Colinéarité et équations de droites

Chapitre **7**

Ouverture

Au XVII^e et XVIII^e siècles, l'apparition et le développement du calcul infinitésimal permirent d'offrir à la « mécanique céleste » des modèles mathématiques qui concordaient admirablement avec les observations. On quittait les modèles des mathématiciens grecs, fondés uniquement sur la géométrie, qui s'accordaient de moins en moins aux observations, elles, de plus en plus précises.

Depuis la plus lointaine antiquité, observer les astres et essayer d'expliquer leurs éventuelles évolutions fut une préoccupation de l'homme et l'astronomie est probablement la plus ancienne des sciences. Elle s'est développée en Égypte, en Mésopotamie, dans la Grèce antique, dans les pays Arabes mais aussi hors du bassin méditerranéen en Inde, en Chine, dans les pays Amérindiens, etc.

Les observations astronomiques étaient fondées sur la géométrie, en particulier les procédés d'alignement ; on utilisait, par exemple, des « alidades » (de l'arabe al-idhâdah, (réglette)) qui étaient des règles, plus ou moins longues, pivotant autour du centre d'un cercle gradué et permettant, par des visées à travers des orifices situés aux extrémités, de déterminer, par alignement avec l'astre étudié, son angle par rapport à l'horizontale et par différence l'angle de deux points de la sphère céleste.

Évidemment, la notion d'alignement allait de soi et un alignement était toujours « visuel », méthode clairement vouée à l'échec.

Il a fallu attendre Descartes (et simultanément Fermat) pour voir arriver la grande innovation : l'introduction en géométrie de la méthode des coordonnées ; l'alignement de trois points pouvait alors être certain (sous réserve de disposer des coordonnées de chacun de ces points).

L'illustration et la question sont relatives à la constellation d'Orion. On voit toutes les étoiles qui constituent le vaillant chasseur : ses épaules, ses genoux, son épée, son gourdin, etc.

Certaines étoiles paraissent alignées mais les calculs menés dans l'activité 4 montrent que seule la ceinture, constituée d'Alnitak, d'Alnilam et de Mintaka, est formée d'étoiles alignées.

Vérifier ses acquis

1 c. et e. **2** d. **3** c.

4 c. **5** b. **6** d., f.

7 $\mathscr{D}_1$: c. $\mathscr{D}_2$: f. **8** f.

Activités d'introduction

Activité 1

1 **a.** Le quadrilatère ABCD est un parallélogramme.

b. Comme ABCD est un parallélogramme $\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{BA}$.

D'après la relation de Chasles,
$\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BM} + \overrightarrow{MA}$,
ce qui s'écrit $\overrightarrow{AD} - \overrightarrow{MA} = \overrightarrow{BM} - \overrightarrow{CA}$.
C'est-à-dire $\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AM} = \overrightarrow{BM} + \overrightarrow{AC}$.
Or $\overrightarrow{BM} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{BN}$,
on a alors $\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AM} = \overrightarrow{BN} - \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{AC}$
et finalement $\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AM} = \overrightarrow{BN} + \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{AC}$, soit $\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AN}$. Le quadrilatère AMND est donc un parallélogramme.

2 Le point M est le milieu du segment [AB].

3 Comme M est le milieu du segment [AB], $\overrightarrow{AB} = 2\overrightarrow{AM}$.
$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AC}$ s'écrit $2\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AC}$ avec $2\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AC}$, on en déduit $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{NC}$. Comme ABCD est un parallélogramme $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$, on a $\overrightarrow{DC} = 2\overrightarrow{NC}$ Le point N est le milieu du segment [DC].

Activité 2

1 Les coordonnées du point B sont $(\ell\ ;\ 0)$. Les coordonnées du vecteur $\vec{u}\ (\ell\ ;\ 0)$.

2 Les coordonnées du vecteur $k\vec{u}(k\ell\ ;\ 0)$.

3 **a.** Lorsque $k > 0$: C est sur la demi-droite [OB).
Lorsque $k = 0$: C est en O.
Lorsque $k < 0$. C est sur la demi-droite d'origine O ne contenant pas B.
b. On passe géométriquement de B à C.
Lorsque $k > 0$: on multiplie la distance OB par k. C est sur la demi-droite [OB).
Lorsque $k = 0$: C est en O.
Lorsque $k < 0$. On multiplie la distance OB par $-k$. C est sur la demi-droite d'origine O ne contenant pas B.

4 $\overrightarrow{OC} = k\vec{u}$ et $\overrightarrow{OB} = \vec{u}$, donc $\overrightarrow{OC} = k\overrightarrow{OB}$.

5 $\overrightarrow{JC'} = k\overrightarrow{JB'}$.

Activité 3

1 **a.** Les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{CM}$ sont $(-2k\ ;\ -k)$ en fonction de k.
b. Pour $k = 0$, le point M est en C.
Pour $k = 1$, le point M est en D.
c. Les vecteurs de coordonnées $(-2\ ;\ -1)$, $(2\ ;\ 1)$ et $(4\ ;\ 2)$ sont trois vecteurs directeurs de la droite (CD).

2 **a.** Les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{AB}$ sont $(6\ ;\ 3)$ celles du vecteur $\overrightarrow{CD}(-2\ ;\ -1)$.
On constate que $\overrightarrow{AB} = -3\overrightarrow{CD}$. Les droites (AB) et (CD) sont donc parallèles.
b. Le vecteur de coordonnées $(3\ ;\ 1)$ n'est pas colinéaire au vecteur directeur $(2\ ;\ 1)$ de la droite (CD). Les droites (AB) et (CD) sont parallèles. Le vecteur de coordonnées $(3\ ;\ 1)$ ne peut être un vecteur directeur de la droite (AB), il le serait de la droite (CD).

3 On a $\overrightarrow{CM} = k\overrightarrow{CD}$ et on veut $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DM}$.
Il vient $\overrightarrow{AB} = (1 - k)\overrightarrow{DC}$.
Pour $k = -2$, ABMD est un parallélogramme.

Activité 4

1 Les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{SB}$ et $\overrightarrow{RA}$ sont $\left(\frac{1}{2}\ ;11\right)$ et $(0\ ;\ 10)$, le produit en croix n'est pas nul donc $\overrightarrow{SB}$ et $\overrightarrow{RA}$ ne sont pas colinéaires. De même, les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{RS}$ sont $(-5\ ;\ 1)$ et $\left(-\frac{11}{2}\ ;0\right)$, ils ne sont pas colinéaires. ABSR n'est pas un trapèze.

2 Les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{EA}$ et $\overrightarrow{SD}$ sont $\left(\frac{7}{2}\ ;\frac{11}{2}\right)$. On a donc $\overrightarrow{EA} = \overrightarrow{SD}$, EADS est un parallélogramme.

3 **a.** Les coordonnées du point K sont $\left(\frac{13}{4}\ ;6\right)$.
b. Les coordonnées du milieu du segment [BR] sont $\left(\frac{7}{2}\ ;\frac{13}{2}\right)$.
c. Si ce point était le point K, les diagonales [BR] et [AS] auraient le même milieu et ABSR serait un parallèlogramme, ce qui n'est pas puisque ABSR n'est même pas un trapèze.
d. Les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{BK}$ et $\overrightarrow{BR}$ sont $\left(\frac{9}{4}\ ;-6\right)$ et $(5\ ;\ -11)$, le produit en croix n'est pas nul donc $\overrightarrow{BK}$ et $\overrightarrow{BR}$ ne sont pas colinéaires. Les points B, K et R ne sont pas alignés.

4 **a.** Les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{KR}$ sont $\left(\frac{11}{4}\ ;-5\right)$ et celles du vecteur $\overrightarrow{KS}$ sont $\left(-\frac{11}{4}\ ;-5\right)$, on a donc KR = KS. Les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{RS}$ sont $\left(\frac{11}{2}\ ;0\right)$; $RS = \frac{11}{2}$.
Le triangle KRS est isocèle.
b. Les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{MK}$, $\overrightarrow{MS}$ et $\overrightarrow{MR}$ sont $\left(\frac{1}{4}\ ;3\right)$, $\left(-\frac{5}{2}\ ;-2\right)$ et $(3\ ;\ -2)$. On constate que la somme $\overrightarrow{MK} + \overrightarrow{MS} + \overrightarrow{MR}$ est non nulle et donc le point M n'est pas le centre de gravité du triangle .

Activité 5

1 $\overrightarrow{JA} = 2\overrightarrow{BJ}$, donc $\overrightarrow{JA} = 2\overrightarrow{BA} + 2\overrightarrow{AJ}$, soit $2\overrightarrow{AB} = 3\overrightarrow{AJ}$. Finalement $\overrightarrow{AJ} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AB}$.

