Lycée de Médenine	Série n° 20	M[r] : HADJ SALEM Habib
$4^{ème}$ Maths	Divisibilité dans $\mathbb{Z}$	2014 - 2015

Exercice n°1: Déterminer les entiers n qui divise n+12

Exercice n°2: Déterminer tous les entiers n tels que 3n+4 divise n+6.

Exercice n°3: Soit s et y deux entiers naturels tel que x >y .

1) Montrer que si $x^2-y^2 = 15$ alors x-y et x+y sont des diviseurs de 15.
2) Déterminer tous les entiers naturels x et y tels que $x^2-y^2 = 15$.

Exercice n°4: Soit n un entier naturel .

1) Montrer que $7^{2n}+3$ est divisible par 4.
2) Montrer que $4^{4n+2}-3^{n+3}$ est divisible par 11.
3) $3^{2n+1}+2^{n+2} \equiv 0(\text{mod}7)$

Exercice n°5 : Pour tout n $\in$ IN , on note r_n le reste de la division euclidienne de 2^n par 9

1) a) Compléter le tableau suivant :

n	0	1	2	3	4	5	6
r_n							

Quelle semble être la période de la suite (r_n)

b) en déduire r_n pour tout n $\in$ IN.

2/ Déterminer le reste de la division euclidienne de 65^n par 9 suivant les valeurs de n.

3/ Quel est le reste dans la division euclidienne de 65^{2011} par 9.

Exercice n°6:

1) Ecrire suivant les valeurs de l'entier n, le reste de la division euclidienne de 2^n par 5.

2) En déduire le reste de la division de $(2917)^{541}$ par 5.

Exercice n°7 :

1) Prouver les équivalences suivantes:
   a) $3x \equiv 8[10] \Leftrightarrow x \equiv 6[10]$
   b) $x^2 \equiv 6[10] \Leftrightarrow x \equiv 4[10] \text{ ou } x \equiv 6[10]$
2) Montrer que pour tout n $\in$ IN : $n^2 + (n+1)^2+(n+2)^2 \equiv 0[10] \Leftrightarrow (n+1)^2 \equiv 6[10]$
3) Déterminer tous les multiples naturels de 10 inférieurs à 5000 qui sont la somme des carrés de trois entiers consécutifs.

Exercice n° 8:

1) a) Déterminer le reste de la division euclidienne par 7 de 3^n.
   b)En déduire le reste de la division de 1998^{128} par 7 (n $\in$ IN)

2) a) Déterminer les restes de la division par 4 de 3^n (n $\in$ IN)
   b) En déduire que $3^{1998}-1$ est divisible par 28.

Exercice n° 9:

1) Déterminer selon les valeurs de l'entier naturel n , le reste de la division de 2^n par 10.
2) Déterminer selon les valeurs de n , le chiffre des unités de l'écriture décimale de 2^n.
3) Déterminer le chiffre des unités de $(3548)^9$x$(2534)^{31}$

Exercice n°10:

1) a) Déterminer les restes possibles de la division euclidienne d'un entier x par 5.
   b)En déduire les solutions dans $\mathbb{Z}$ de l'équation : $3x+4 \equiv 0[5]$
2) Résoudre dans $\mathbb{Z}$, l'équation : $x^2-x+4 \equiv 0[6]$

Exercice n°11:

1) Trouver le reste de la division euclidienne de 8^{2007} par 5.
2) a) montrer que pour tout $n \in IN$ et $n \geq 2$, $10^n \equiv 4(\text{mod}12)$

   b)Trouver le reste de la division euclidienne par 12 de l'entier $x=1234^{567}+89^{1011}$
3) a) Quel est le reste de la division euclidienne par 7 de l'entier 1976^{57}.

   b) Déterminer l'ensemble des entiers naturels n tels que 1976^n soit congru à 4.

Exercice n°12:

1) Soit $a \in \{2,3,4,5\}$ et $n \in IN$

a) Montrer que $a^6 \equiv 1[7]$

b) Soit $A_n=2^n+3^n+4^n+5^n$, démontrer que pour tout $n \in IN$, $A_{n+6} \equiv A_n [7]$.

2) On note q et r le quotient et le reste de la division de n par 6.

   a) Montrer que $A_n \equiv A_r [7]$.

   b) Déterminer les valeurs de n pour que $A_n \equiv 0[7]$

3) Soit $B_n=100^n+101^n+102^n+103^n$

   c) Montrer que pour tout $n \in IN$; $B_n \equiv A_n [7]$

c) En déduire les valeurs de n pour les quelles $B_n \equiv 0[7]$

Exercice n°13 :

1) Démontrer que , pour tout entier naturel n, $4^n \equiv 1[3]$
2) Prouver que 4^{28}-1 est divisible par 29 .
3) Pour $1 \leq n \leq 4$, déterminer le reste de la division euclidienne de 4^n par 17.
   En déduire que , pour tout entier naturel k , le nombre 4^{4k}-1 est divisible par 17.
4) Pour quels entiers naturels n le nombre 4^n -1 est – il divisible par 5 ?
5) En déduire quatre diviseurs premiers de 4^{28}-1.

Exercice 14 (bac 2010)

On pose $a = 7^{2009} + 7^{2010} + 7^{2011}$.

1) Soit n un entier naturel. Discuter suivant les valeurs de n, le reste de 7^n modulo 100.
2) En déduire qu'il existe un entier naturel k tel que a= 100 k-1.
3) a) En utilisant la formule du binôme, montrer que $a^{100} = 1 \ (\text{mod } 100^2)$.

   b) Déterminer les quatre derniers chiffres de a^{100}.

Exercice 15 (bac 2014 princ)

1) Soit a un entier tel que $a \equiv 1(\text{mod}10)$.

   a) Montrer que $a^9 + a^8 + \ .. \ + a + 1 \equiv 0(\text{mod}10)$.

   b) En déduire que $a^{10} \equiv 1 \ (\text{mod } 10^2)$.
   (On pourra utiliser l'égalité $a^{10} - 1 \equiv (a-1)(a^9 + a^8 + .. + a + 1)$).

2) Soit b un entier.

   a) Déterminer les restes possibles de b^4 dans la division euclidienne par 10.

   b) En déduire que $b^4 \equiv 1 \ (\text{mod } 10)$ si et seulement si b est premier avec 10.

3) Soit b un entier premier avec 10.

   a) Montrer que $b^{40} \equiv 1(\text{mod}10^2)$.
   b) Déterminer les deux derniers chiffres de 67^{42}