 2 (2 points)**

**a)** Soit $l \in \mathbb{R}$, tel que $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = l$, alors pour $\varepsilon = \dfrac{1}{4}$, il existe $N \in \mathbb{N}$, tel que

$$\forall n \in \mathbb{N},\ n \geq N \Longrightarrow |u_n - l| \leq \frac{1}{4}$$

Donc pour $n \geq N$ on a aussi $n+1 \geq N$, donc $|u_n - l| \leq \dfrac{1}{4}$ et $|u_{n+1} - l| \leq \dfrac{1}{4}$, par suite, on aura

$$|u_{n+1} - u_n| = |(u_{n+1} - l) + (l - u_n)| \leq |u_{n+1} - l| + |l - u_n| \leq \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$$

**b)** Supposons que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $u_n \in \mathbb{Z}$ et que $(u_n)_{n\geq 0}$ est convergente.

Comme $(u_n)_{n\geq 0}$ est convergente, alors d'après la question précédente, il existe $N \in \mathbb{N}$, tel que

$$\forall n \in \mathbb{N},\ n \geq N \Longrightarrow |u_{n+1} - u_n| \leq \frac{1}{2}$$

Comme pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $u_n \in \mathbb{Z}$, alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $|u_{n+1} - u_n| \in \mathbb{N}$.

Donc pour $n \geq N$, on a $|u_{n+1} - u_n| \in \mathbb{N}$ et $|u_{n+1} - u_n| \leq \dfrac{1}{2}$, donc pour $n \geq N$, on a $|u_{n+1} - u_n| = 0$. Ainsi on aura

$$\forall n \in \mathbb{N},\ n \geq N \Longrightarrow u_{n+1} = u_n$$

Donc, on obtient

$$\forall n \in \mathbb{N},\ n \geq N \Longrightarrow u_n = u_N$$

ce qui prouve que $(u_n)_{n\geq 0}$ est stationnaire.

**Exercice 3 (5 points)**

**a)** On a $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} = \cos\left(\dfrac{\pi}{2^{n+1}}\right)$, comme $0 < \dfrac{\pi}{2^{n+1}} < \dfrac{\pi}{2}$, alors $\cos\left(\dfrac{\pi}{2^{n+1}}\right) < 1$, donc $(u_n)_{n\geq 2}$ est strictement décroissante.

**b)** Pour chaque $n \in \mathbb{N}$, on a

$$\frac{v_{n+1}}{v_n} = \frac{u_{n+1}}{u_n} \frac{\sin\left(\frac{\pi}{2^{n+1}}\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{2^n}\right)} = \frac{\cos\left(\frac{\pi}{2^{n+1}}\right)\sin\left(\frac{\pi}{2^{n+1}}\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{2^n}\right)} = \frac{\cos\left(\frac{\pi}{2^{n+1}}\right)\sin\left(\frac{\pi}{2^{n+1}}\right)}{2\cos\left(\frac{\pi}{2^{n+1}}\right)\sin\left(\frac{\pi}{2^{n+1}}\right)} = \frac{1}{2}$$

Donc $(v_n)_{n\geq 2}$ est une suite géométrique.
$(v_n)_{n\geq 2}$ est de raison $q = \dfrac{1}{2}$ et de premier terme $v_2 = \dfrac{1}{2}$.

**c)** $(v_n)_{n\geq 2}$ est une suite géométrique de raison $q = \dfrac{1}{2}$ et de premier terme $v_2 = \dfrac{1}{2}$, donc pour tout $n \geq 2$, on a $v_n = v_2 q^{n-2} = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{2}\right)^{n-2} = \dfrac{1}{2^{n-1}}$.

Pour $n \geq 2$, on a $u_n = \dfrac{v_n}{\sin\left(\frac{\pi}{2^n}\right)} = \dfrac{1}{2^{n-1}\sin\left(\frac{\pi}{2^n}\right)}$.

**d)** On a $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{\pi}{2^n} = 0$ et on sait que $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin x}{x} = 0$, donc $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{\sin\left(\frac{\pi}{2^n}\right)}{\frac{\pi}{2^n}} = 1$.

On en déduit donc que $\lim\limits_{n\to+\infty} 2^{n-1}\sin\left(\dfrac{\pi}{2^n}\right) = \dfrac{\pi}{2}\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{\sin\left(\frac{\pi}{2^n}\right)}{\frac{\pi}{2^n}} = \dfrac{\pi}{2}$

Donc $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \dfrac{2}{\pi}$.