2 $\overrightarrow{KA} = 3\overrightarrow{CK}$, donc $\overrightarrow{KA} = 3\overrightarrow{CA} + 3\overrightarrow{AK}$, soit $3\overrightarrow{AC} = 4\overrightarrow{AK}$, finalement $\overrightarrow{AK} = \dfrac{3}{4}\overrightarrow{AC}$.

3 I est le milieu de [JC], donc $\overrightarrow{IJ} + \overrightarrow{IC} = \vec{0}$, soit $\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{AJ} + \overrightarrow{IA} + \overrightarrow{AC} = \vec{0}$, donc $\overrightarrow{AI} = \dfrac{1}{2}(\overrightarrow{AJ} + \overrightarrow{AC})$.

4 **a.** On a $\overrightarrow{IK} = \overrightarrow{IA} + \overrightarrow{AK}$,
donc $\overrightarrow{IK} = -\left(\dfrac{1}{3}\overrightarrow{AB} + \dfrac{1}{2}\overrightarrow{AC}\right) + \dfrac{3}{4}\overrightarrow{AC}$,
on obtient $\overrightarrow{IK} = -\dfrac{1}{3}\overrightarrow{AB} + \dfrac{1}{4}\overrightarrow{AC}$.
b. De même, $\overrightarrow{BK} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AK}$,
d'où $\overrightarrow{BK} = -\overrightarrow{AB} + \dfrac{3}{4}\overrightarrow{AC}$.
c. On constate que $\overrightarrow{BK} = 3\overrightarrow{IK}$, donc les points I, B et K sont alignés.

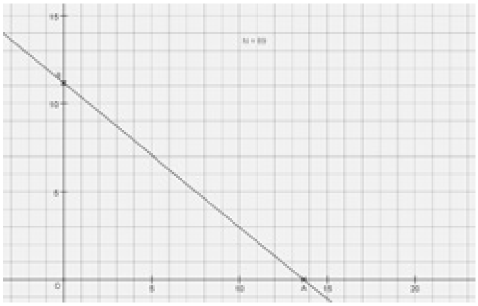
5 On a $\overrightarrow{JK} = -\dfrac{2}{3}\overrightarrow{AB} + \dfrac{3}{4}\overrightarrow{AC}$
et $\overrightarrow{BC} = -\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$.
Les vecteurs $\overrightarrow{BC}$ et $\overrightarrow{JK}$ ne sont pas colinéaires donc les droites (JK) et (BC) ne sont pas parallèles.

Travaux pratiques

TP Algorithmique 1 Des points à coordonnées entières

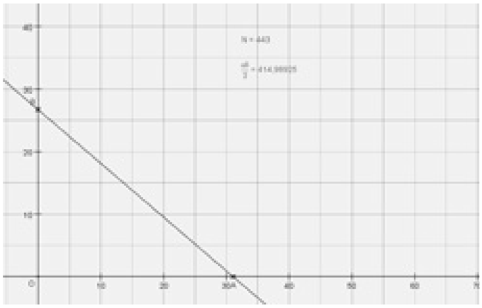
1 **1.** Soit M(x ; y) un point de la droite (AB) ; alors les vecteurs $\overrightarrow{AB}(-a\ ;\ b)$ et $\overrightarrow{AM}(x - a\ ;\ y)$ sont colinéaires, c'est-à-dire
$(x - a)b + ya = 0 \Leftrightarrow bx + ay - ab = 0$.
2. a. $0 \leqslant p \leqslant a$.
b. La droite (AB) partage le plan en deux demi-plans, l'un d'inéquation $bx + ay - ab \leqslant 0$ et l'autre d'inéquation $bx + ay - ab \geqslant 0$. Le triangle OAB est contenu exclusivement dans l'un des deux demi-plans et il s'agit du premier : en effet, les coordonnées du point O satisfont uniquement à son inéquation. Ainsi, si un point de coordonnées entières (p ; q) est à l'intérieur du triangle OAB, alors $bp + aq - ab \leqslant 0 \Leftrightarrow aq + bp \leqslant ab$.

3. a. b. Les fichiers sont téléchargeables sur www.libtheque.fr/mathslycee.



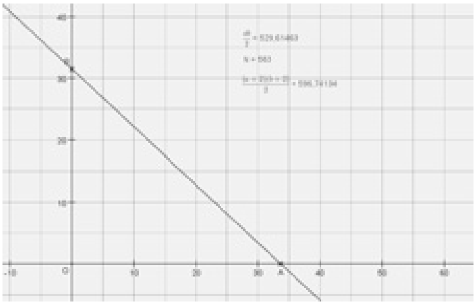
c. La ligne 5 se complète ainsi : `for(p=0 ; p<=a ; p=p+1)`.
La ligne 7 se complète ainsi : `while(a*q+b*p <=a*b)`.

2 **1. a.** @ Les fichiers sont téléchargeables sur www.libtheque.fr/mathslycee.



Il suffit de créer une expression calculant $\dfrac{ab}{2}$ et de vérifier qu'en déplaçant A ou B, cette quantité reste inférieure à celle calculée par l'algorithme.
b. Chaque carré est construit sur un point du triangle OAB, il y a autant de carrés que de points dans le triangle. Or dans le triangle, il y a par définition N points, et comme chaque carré est d'aire 1, l'aire de la figure construite est N.
c. Si OAB n'était pas contenu dans la figure, il existerait une partie du triangle non recouverte par un carré. Ce carré ayant un point inférieur gauche, il serait alors contenu dans le triangle, cela contredit le mode de construction de la figure.
d. L'aire de la figure est N ; l'aire du triangle est $\dfrac{ab}{2}$. Le triangle étant contenu dans la figure, on a bien $\dfrac{ab}{2} \leqslant \text{N}$.

2. a. Les fichiers sont téléchargeables sur www.libtheque.fr/mathslycee.

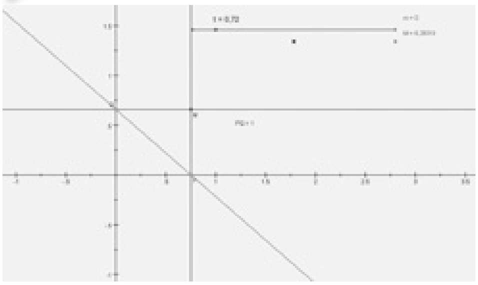


b. Parmi tous les carrés de la figure, il y a ceux contenus entièrement dans le triangle OAB, et leur nombre est donc inférieur à $\frac{ab}{2}$, et ceux qui sont traversés par la droite (AB). Ces derniers sont soit traversés sur leur côté droit, il y en a au maximum un par colonne et leur nombre est donc inférieur à $a + 1$, soit sur leur côté bas, il y en a au maximum un par ligne et leur nombre est inférieur à $b + 1$.
Ainsi, $\text{N} \leqslant \frac{ab}{2} + a + 1 + b + 1 = \frac{(a+2)(b+2)}{2}$.

TP TICE 1 L'astroïde

@ Tous les fichiers sont téléchargeables sur www.libtheque.fr/mathslycee.

1 **1. a.** Voir fichiers téléchargeables.

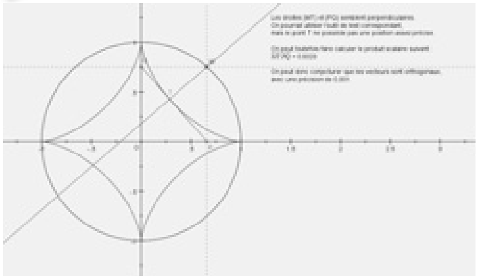


c. Il semble que le lieu de M soit le cercle de centre O et de rayon 1.

2 **a.** P n'existe pas si et seulement si la droite $\mathcal{D}_\theta$ est parallèle à l'axe des abscisses, c'est-à-dire ici confondue. Il faut donc exclure les valeurs de θ pour lesquelles $\sin\theta = 0$, c'est-à-dire 0 et π.
De même, Q n'existe pas si et seulement si $\mathcal{D}_\theta$ est parallèle à l'axe des ordonnées. Il faut donc exclure les valeurs de θ pour lesquelles $\cos\theta = 0$, c'est-à-dire $\frac{\pi}{2}$ et $\frac{3\pi}{2}$.

