

1. Questions de cours

- (a) Formule de Taylor avec reste intégral
 - (b) Continuité et dérivabilité d'une intégrale dépendant d'un paramètre
 - (c) Sommes de Riemann d'une fonction continue
2. Soit $\sum u_n$ une série réelle semi-convergente (ie convergente sans être absolument convergente). Soit $l \in \overline{\mathbb{R}}$. Montrer qu'il existe une permutation $\varphi : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ telle que $\sum u_{\varphi(n)}$ converge vers l .
3. Faire un développement asymptotique à l'ordre 3 des nombres harmoniques $H_n = 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n}$.

4. Inégalité de Jensen

Soit $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction convexe continue, $f : [0,1] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue. Comparer $\int_0^1 \varphi(f(t))dt$ et $\varphi(\int_0^1 f(t)dt)$.

5. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $f \in \mathcal{C}^0([a,b], \mathbb{R})$ telle que: $\forall k \in \mathbb{N}, k \leq n$, on ait: $\int_a^b t^k f(t)dt = 0$. Montrer que f admet au moins $n + 1$ zéros sur $]a,b[$.

6. Lemme d'Hadamard

Soit $f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. On définit g par: $\forall x \in \mathbb{R}^*, g(x) = \frac{f(x)-f(0)}{x}$, $g(0) = f'(0)$. Montrer que g est de classe \mathcal{C}^∞ sur \mathbb{R} , et préciser les dérivées successives en 0.

7. Pour tout $a \in]-1, +\infty[$, calculer :

$$F(a) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\ln(1 + a \cos x)}{\cos x} dx.$$

8. Irrationalité de π^2

- (a) Soit $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction polynôme à coefficients entiers. On considère la fonction polynôme $h : x \mapsto \frac{x^n g(x)}{n!}$. Montrer que: $\forall k \in \mathbb{N}, h^{(k)}(0)$ est entier.
- (b) On suppose que π^2 est rationnel, ie $\pi^2 = a/b$, où a et b sont des entiers. On pose :

$$f_n : \begin{array}{l} [0,1] \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto \frac{x^n(1-x)^n}{n!} \end{array} .$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, montrer que $I_n = \pi a^n \int_0^1 f_n(x) \sin(\pi x) dx$ est un entier. Conclure.

9. Etude d'une fonction définie par une intégrale

On pose $f(x) = \int_x^{x^2} \frac{dt}{\ln t}$.

- Domaine de définition de f ?
- Dérivée de f , sens de variation.
- Etude au voisinage du point 1 : continuité? dérivabilité?
- Même étude en 0.
- Limite de f en $+\infty$.
- Graphe de la fonction f .

10. Théorème de Weierstrass : une preuve par la convolution

On note \mathcal{E} l'ev des fonction continues de \mathbb{R} dans \mathbb{R} et nulles en dehors d'un compact. On munit \mathcal{E} du produit de convolution \star en définissant, pour tout $(f,g) \in \mathcal{E}^2$ la *convoluée* :

$$\begin{aligned} f \star g : \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto \int_{-\infty}^{+\infty} f(x-t)g(t)dt \end{aligned}$$

(on pourra remarquer que l'intégrale est en fait à borne finies)

(a) Montrer que la loi \star est commutative, et distributive par rapport à l'addition.

(b) Que dire de la régularité de $f \star g$ si :

- f et g sont continues.

- Une des deux fonctions est continue, et l'autre est \mathcal{C}^k .

(c) On appelle *approximation de l'identité* toute suite (χ_n) de fonctions de \mathcal{E} positives vérifiant :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \chi_n(t)dt = 1, \text{ et } \forall \alpha > 0 \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{|t| > \alpha} \chi_n(t)dt = 0.$$

Soit $f \in \mathcal{E}$. Montrer que la suite de fonctions $(f \star \chi_n)$ converge uniformément vers f sur \mathbb{R} .

(d) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose :

$$a_n = \int_{-1}^1 (1-t^2)^n dt, \quad p_n : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \quad t \mapsto \begin{cases} (1-t^2)^n/a_n & \text{si } |t| < 1 \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Montrer que p_n est une approximation de l'identité. Montrer que si f est nulle en dehors de $I = [-1/2, 1/2]$, $f \star p_n$ est une fonction polynôme sur I .

(e) En déduire le théorème de Weierstrass : si J est un segment de \mathbb{R} et si $f : J \rightarrow \mathbb{R}$ est continue, alors f est limite uniforme sur J d'une suite de fonctions polynômes.

(f) Application : Soit $f : [0,1] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue, telle que, $\forall n \in \mathbb{N}$, $\int_0^1 f(t)t^n dt = 0$. Montrer que f est la fonction nulle.

(g) Que dire d'une fonction f qui serait limite uniforme d'une suite de fonctions polynômes sur \mathbb{R} .