Antilles Guyane 2014. Enseignement spécifique

EXERCICE 4 (5 points) (candidats ayant choisi l'enseignement de spécialité)

En montagne, un randonneur a effectué des réservations dans deux types d'hébergements : l'hébergement A et l'hébergement B.

Une nuit en hébergement A coûte 24 € et une nuit en hébergement B coûte 45 €.
Il se rappelle que le coût total de sa réservation est de 438 €.

On souhaite retrouver les nombres x et y de nuitées passées respectivement en hébergement A et en hébergement B

1) a) Montrer que les nombres x et y sont respectivement inférieurs ou égaux à 18 et 9.

b) Recopier et compléter les lignes (1), (2) et (3) de l'algorithme suivant afin qu'il affiche les couples $(x\,;\,y)$ possibles.

Entrée	x et y sont des nombres	
Traitement	Pour x variant de 0 à ...	(1)
	Pour y variant de 0 à ...	(2)
	Si ...	(3)
	Afficher x et y	
	Fin Si	
	Fin Pour	
	Fin Pour	
Fin traitement		

2) Justifier que le coût total de la réservation est un multiple de 3.

3) a) Justifier que l'équation $8x + 15y = 1$ admet pour solution au moins un couple d'entiers relatifs.

b) Déterminer une telle solution.

c) Résoudre l'équation (E) : $8x + 15y = 146$ où x et y sont des nombres entiers relatifs.

4) Le randonneur se souvient avoir passé au maximum 13 nuits en hébergement A.

Montrer alors qu'il peut retrouver le nombre exact de nuits passées en hébergement A et celui des nuits passées en hébergement B.

Calculer ces nombres.

Antilles Guyane 2014. Enseignement spécifique

EXERCICE 4 : corrigé

1) a) On a $24x \leqslant 438$ et donc $x \leqslant \dfrac{438}{24}$ ou encore $x \leqslant 18,25$. Puisque x est un entier, on en déduit que $x \leqslant 18$.

De même, on a $45y \leqslant 438$ et donc $x \leqslant \dfrac{438}{45}$ ou encore $x \leqslant 9,7\ldots$. Puisque y est un entier, on en déduit que $y \leqslant 9$.

$$\boxed{x \leqslant 18 \text{ et } y \leqslant 9.}$$

b) Algorithme complété.

Entrée	x et y sont des nombres
Traitement	Pour x variant de 0 à 18 Pour y variant de 0 à 9 Si $24x + 45y = 438$ Afficher x et y Fin Si Fin Pour Fin Pour
Fin traitement	

2) La somme des chiffres de 438 est 15 qui est divisible par 3. Donc 438 est divisible par 3. Plus précisément, $438 = 3 \times 146$. Ainsi, le coût total de la réservation est un multiple de 3.

3) a) Les entiers $8 = 2^3$ et $15 = 3 \times 5$ n'ont pas de facteur premier commun. Donc les entiers 8 et 15 sont premiers entre eux. D'après le théorème de Bézout, il existe un couple d'entiers relatifs (u, v) tel que $8u + 15v = 1$ ou encore, l'équation $8x + 15y = 1$ admet pour solution au moins un couple d'entiers relatifs.

b) $8 \times 2 + 15 \times (-1) = 16 - 15 = 1$. Donc le couple $(2, -1)$ est un couple d'entiers relatifs solution de l'équation $8x + 15y = 1$.

c) Pour tous entiers relatifs x et y,

$$24x + 45y = 438 \Leftrightarrow 3(8x + 15y) = 3 \times 146 \Leftrightarrow 8x + 15y = 146 \quad (E).$$

Ensuite, le couple $(2, -1)$ est un couple d'entiers relatifs solution de l'équation $8x + 15y = 1$. Mais alors, le couple $(x_0, y_0) = (2 \times 146, (-1) \times 146) = (292, -146)$ est un couple d'entiers relatifs solution de l'équation $8x + 15y = 146$.

Soit (x, y) un couple d'entiers relatifs.

$$8x + 15y = 146 \Leftrightarrow 8x + 15y = 8x_0 + 15y_0 \Leftrightarrow 8(x - x_0) = 15(y_0 - y).$$

Si (x, y) est solution de l'équation $8x + 15y = 146$, nécessairement l'entier relatif 15 divise l'entier relatif $8(x - x_0)$. Puisque 15 et 8 sont premiers entre eux, l'entier 15 divise $x - x_0$ d'après le théorème de Gauss. Donc, il existe un entier relatif k tel que $x - x_0 = 15k$ ou encore tel que $x = x_0 + 15k$.

De même, il existe un entier relatif k' tel que $y_0 - y = 8k'$ ou encore tel que $y = y_0 - 8k'$.

Réciproquement, soient k et k' deux entiers relatifs puis $x = x_0 + 15k$ et $y = y_0 - 15k'$.

$$\begin{aligned} 8x + 15y = 146 &\Leftrightarrow 8(x_0 + 15k) + 15(y_0 - 8k') = 146 \Leftrightarrow 8x_0 + 15y_0 + 8 \times 15 \times (k - k') = 146 \\ &\Leftrightarrow 8 \times 15 \times (k - k') = 0 \Leftrightarrow k = k'. \end{aligned}$$

Les couples d'entiers relatifs solutions de l'équation $(E) : 8x + 15y = 146$ sont les couples de la forme $(292 + 15k, -146, 8k)$, $k \in \mathbb{Z}$.

4) Soient k un entier relatif puis $x = 292 + 15k$.

$$\begin{aligned} 0 \leqslant x \leqslant 13 &\Leftrightarrow 0 \leqslant 292 + 15k \leqslant 13 \Leftrightarrow -292 \leqslant 15k \leqslant -279 \Leftrightarrow -\frac{292}{15} \leqslant 15k \leqslant -\frac{279}{15} \\ &\Leftrightarrow -19,4\ldots \leqslant k \leqslant -18,6 \Leftrightarrow k = -19. \end{aligned}$$

Pour $k = -19$, on obtient $x = 292 - 15 \times 19 = 7$ et $y = -146 + 8 \times 19 = 6$. De plus, 7 et 6 sont des entiers naturels.

Le randonneur a passé 7 nuits en hébergement A et et 6 nuits en hébergement B.