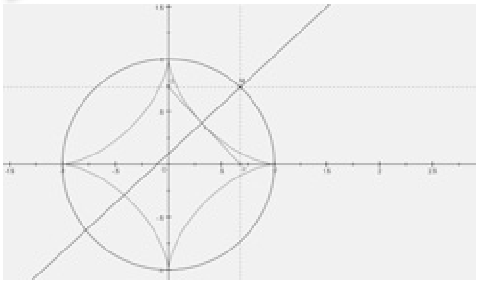
b. On sait que $y_P = 0$,
donc $x_P \sin\theta = \cos\theta \sin\theta \Leftrightarrow x_P = \cos\theta$.
De même, on sait que $x_Q = 0$,
donc $y_Q \cos\theta = \cos\theta \sin\theta \Leftrightarrow y_Q = \sin\theta$.
Ainsi, $\text{PQ} = \sqrt{\cos^2\theta + \sin^2\theta} = 1$.
c. OPMQ est un rectangle car ses côtés opposés sont parallèles et qu'il possède un angle droit. Ainsi, OM = PQ = 1, c'est-à-dire que M appartient au cercle de centre O et de rayon 1.

3 Voir fichiers téléchargeables.

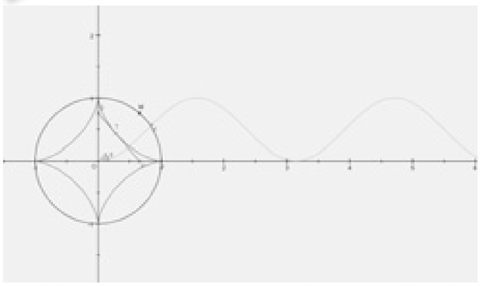


a. Les points P et Q sont les projetés orthogonaux du point M sur les axes.
c. On peut conjecturer que les droites sont perpendiculaires.

4 Voir fichiers téléchargeables.



5 **a.** Voir fichiers téléchargeables.



b. On remarque que la fonction est trigonométrique, on essaye alors $\cos(x)$ (ou $r\cos(x)$

dans CaRMetal), mais le minimum n'étant pas le bon, on essaye $\cos(x) + 1$. L'amplitude étant deux fois trop grande, on essaye $\frac{\cos(x)+1}{2}$. La période est maintenant deux fois trop grande, on essaye alors $\frac{\cos(2x)+1}{2}$.
Il faut encore induire une translation horizontale :
$\frac{\cos(2x+\pi)+1}{2}$ semble être la bonne fonction.
On peut alors simplifier l'expression à l'aide des formules trigonométriques pour obtenir $\sin^2(x)$.
c. À partir de la relation donnée et en prenant les normes, on obtient $PT = |k|PQ = |k|$. Ainsi, $f(\theta) = |k|$.
Mais k est un coefficient toujours positif puisque le point T appartient toujours au segment [PQ], ainsi $k = f(\theta)$.

Exercices

Appliquer le cours

1 **a.** $k = \frac{6}{7}$.

2 **a.** Faux si $k = 0$. **b.** Vrai. **c.** Vrai. **d.** Faux si $a = 0$.

3 Réponses **a.** $\vec{v}(0\ ;\ -2\,011)$ et **d.** $\vec{v}(0\ ;\ 0)$.

4 Réponses **b.** (0 ; 0) et **d.** (–1 ; 1).

5 Réponse **b.** $\vec{u} = -\frac{1}{4}\vec{v}$.

6 **a.** Vrai. **b.** Vrai. **c.** Vrai. **d.** Faux. **e.** Faux.

7 Réponses **a.** $(-2\ ;\ \sqrt{2})$, **b.** $(2\sqrt{2}\ ;\ -2)$ et **d.** $\left(-1\ ;\ \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$.

8 Réponses **b.** B(2 ; 0). et **c.** C(2 ; 2).

9 Réponses **d.** $2x + 3y - 6 = 0$ et **c.** $-\frac{2}{3}x - y + 2 = 0$.

10 Réponse **d.** $y = -2x + \frac{1}{2}$.

11 Réponses **b.** $(-b\ ;\ a)$ et **c.** $(b\ ;\ -a)$.

12 **1.** Réponses **b.** (–2 ; 1) et **c.** (2 ; –1).
2. Réponse **c.** (1 ; 2).

13 **a.** Faux. **b.** Vrai. **c.** Faux. **d.** Vrai.

14 **a.** Faux. **b.** Vrai. **c.** Vrai. **d.** Faux.

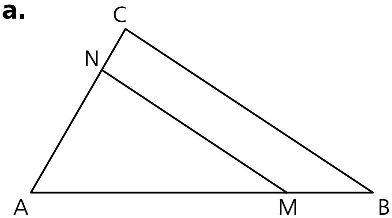
15 **a.** Réponse **d.** (–1 ; 3).

18 **a.** $\vec{u} = \frac{2}{3}\vec{v}$;
b. $\vec{u} = -\vec{v}$; **c.** $\vec{v} = \sqrt{2}\vec{u}$; **d.** $\vec{v} = 14\vec{u}$.

19 **a.** $\vec{v} = 2\vec{u}$;
b. $\vec{u} = 2\vec{v}$; **c.** $\vec{u} = -3\vec{v}$; **d.** $\vec{v} = 6\vec{u}$.

20 **a.** $k_1 = 1$.
b. $k_2 = -\frac{1}{2}$, $k_3 = \frac{7}{4}$ et $k_4 = -\frac{3}{2}$.
c. $m = \frac{4}{7}$; $m = \frac{k_3}{k_1}$. **d.** $n = -\frac{7}{6}$; $n = \frac{k_3}{k_4}$.

21 **a.**



b. D'après la relation de Chasles
$\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CN}$.
Ce qui s'écrit successivement
$\overrightarrow{MN} = \frac{1}{4}\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \frac{1}{4}\overrightarrow{CA}$, $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{BC} + \frac{1}{4}(\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AB})$,
$\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{BC} + \frac{1}{4}\overrightarrow{CB}$, $\overrightarrow{MN} = \frac{3}{4}\overrightarrow{BC}$, donc $\overrightarrow{MN}$ et $\overrightarrow{BC}$ sont colinéaires.

22 **a.** $\overrightarrow{AB}(2\ ;\ 1)$, $\overrightarrow{BC}(5\ ;\ 2)$, $\overrightarrow{DE}(4\ ;\ 2)$ et $\overrightarrow{AC}(7\ ;\ 3)$.
b. $k = 2$. Les vecteurs $\overrightarrow{DE}$ et $\overrightarrow{AB}$ sont colinéaires.
c. Il n'existe pas k réel tel que $\overrightarrow{BC} = k\overrightarrow{DE}$.
Les vecteurs $\overrightarrow{BC}$ et $\overrightarrow{DE}$ ne sont pas colinéaires.
d. Il n'existe pas k réel tel que $\overrightarrow{AB} = k\overrightarrow{BC}$.
Les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{BC}$ ne sont pas colinéaires.

23 **a.** Les coordonnées des vecteurs sont respectivement $\vec{u}_1(7\ ;\ 3)$; $\vec{u}_2(6\ ;\ 3)$; $\vec{u}_3(10\ ;\ 6)$; $\vec{u}_4(8\ ;\ 4)$ et $\vec{u}_5(5\ ;\ 3)$.
b. Les vecteurs $\vec{u}_3$ et $\vec{u}_5$ sont colinéaires
$\vec{u}_3 = 2\vec{u}_5$.
c. Les vecteurs $\vec{u}_4$ et $\vec{u}_2$ sont colinéaires
$\vec{u}_4 = \frac{4}{3}\vec{u}_2$.
d. Les vecteurs $\vec{u}_1$ et $\vec{u}_2$ ne sont pas colinéaires.
Il n'existe pas k réel tel que $\vec{u}_1 = k\vec{u}_2$.

25 **a.** Comme la droite (AC) est parallèle à l'axe des ordonnées, les coordonnées du point C sont $(-3 ; y)$. Les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{OC}$ sont $(-3 ; y)$.
Les droites (AB) et (OC) sont parallèles donc les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{OC}$ sont colinéaires.
Le produit en croix est nul $3y + 6 = 0$ et donc $y = -2$.
Les coordonnées du point C sont $(-3 ; -2)$.
b. Comme la droite (AD) est parallèle à l'axe des abscisses, les coordonnées du point D sont $(x ; 1)$. Les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{OD}$ sont $(x ; 1)$.
Les droites (AB) et (OD) sont parallèles donc les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{OD}$ sont colinéaires.
Le produit en croix est nul $3 - 2x = 0$ et donc $x = \frac{3}{2}$.
Les coordonnées du point D sont $\left(\frac{3}{2} ; 1\right)$.

26 **a.** Le produit en croix vaut $-2 - 2 = -4$, donc les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ne sont pas colinéaires.
b. Le produit en croix vaut $-2 - (-2) = 0$, donc les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires.
c. Le produit en croix vaut $2 - 2 = 0$, donc les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires.
d. Le produit en croix vaut $-4 - 4 = -8$, donc les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ne sont pas colinéaires.