**Exercice 4 (8 points)**

1. **a)** $f'(x) = -\dfrac{sh(x)}{ch(x)^2}$.

   On sait, d'après le cours, que pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, on a $sh(x) \geq 0$, donc pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, on a $f'(x) \leq 0$.

| $x$ | $0$ | $+\infty$ |
|---|---|---|
| $f'(x)$ | $-$ | |
| $f(x)$ | $1$ | $0$ |

   **b)** D'après la question précédente, $f$ est strictement décroissante sur $[0,+\infty[$, donc $f$ définit une bijection de $[0,+\infty[$ vers $f([0,+\infty[)$.

   On a $f([0,+\infty[) = ]0,1]$, donc $f$ définit une bijection de $[0,+\infty[$ sur $J$, avec $J = ]0,1]$.

   **c)** Pour tout $x \in J$, on a $f(f^{-1}(x)) = x$, donc $\dfrac{1}{ch(f^{-1}(x))} = x$.

   Par suite, pour tout $x \in J$, on a $ch(f^{-1}(x)) = \dfrac{1}{x}$.

**d)** On a $f(0)=1$, donc pour chaque $x\in ]0,1[$, on a $f^{-1}(x)\neq 0$, donc $f'(f^{-1}(x))\neq 0$, par suite, $f^{-1}$ est dérivable sur $]0,1[$ et on a $\forall x\in ]0,1[$, $(f^{-1})'(x)=\dfrac{1}{f'(f^{-1}(x))}$.

On a donc $(f^{-1})'(x)=-\dfrac{sh(f^{-1}(x))}{ch(f^{-1}(x))^2}$.

On a $f^{-1}(x)\in [0,+\infty[$, donc $sh(f^{-1}(x))\geq 0$, et comme $ch(x)^2-sh(x)^2=1$, alors on aura $sh(f^{-1}(x))=\sqrt{ch(f^{-1}(x))^2-1}$.

Or, d'après c), on a $ch(f^{-1}(x))=\dfrac{1}{x}$, donc on en déduit que $(f^{-1})'(x)=-x\sqrt{1-x^2}$.

2. **a)** On remarque que $\alpha ch(\alpha)=1$, si et seulement si, $f(\alpha)=\alpha$. On est donc amené à considérer la fonction $g(x)=f(x)-x$ qui est continue sur $[0,1]$, car $f$ est continue.

On a $g(0)=1$ et $g(1)=f(1)-1$, donc $f(1)<0$, car $f(1)\in ]0,1[$, ainsi, d'après le théorème des valeurs intermédiaires, il existe $\alpha\in ]0,1[$, tel que $g(\alpha)=0$.

On a $g'(x)=-\dfrac{sh(x)+ch(x)^2}{ch(x)^2}$, donc pour tout $x\in [0,1]$, on a $g'(x)<0$, par suite, $g$ est strictement décroissante sur $[0,1]$, on en déduit que $\alpha$ est unique.

**b)** On a $f'(x)=-\dfrac{sh(x)}{ch(x)^2}=-\dfrac{sh(x)}{1+sh(x)^2}$, donc $|f'(x)|=\dfrac{[sh(x)|}{1+sh(x)^2}$.

On a pour tout $x\in\mathbb{R}$, $(|sh(x)|-1)^2\geq 0$, donc $sh(x)^2-2|sh(x)|+1\geq 0$.

Par suite pour tout $x\in\mathbb{R}$, on a $\dfrac{[sh(x)|}{1+sh(x)^2}\leq\dfrac{1}{2}$.

**c)** Soient $x\in\mathbb{R}$ et $y\in\mathbb{R}$, avec $x<y$, alors d'après le théorème des accroissements finis, il existe $z\in ]x,y[$, tel que $f(y)-f(x)=f'(z)(y-x)$, donc $|f(x)-f(y)|=|f'(z)||x-y|$.

D'après la question précédente, on a $|f'(z)|\leq\dfrac{1}{2}$, donc $|f(x)-f(y)|\leq\dfrac{1}{2}|x-y|$.

**d)** D'après la question précédente, on a $|f(\alpha)-f(0)|\leq\dfrac{1}{2}|\alpha-0|$.

On a $f(\alpha)=\alpha$, $f(0)=1$ et $0<\alpha<1$, donc on en déduit que $1-\alpha\leq\dfrac{1}{2}\alpha$, par suite on a $1\leq\dfrac{3}{2}\alpha$, donc $\dfrac{2}{3}\leq\alpha<1$.