27 **a.** Le produit en croix vaut
$\frac{1}{3} \times \frac{3}{2} - 2 \times \frac{1}{2} = -\frac{1}{2}$, donc les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ne sont pas colinéaires.
b. Le produit en croix vaut $\frac{1}{3} \times \frac{3}{2} - 1 \times \frac{1}{2} = 0$, donc les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires.
c. Le produit en croix vaut $\frac{1}{3} \times \frac{3}{2} - 2 \times \frac{1}{2} = -\frac{1}{2}$, donc les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ne sont pas colinéaires.
d. Le produit en croix vaut $\frac{2}{3} \times \frac{3}{2} - 2 \times \frac{1}{2} = 0$, donc les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires.

28 **a.** Le produit en croix est nul,
donc $3 \times k - 2 \times 1 = 0$, donc $k = \frac{2}{3}$.
b. Le produit en croix est nul, donc
$2 \times k - 2 \times (k - 1) = 0$: c'est impossible.
c. Le produit en croix est nul,
donc $(k - 1) \times (k + 1) + 2 \times k^2 = 0$,
donc $k = \frac{\sqrt{3}}{3}$ ou $k = -\frac{\sqrt{3}}{3}$.
d. Le produit en croix est nul,
donc $-k(k + 1) - k \times (k - 1) = 0$, donc $k = 0$.

29 **a.** Le produit en croix vaut
$\sqrt{2} \times \sqrt{6} - 1 \times \sqrt{3} = 2\sqrt{3} - \sqrt{3} = \sqrt{3}$, donc les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ne sont pas colinéaires.
b. Le produit en croix vaut
$\sqrt{6} \times \sqrt{2} - 1 \times \sqrt{3} = 2\sqrt{3} - \sqrt{3} = \sqrt{3}$, donc les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ne sont pas colinéaires.
c. Le produit en croix vaut
$1 \times \sqrt{6} - \sqrt{2} \times \sqrt{3} = 0$, donc les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires.
d. Le produit en croix vaut
$1 \times \sqrt{6} - \sqrt{2} \times \sqrt{3} = 0$, donc les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires.
e. Le produit en croix vaut
$1 \times \sqrt{6} - \sqrt{2} \times \sqrt{3} = 0$, donc les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires.
f. Le produit en croix vaut
$\sqrt{6} \times \sqrt{6} - \sqrt{2} \times \sqrt{3} = 6 - \sqrt{6}$, donc les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ne sont pas colinéaires.

30 **a.** Le produit en croix est nul,
donc $5x - 9 = 0$, donc $x = \frac{9}{5}$.
b. Le produit en croix est nul,
donc $2 \times (-15) - x \times (-10) = 0$, donc $x = 3$.
c. Le produit en croix est nul ,
donc $\left(-\frac{1}{3}\right) \times \frac{3}{2} - x \times (-1) = 0$, donc $x = \frac{1}{2}$.
d. Le produit en croix est nul, donc
$\left(\frac{11}{5}\right) \times x - (-3) \times (-3) = 0$, donc $x = \frac{45}{11}$.
e. Le produit en croix est nul, donc
$\left(-\frac{4}{5}\right) \times (-9) - x \times \left(-\frac{5}{4}\right) = 0$, donc $x = -\frac{144}{25}$.
f. Le produit en croix est nul, donc
$\left(\frac{2}{3}\right) \times \left(\frac{7}{3}\right) - x \times \left(-\frac{4}{5}\right) = 0$, donc $x = -\frac{35}{18}$.

31 **a.** Les coordonnées des vecteurs sont respectivement $\vec{v}\,(6 ; 9)$; $\vec{u}_1(2 ; 5)$; $\vec{u}_2(4 ; 6)$; $\vec{u}_3(4 ; 4)$; $\vec{u}_4(5 ; 3)$ et $\vec{u}_5(4 ; 1)$.
b. $\vec{v}$ et $\vec{u}_1$: $6 \times 5 - 9 \times 2 = 12$;
$\vec{v}$ et $\vec{u}_2$: $6 \times 6 - 9 \times 4 = 0$;

$\vec{v}$ et $\vec{u}_3$: $6 \times 4 - 9 \times 4 = -12$;
$\vec{v}$ et $\vec{u}_4$: $6 \times 3 - 9 \times 5 = -27$;
$\vec{v}$ et $\vec{u}_5$: $6 \times 1 - 9 \times 4 = -30$.
c. Le vecteur $\vec{u}_2$ est colinéaire au vecteur $\vec{v}$.

33 L'équation de la droite (AB) est
a. $4x - y - 1 = 0$. **b.** $20x + 8y - 7 = 0$.
c. $x + y - 1 = 0$. **d.** $x + y - 2 = 0$.

34 Réponses **a.** $2x + y + 2 = 0$
et **c.** $4x + 2y - 1 = 0$.

35 Réponses **b.** $3x - y + 3 = 0$
et **c.** $-6x + 2y + 1 = 0$.

36 **a.** $2x - 6y + 3 = 0$ est confondue ;
b. $2x + 6y - 3 = 0$ est sécante ;
c. $x - 3y - 1 = 0$ est parallèle ;
d. $-2x + 6y - 1 = 0$ est parallèle.

38 **a.** $(3 ; -1)$; **b.** $(3 ; -2)$;
c. $(3 ; 7)$; **d.** $(2 ; 1)$.

39 **a.** $(2 ; 1)$; **b.** $(2 ; -1)$;
c. $\left(2 ; -\frac{2}{3}\right)$. **d.** impossible.

41 L'équation de la droite passant par le point A de vecteur directeur $\vec{u}$ est :
a. $2x + 3y - 9 = 0$; **b.** $x + 2y + 1 = 0$;
c. $2x + y - 5 = 0$; **d.** $3x + y + 1 = 0$.

43 On va effectuer une décomposition selon les vecteurs $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{AB}$.
D'après la relation de Chasles $\overrightarrow{KJ} = \overrightarrow{KA} + \overrightarrow{AJ}$.
Comme J est le milieu du segment [BC], on a
$\overrightarrow{AJ} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AB})$.
Donc $\overrightarrow{KJ} = -\frac{3}{4}\overrightarrow{AC} + \frac{1}{2}(\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AB})$,
soit $\overrightarrow{KJ} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} - \frac{1}{4}\overrightarrow{AC}$.
De même, $\overrightarrow{JI} = \overrightarrow{JA} + \overrightarrow{AI}$, donc
$\overrightarrow{JI} = -\frac{1}{2}(\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AB}) + \frac{3}{2}\overrightarrow{AB}$, soit $\overrightarrow{JI} = \overrightarrow{AB} - \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$.
On constate que $\overrightarrow{JI} = 2\overrightarrow{KJ}$.
Les vecteurs $\overrightarrow{JI}$ et $\overrightarrow{KJ}$ sont colinéaires, donc les points I, J et K sont alignés.

44 D'après la relation de Chasles :
$\overrightarrow{ST} = \overrightarrow{SC} + \overrightarrow{CT}$, donc $\overrightarrow{ST} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BC} + \frac{1}{2}\overrightarrow{CD} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BD}$.
De même $\overrightarrow{RU} = \overrightarrow{RA} + \overrightarrow{AU}$, donc
$\overrightarrow{RU} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BA} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AD} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BD}$.
On constate que $\overrightarrow{RU} = \overrightarrow{ST}$, RSTU est un parallélogramme.

45 **a.** On a $\overrightarrow{AG} = \frac{3}{2}\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AH} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AC}$.
b. $\overrightarrow{BH} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AH}$ donne $\overrightarrow{BH} = -\overrightarrow{AB} + \frac{2}{3}\overrightarrow{AC}$
et $\overrightarrow{GC} = \overrightarrow{GA} + \overrightarrow{AC}$ donne $\overrightarrow{GC} = -\frac{3}{2}\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$.
c. On constate que $\overrightarrow{BH} = \frac{2}{3}\overrightarrow{GC}$.
Les vecteurs $\overrightarrow{BH}$ et $\overrightarrow{GC}$ sont colinéaires, donc les droites (BH) et (GC) sont parallèles.

47 **a.** Dans le repère $(A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD})$:
$C(1 ; 1)$, $I\left(\frac{1}{2} ; \frac{1}{2}\right)$, et $G(2 ; -1)$.
Dans le repère $(F, \overrightarrow{FE}, \overrightarrow{FA})$:
$C(1 ; 2)$, $I\left(\frac{1}{2} ; \frac{3}{2}\right)$, et $G(2 ; 0)$.
b. Dans le repère $(A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD})$:
(CG) : $2x + y - 3 = 0$ et (AG) : $x + 2y = 0$.
Dans le repère $(F, \overrightarrow{FE}, \overrightarrow{FA})$: (CG) : $2x + y - 4 = 0$ et (AG) : $x + 2y - 2 = 0$.

S'entraîner

48 **a.** $a = -1$ et $b = -\frac{1}{2}$.
b. $a = 4$ et $b = 3$.
c. $a = 4$ et $b = 3$.
d. $a = 1$ et $b = -4$.

49 **a.** $a = -2$ et $b = 0$.
b. $a = 0$ et $b = 2\sqrt{2}$.
c. $a = 1$ et $b = -4$.
d. $a = 2 + \sqrt{2}$ et $b = -2\sqrt{2}$.

50 **a.** $A(2 ; -3)$; $x - 2 = 0$.
b. $A(1 ; 2)$; $x - 1 = 0$.
c. $A(-1 ; 2)$; $2x + y = 0$.
d. $A(-2 ; -3)$; $5x - 3y + 1 = 0$.

51 $\vec{u}_1(1 ; 4)$; $\vec{u}_2(1 ; 1)$; $\vec{u}_3(2 ; -1)$; $\vec{u}_4(1 ; 1)$ et $\vec{u}_5(-3 ; 4)$.

52 **a.** $\vec{u}_1(1 ; 2)$; $\vec{u}_2(1 ; 2)$; $\vec{u}_3(2 ; 5)$; $\vec{u}_4(2 ; 5)$ et $\vec{u}_5(1 ; 2)$.
b. $\vec{u}_1$, $\vec{u}_2$ et $\vec{u}_5$ sont colinéaires. $\vec{u}_3$ et $\vec{u}_4$ sont colinéaires.

53 Un vecteur directeur de la droite (MN) est $\overrightarrow{MN}$. Or $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AN}$.
Ce qui s'écrit $\overrightarrow{MN} = -2\overrightarrow{AC} + 2\overrightarrow{AB}$.

54 **a.** C'est vrai. Si la droite $\mathscr{D}_1$ ne coupe pas la droite $\mathscr{D}_3$, alors la droite $\mathscr{D}_1$ est parallèle à la droite $\mathscr{D}_3$. Comme la droite $\mathscr{D}_1$ coupe la droite $\mathscr{D}_2$ en un point appelé A, on aurait mené par le point A deux droites parallèles distinctes $\mathscr{D}_1$ et $\mathscr{D}_2$ à la droite $\mathscr{D}_3$, ce qui contredirait le postulat d'Euclide. Donc la droite $\mathscr{D}_1$ coupe la droite $\mathscr{D}_3$.
b. C'est faux. La droite $\mathscr{D}_1$ peut être parallèle à la droite $\mathscr{D}_3$.
c. Si la droite $\mathscr{D}_1$ coupe la droite $\mathscr{D}_3$ en un point A. Par ce point A, on aurait mené deux droites parallèles distinctes à la droite $\mathscr{D}_2$, ce qui contredirait le postulat d'Euclide. Donc la droite $\mathscr{D}_1$ est parallèle à la droite $\mathscr{D}_3$.

55 **a.** $2x + 3y - 5 = 0$; **b.** $x - y + 2 = 0$;
c. $x - 2y + 3 = 0$; **d.** $2x - y + 2 = 0$.

56 **a.** $y = -\frac{1}{3}x - \frac{1}{3}$; **b.** $y = -\frac{2}{3}x + \frac{2}{3}$;
c. $y = -x$; **d.** $y = 0$.

57 **a.** Soit M un point de coordonnées $(x\ ;\ y)$ de la droite (AB).
Les vecteurs $\overrightarrow{AM}(x - a\ ;\ y)$ et $\overrightarrow{AB}(m\ ;\ m - 2)$ sont colinéaires.
Leur produit en croix est nul donc
$-b(x - a) - ay = 0$.
Une équation cartésienne de la droite (AB) est $bx + ay - ab = 0$.
b. Le point B a pour coordonnées $(0\ ;\ b)$.

58 « Les points sont alignés »

59 **1.** Cet algorithme détermine les coordonnées du point d'intersection (quand il existe) des droites d'équation $ax + by + c = 0$ et $a'x + b'y + c' = 0$.
2. a. Lorsque $b'a - ba'$ est nul.

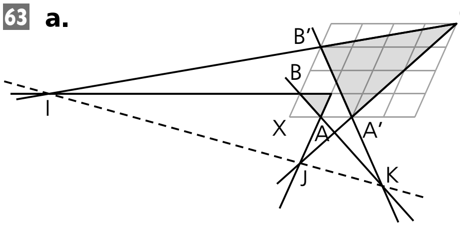
60 **a.** Soit M un point de coordonnées $(x\ ;\ y)$ de la droite passant par A.
Les vecteurs $\overrightarrow{AM}(x - \mathrm{a}\ ;\ y)$ et $\vec{u}$ sont colinéaires.
Leur produit en croix est nul :
$-m(y - 2) + x(m - 2) = 0$.
L'équation cartésienne de la droite (AB) est $(m - 2)x - my + 2m = 0$ de vecteur directeur $\vec{u}(m\ ;\ m - 2)$.
b. Cherchons m pour que le vecteur directeur $\vec{u}(m\ ;\ m - 2)$ et le vecteur de coordonnées $(1\ ;\ 1)$ soient colinéaires, c'est-à-dire $m - (m - 2) = 0$. Ce qui est impossible.

61 **1.** Comme $3(1 + k) + 3(1 - k) - 6 = 0$, le point A de coordonnées $(3\ ;\ 3)$ est sur la droite $\mathscr{D}_k$.
2. c. La droite $\mathscr{D}_k$ passe par le point B donc $1(1 + k) + (-1)(1 - k) - 6 = 0$ ce qui donne $k = 3$.
L'équation de la droite est $\mathscr{D}_3 : 2x - y - 3 = 0$.
3. a. Les coordonnées d'un vecteur directeur de la droite $\mathscr{D}_k$ sont $(k - 1\ ;\ k + 1)$.
Pour que le vecteur directeur de coordonnées $(k - 1\ ;\ k + 1)$ soit colinéaire au vecteur de coordonnées $(1\ ;\ -1)$, il faut que le produit en croix soit nul, c'est-à-dire $(-1)(k + 1) - 1(1 - k) = 0$ soit $k = 0$.
b. L'équation de la droite $\mathscr{D}_0$ parallèle à la seconde bissectrice est $x + y - 6 = 0$.

62 **1.** Les coordonnées des différents points de la figure sont O(0 ; 0), I(1 ; 0), J(0 ; 1), K(1 ; 1), A(m ; 0), B(1 ; m), C(m ; 1) et D(0 ; m).
• Soit M un point quelconque de coordonnées $(x\ ;\ y)$ appartenant à la droite (AB).
Les points A, B et M sont alignés, donc les vecteurs $\overrightarrow{AM}$ de coordonnées $(x - m\ ;\ y)$ et $\overrightarrow{AB}$ de coordonnées $(1 - m\ ;\ m)$ sont colinéaires. D'après la condition de colinéarité, on a : $m(x - m) - (1 - m)\,y = 0$ ce qui peut s'écrire $m\,x + (m - 1)y - m^2 = 0$.
L'équation réduite est $y = \dfrac{m}{1 - m}x + \dfrac{m^2}{m - 1}$, on est assuré que $m \neq 1$.
• Soit M un point quelconque de coordonnées $(x\ ;\ y)$ appartenant à la droite (CD).
Les vecteurs $\overrightarrow{DM}$ de coordonnées $(x\ ;\ y - m)$ et $\overrightarrow{DC}\ (m\ ;\ 1 - m)$ sont colinéaires.
D'après la condition de colinéarité, on a :
$(1 - m)x - m(y - m) = 0$ ce qui peut s'écrire $(1 - m)x - my + m^2 = 0$.
L'équation réduite de la droite (CD) est
$y = \dfrac{1 - m}{m}x + m$, on est assuré que $m \neq 0$.
2. Les deux droites sont parallèles lorsqu'elles ont même coefficient directeur, on doit avoir $\dfrac{m}{1 - m} = \dfrac{1 - m}{m}$ c'est-à-dire $m^2 = (1 - m)^2$ soit $m = \dfrac{1}{2}$.

Dans ces conditions M est le milieu de la diagonale [OK].

63 **a.**



b. Les droites (AA'), (BB') et (CC') sont distinctes et concourantes, les triangles ABC et A'B'C' sont homologues.

c. On calcule les équations cartésiennes des six droites suivantes :

(AB) : $x + y = 1$ et (A'B') : $3x + 2y = 6$ ce qui donne K(4 ; –3).

(AC) : $x = 1$ et (A'C') : $2x - y - 4 = 0$ ce qui donne J(1 ; –2).

(BC) : $y = 1$ et (B'C') : $x - 4y + 12 = 0$ ce qui donne I (–8 ; 1).

d. Le vecteur $\overrightarrow{IJ}$ a pour coordonnées (9 ; –3). Le vecteur $\overrightarrow{IK}$ a pour coordonnées (12 ; –4). On constate que $4\overrightarrow{IJ} = 3\overrightarrow{IK}$. Les vecteurs $\overrightarrow{IJ}$ et $\overrightarrow{IK}$ sont colinéaires.

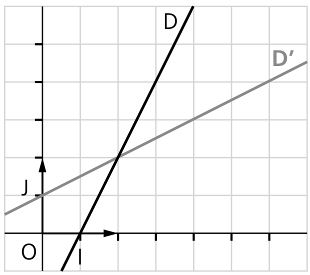
Les points I, J et K sont donc alignés.

64 **1. a.** Un vecteur directeur $\vec{u}$ de la droite $\mathscr{D}$ est (1 ; 2). Un vecteur directeur $\vec{u'}$ de la droite $\mathscr{D}'$ est (–2 ; –1).

Ces deux vecteurs ne sont pas colinéaires, les droites ne sont donc pas parallèles.

b. Les coordonnées du point d'intersection I des deux droites est (1 ; 1).

c.



d. $k \times 1 + (1 - k) \times 1 - 1 = 0$.

La droite d'équation $kx + (1 - k)y - 1 = 0$ passe par le point I (1 ; 1), pour tout réel k donné.

2. a. Les coordonnées d'un vecteur directeur de la droite $\mathscr{D}_k$ sont $(k - 1 ; k)$.

Les coordonnées d'un vecteur directeur de la droite $\mathscr{D}_{k'}$ sont $(k' - 1 ; k')$.

Le produit en croix de ces deux vecteurs vaut : $k - k'$ et comme $k \neq k'$, le produit en croix est non nul, donc $\mathscr{D}_k$ et $\mathscr{D}_{k'}$ ne sont pas parallèles.

b. On doit résoudre le système

$$\begin{cases} kx + (1 - k)y - 1 = 0 \\ k'x + (1 - k')y - 1 = 0 \end{cases},$$

on trouve $x = 1$ et $y = 1$.

On retrouve le point I qui est sur toutes les droites d'équation du type $kx + (1 - k)y - 1 = 0$.

65 L'élève se trompe. Il n'a pas déterminé toutes les droites passant par A car il manque la droite verticale d'équation $x = 1$.

66 **1. a.** La droite $\mathscr{D}_A$ passe par le point A de vecteur directeur $\overrightarrow{V_A}$.

Soit M le point tel que $\overrightarrow{AM} = t\overrightarrow{V_A}$, ses coordonnées sont $(2 + t ; 1 + t)$.

b. La droite $\mathscr{D}_B$ passe par le point B de vecteur directeur $\overrightarrow{V_B}$.

Soit N le point tel que $\overrightarrow{BN} = t\overrightarrow{V_B}$, ses coordonnées sont $(1 + 2t ; 3 + t)$.

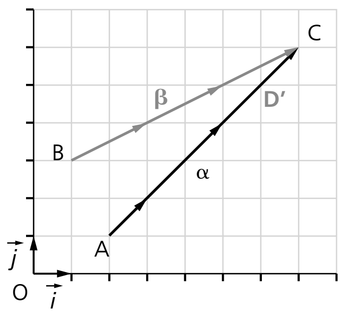
c. Pour que les points M et N soient confondus, il faut que t vérifie $\begin{cases} 2 + t = 1 + 2t \\ 1 + t = 3 + t \end{cases}$.

Ce qui est impossible.

d. On recherche t et t' tels que

$$\begin{cases} 2 + t = 1 + 2t' \\ 1 + t = 3 + t' \end{cases}.$$

Il vient $t = 5$ et $t' = 3$ ce qui donne le point d'intersection C de coordonnées (7 ; 6).



2. La droite $\mathscr{D}_A$ passe par le point A de vecteur directeur $\overrightarrow{V_A}$.

Soit M le point tel que $\overrightarrow{AM} = t\overrightarrow{V_A}$, ses coordonnées sont $(5 + t ; 4 + 2t)$. La droite $\mathscr{D}_B$ passe par le point B de vecteur directeur $\overrightarrow{V_B}$.

Soit M le point tel que $\overrightarrow{BN} = t\overrightarrow{V_B}$, ses coordonnées sont $(-1 + 3t ; 7 + t)$.

c. Pour que les points M et N soient confondus, il faut que t vérifie $\begin{cases} 5 + t = -1 + 3t \\ 4 + 2t = 7 + t \end{cases}$.
Ce qui donne $t = 3$. Il y a collision au point C de coordonnées (8 ; 10).

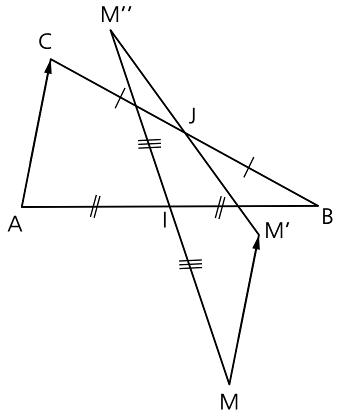
3. a. Soit M le point tel que $\overrightarrow{AM} = t\overrightarrow{V_A}$ et N tel que $\overrightarrow{BN} = t\overrightarrow{V_B}$. On suppose qu'il y a collision.
Il existe un point C et un réel t tels que $\overrightarrow{AC} = t\overrightarrow{V_A}$ et $\overrightarrow{BC} = t\overrightarrow{V_B}$.
En soustrayant membre à membre, on trouve $\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{BC} = t\overrightarrow{V_A} - t\overrightarrow{V_B}$ soit $\overrightarrow{AB} = t\overrightarrow{V_A} - t\overrightarrow{V_B}$.
Les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{V_A} - \overrightarrow{V_B}$ sont colinéaires et leur produit en croix est nul.
Réciproquement, si il existe k tel que $\overrightarrow{AB} = \left(k\overrightarrow{V_A} - \overrightarrow{V_B}\right)$, alors $k = t$ et il existe C tel que $\overrightarrow{AC} = t\overrightarrow{V_A}$ et $\overrightarrow{BC} = t\overrightarrow{V_B}$.

b. question 1 : Les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{V_A} - \overrightarrow{V_B}$ sont (–1 ; 2) et (–1 ; 0) qui ne sont pas colinéaires. Il n'y a pas collision.
question 2 : Les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{V_A} - \overrightarrow{V_B}$ sont (–6 ; 3) et (–2 ; 1) qui sont colinéaires. Il y a collision.

67 **1. a.** Les coordonnées du point D et des vecteurs $\overrightarrow{V_N}$ et $\overrightarrow{V_T}$ sont respectivement (0 ; d), (V_N ; 0) et ($V_T \cos\theta$; $V_T \sin\theta$).
b. D'après l'exercice **66** question **3.**, pour qu'il y ait collision, il faut et il suffit que les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{V_N} - \overrightarrow{V_T}$ soient colinéaires, c'est-à-dire $d(V_N - V_T \cos\theta) = 0$,
soit $\cos\theta = \dfrac{V_N}{V_T}$.
c. Soit I le point de collision. On a $\overrightarrow{NI} = t\overrightarrow{V_N}$ et $\overrightarrow{OI} = t\overrightarrow{V_T}$ et en calculant l'ordonnée de I par les deux égalités, on trouve $d = t\overrightarrow{V_T} \sin\theta$
soit $t = \dfrac{d}{V_T \sin\theta}$.
2. a. Les coordonnées du point D et des vecteurs $\overrightarrow{V_N}$ et $\overrightarrow{V_T}$ sont respectivement ($-d \sin\theta$; $d \cos\theta$), (V_N ; 0) et (0 ; V_T).
b. D'après l'exercice **66** question **3.**, pour qu'il y ait collision, il faut et il suffit que les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{V_N} - \overrightarrow{V_T}$ soient colinéaires, le produit en croix est nul,
c'est-à-dire $dV_T \sin\theta - dV_N \cos\theta = 0$,
ou encore $\tan\theta = \dfrac{V_N}{V_T}$.

68 La droite $ax + by - c = 0$ admet comme vecteur directeur le vecteur $\vec{u}$ de coordonnées ($-b$; a).
La droite $a'x + b'y - c' = 0$ le vecteur $\vec{v}$ de coordonnées ($-b'$; a'). Les deux droites sont sécantes lorsque leurs vecteurs directeurs ne sont pas colinéaires, donc lorsque le produit en croix est non nul, c'est-à-dire $ab' - a'b \neq 0$.

69 Dans le repère (A, $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$) les coordonnées du point M sont (x ; y).
Par la translation de vecteur $\overrightarrow{AC}$, on a : $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{MM'}$ donc $(0 ; 1) = ((x' - x) ; (y' - y))$.
Les coordonnées de M' sont (x ; $1 + y$).
Les coordonnées du point I sont $\left(\dfrac{1}{2} ; 0\right)$.



Comme I est le milieu de MM'', on a
$\left(\dfrac{1}{2} ; 0\right) = \left(\dfrac{x + x''}{2} ; \dfrac{y + y''}{2}\right)$.
Les coordonnées de M'' sont ($1 - x$; $-y$).
Calculons les coordonnées du milieu du segment [M' M''].
$\left(\dfrac{x - 1 - x}{2} ; \dfrac{1 + y - y}{2}\right) = \left(\dfrac{1}{2} ; \dfrac{1}{2}\right)$.
Ce sont les coordonnées du point J.
Donc J est le milieu du segment [M' M''].

70 **a.** Les coordonnées des points sont A(0 ; 0), B(2 ; 0), C(2 ; 2), D(0 ; 2), E(1 ; 0), F(2 ; 1), G(1 ; 2) et H(0 ; 1).
b. Équation de la droite (AF) : Soit M un point générique de la droite (AF). Les vecteurs $\overrightarrow{AM}(x - 0 ; y - 0)$ et $\overrightarrow{AF}$ (2 – 0 ; 1 – 0) sont colinéaires donc le produit en croix est nul, c'est-à-dire $x - 2y = 0$.

Équation de la droite (AG) : Soit M un point générique de la droite (AG). Les vecteurs $\overrightarrow{AM}(x-0\ ;\ y-0)$ et $\overrightarrow{AG}(1-0\ ;\ 2-0)$ sont colinéaires donc le produit en croix est nul, c'est-à-dire $2x-y=0$.

Équation de la droite (BD) : Soit M un point générique de la droite (AG). Les vecteurs $\overrightarrow{BM}(x-2\ ;\ y-0)$ et $\overrightarrow{BD}(0-2\ ;\ 2-0)$ sont colinéaires donc le produit en croix est nul, c'est-à-dire $2(x-2)+2y=0$, soit $x+y-2=0$.

c. Les coordonnées du point M vérifient le système $\begin{cases} x-2y=0 \\ x+y-2=0 \end{cases}$.

Les coordonnées du point M sont $\left(\frac{4}{3}\ ;\frac{2}{3}\right)$.

De la même façon, les coordonnées du point N vérifient le système $\begin{cases} 2x-y=0 \\ x+y-2=0 \end{cases}$.

Les coordonnées du point N sont $\left(\frac{2}{3}\ ;\frac{4}{3}\right)$.

d. Les trois vecteurs ont les mêmes coordonnées $\left(\frac{2}{3}\ ;-\frac{2}{3}\right)$ donc $\overrightarrow{DN}=\overrightarrow{NM}=\overrightarrow{MB}$.

e. Les coordonnées de $\overrightarrow{CM}$ sont $\left(-\frac{2}{3}\ ;-\frac{4}{3}\right)$.

Les coordonnées de $\overrightarrow{CE}$ sont $(-1\ ;\ -2)$. Le produit en croix des deux vecteurs est :

$$\left(-\frac{2}{3}\right)\times(-2)-\left(-\frac{4}{3}\right)\times(-1)=0$$

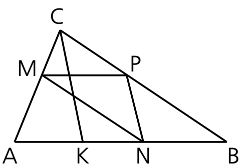
donc les points E, M et C sont alignés.

f. Les coordonnées de $\overrightarrow{CN}$ sont $\left(-\frac{4}{3}\ ;-\frac{2}{3}\right)$.

Les coordonnées de $\overrightarrow{CH}$ sont $(-2\ ;\ -1)$. Le produit en croix des deux vecteurs est :

$-\frac{4}{3}\times(-1)-\left(-\frac{2}{3}\right)\times(-2)=0$ donc les points H, N et C sont alignés.

71 **1. a.** Les coordonnées des points sont A(0 ; 0), B(1 ; 0), C(0 ; 1), M(0 ; t) et N(t ; 0).



b. Équation cartésienne de la droite (BC) : Soit M un point générique de la droite (BC). Les vecteurs $\overrightarrow{BM}(x-1\ ;\ y)$ et $\overrightarrow{BC}(-1\ ;\ 1)$ sont colinéaires, donc le produit en croix est nul , c'est-à-dire $(x-1)+y=0$ soit $x+y-1=0$.

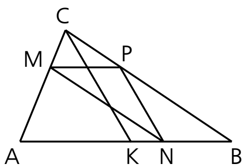
Les coordonnées du point P sont donc $(1-t\ ;\ t)$.

2. a. Les droites (PN) et (CK) sont parallèles lorsque les vecteurs $\overrightarrow{PN}(2t-1\ ;\ -t)$ et $\overrightarrow{CK}(k\ ;\ -1)$ sont colinéaires. Le produit en croix est donc nul c'est-à-dire $-(2t-1)-kt=0$ ou encore $t(2-k)=1$.

Si $k\neq 2$, $t=\frac{1}{2-k}$.

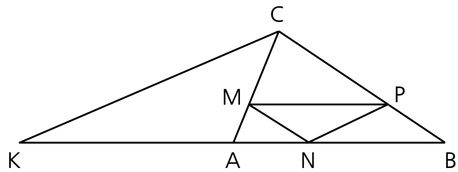
Il n'existe pas de x lorsque $k=2$.

b. Construction pour $k=\frac{1}{2}$:



On a alors $t=\frac{1}{2-\frac{1}{2}}=\frac{2}{3}$.

Construction pour $k=-1$.



On a alors $t=\frac{1}{2-(-1)}=\frac{1}{3}$.

72 **1.** Les coordonnées des points sont A(0 ; 0), B(1 ; 0), et C(0 ; 1).

2. Équation cartésienne de la droite (PR) : Soit M un point générique de la droite (PR). Les vecteurs $\overrightarrow{PM}(x\ ;\ y-b)$ et $\overrightarrow{PR}(a\ ;\ -b)$ sont colinéaires donc le produit en croix est nul c'est-à-dire $-bx-a(y-b)=0$ donc $bx+ay-ab=0$.

Équation cartésienne de la droite (BC) :

Soit M un point générique de la droite (BC). Les vecteurs $\overrightarrow{BM}\ (x-1\ ;\ y)$ et $\overrightarrow{BC}\ (-1\ ;\ 1)$ sont colinéaires donc le produit en croix est nul c'est-à-dire $(x-1)+y=0$, donc $x+y-1=0$.

3. a. La droite (PR) coupe la droite (BC) lorsque les vecteurs directeurs des deux droites de coordonnées $(-a\ ;\ b)$ et $(-1\ ;\ 1)$ ne sont pas colinéaires donc le produit en croix est non nul, à savoir $a \neq b$. La droite (PR) coupe la droite (BC) lorsque $a \neq b$.

b. On suppose $a \neq b$. Les coordonnées du point d'intersection Q des droites (PR) et (BC) vérifient le système $\begin{cases} bx + ay - ab = 0 \\ x + y = 1 \end{cases}$.

On trouve après résolution

$Q\left(a\dfrac{b-1}{b-a}\ ;\ b\dfrac{1-a}{b-a}\right)$.

4. Les coordonnées des milieux respectifs des segments [PB], [AQ] et [RC] sont

$I\left(\dfrac{1}{2}\ ;\ \dfrac{b}{2}\right)$, $J\left(\dfrac{a(b-1)}{2(b-a)}\ ;\ \dfrac{b(1-a)}{2(b-a)}\right)$ et $K\left(\dfrac{a}{2}\ ;\ \dfrac{1}{2}\right)$.

5. Les coordonnées de $\overrightarrow{IJ}$ sont

$\left(\dfrac{b(a-1)}{2(b-a)}\ ;\ \dfrac{b(1-b)}{2(b-a)}\right)$.

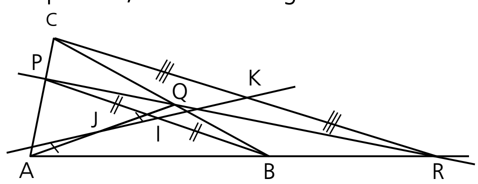
Les coordonnées de $\overrightarrow{IK}$ sont $\left(\dfrac{a-1}{2}\ ;\ \dfrac{1-b}{2}\right)$.

On constate que $\overrightarrow{IJ} = \dfrac{b}{b-a}\overrightarrow{IK}$.

On peut remarquer que le produit en croix des deux vecteurs est nul

$\dfrac{b(a-1)}{2(b-a)} \times \dfrac{1-b}{2} - \dfrac{b(1-b)}{2(b-a)} \times \dfrac{a-1}{2} = 0.$

Les points I, J et K sont alignés.



73 **a.** On prendra garde à l'ordre des points du parallélogramme !

On a $\overrightarrow{GA} = 3\overrightarrow{GB}$ donc $\overrightarrow{GA} = 3\overrightarrow{GA} + 3\overrightarrow{AB}$ d'où $-2\overrightarrow{GA} = 3\overrightarrow{AB}$

soit finalement $\overrightarrow{GA} = -\dfrac{3}{2}\overrightarrow{AB}$.

b. $\overrightarrow{GD} = \overrightarrow{GA} + \overrightarrow{AD} = -\dfrac{3}{2}\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$

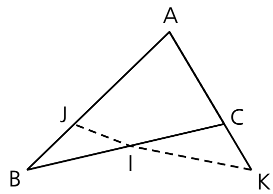
$= -\dfrac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$.

$\overrightarrow{GH} = \overrightarrow{GA} + \overrightarrow{AH} = -\dfrac{3}{2}\overrightarrow{AB} + 3\overrightarrow{AC}$.

c. On constate que $\overrightarrow{GH} = 3\overrightarrow{GD}$. Les vecteurs $\overrightarrow{GH}$ et $\overrightarrow{GD}$ sont colinéaires.

d. Comme les vecteurs $\overrightarrow{GH}$ et $\overrightarrow{GD}$ sont colinéaires, les points H, D et G sont alignés.

74 On va décomposer les vecteurs en fonction des deux vecteurs non colinéaires $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$.



1. $\overrightarrow{AK} = 3(\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AK}) = 3\overrightarrow{CA} + 3\overrightarrow{AK}$ donc

$\overrightarrow{AK} = \dfrac{3}{2}\overrightarrow{AC}$.

2. Utilisons l'égalité $\overrightarrow{JA} = 2\overrightarrow{BJ}$.

$\overrightarrow{JA} = 2\overrightarrow{BA} + 2\overrightarrow{AJ}$, soit $3\overrightarrow{JA} = 2\overrightarrow{BA}$, donc $\overrightarrow{JA} = \dfrac{2}{3}\overrightarrow{AB}$.

3. Comme I milieu du segment [BC], on a $\overrightarrow{IB} + \overrightarrow{IC} = 0$. D'après la relation de Chasles $\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB} + \overrightarrow{IA} + \overrightarrow{AC} = 0$.

Donc $\overrightarrow{IA} = \dfrac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC})$.

4. a. $\overrightarrow{JK} = \overrightarrow{JA} + \overrightarrow{AK}$. En utilisant **1.** et **2.**

$\overrightarrow{JK} = -\dfrac{2}{3}\overrightarrow{AB} + \dfrac{3}{2}\overrightarrow{AC}$.

b. $\overrightarrow{JI} = \overrightarrow{JA} + \overrightarrow{AI}$. En utilisant **2.** et **3.**

$\overrightarrow{JI} = -\dfrac{2}{3}\overrightarrow{AB} + \dfrac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \dfrac{1}{2}\overrightarrow{AC} = -\dfrac{1}{6}\overrightarrow{AB} + \dfrac{1}{2}\overrightarrow{AC}$.

c. On recherche k réel que $\overrightarrow{JK} = k\overrightarrow{IJ}$.

soit $-\dfrac{2}{3}\overrightarrow{AB} + \dfrac{3}{2}\overrightarrow{AC} = -\dfrac{k}{6}\overrightarrow{AB} + \dfrac{k}{2}\overrightarrow{AC}$

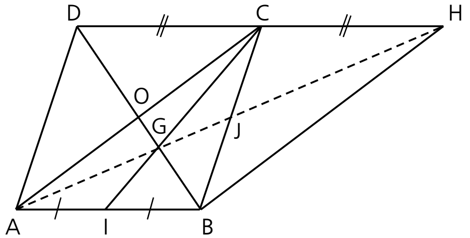
on doit avoir $\begin{cases} -\dfrac{k}{6} = -\dfrac{2}{3} \\ \dfrac{k}{2} = \dfrac{3}{2} \end{cases}$, ce système est impossible donc les vecteurs $\overrightarrow{JK}$ et $\overrightarrow{JI}$ ne sont pas colinéaires et les points I, J et K ne sont pas alignés.

5. $\overrightarrow{JC} = \overrightarrow{JA} + \overrightarrow{AC} = -\dfrac{2}{3}\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$

et $\overrightarrow{BK} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AK} = -\overrightarrow{AB} + \dfrac{3}{2}\overrightarrow{AC}$.

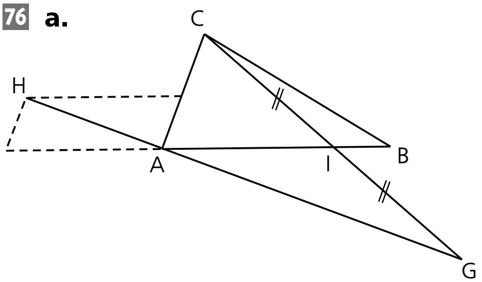
On constate que $\overrightarrow{JC} = \dfrac{2}{3}\overrightarrow{BK}$. Les droites (JC) et (BK) sont parallèles.

75 **a.** Les diagonales du parallélogramme ABCD se coupent en leur milieu appelé O. (OB) est une médiane du triangle ABC.
Or (CI) est aussi une médiane de ce triangle, donc G est le centre de gravité du triangle ABC.



b. ABHC est un parallélogramme.
Les diagonales se coupent en leur milieu J.
(AJ) est la troisième médiane du triangle ABC, donc les points A, G et H sont alignés.

76 **a.**



b. Comme I est le milieu de [CG], on a $2\overrightarrow{AI} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AG}$.

Donc $\frac{3}{2}\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AG}$, on a donc

$\overrightarrow{AG} = \frac{3}{2}\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}$.

Or $\overrightarrow{AH} = -\frac{3}{4}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$. On constate que $\overrightarrow{AG} = -2\overrightarrow{AH}$. Les points A, G et H sont alignés.

77 **1. a.** Les coordonnées des points sont A(0 ; 0), B(1 ; 0), C(a ; b), D(0 ; 1),

$I\left(\frac{1}{2} ; 0\right)$, $J\left(\frac{a}{2} ; \frac{b+1}{2}\right)$, $M\left(0 ; \frac{2}{3}\right)$,

$N\left(\frac{a}{3} + \frac{1}{6} ; \frac{b}{3} + \frac{1}{3}\right)$ et $P\left(\frac{2}{3}a + \frac{1}{3} ; \frac{2}{3}b\right)$.

b. Les coordonnées du milieu du segment [MP] sont $\left(\frac{a}{3} + \frac{1}{6} ; \frac{b}{3} + \frac{1}{3}\right)$.

Ce sont les coordonnées de N. On a donc N milieu du segment [MP].

2. a. Les coordonnées des points Q et R sont $\left(\frac{2}{3}a ; \frac{2}{3}b\right)$ et $\left(\frac{1}{3} ; \frac{2}{3}\right)$.

b. Les coordonnées du milieu du segment [RQ] sont $\left(\frac{a}{3} + \frac{1}{6} ; \frac{b}{3} + \frac{1}{3}\right)$. Ce sont les coordonnées de N. N est le milieu du segment [RQ].

3. a. Les coordonnées du point S sont $\left(\frac{1}{4} + \frac{a}{2} ; \frac{b}{2}\right)$.

Les vecteurs $\overrightarrow{DN}$ et $\overrightarrow{DS}$ ont pour coordonnées respectives $\left(\frac{a}{3} + \frac{1}{6} ; \frac{b}{3} - \frac{2}{3}\right)$ $\left(\frac{a}{2} + \frac{1}{4} ; \frac{b}{2} - 1\right)$

On constate que $\overrightarrow{DN} = \frac{2}{3}\overrightarrow{DS}$. Les points D, N et S sont alignés.

b. Le point N est le point de concours des médianes [IJ] et [DS] donc le point N est le centre de gravité du triangle CDI.

Pour aller plus loin

84 **1. a.** Les coordonnées des points sont A(0 ; 0), B(1 ; 0), C(0 ; 1), $A'\left(\frac{1}{2} ; \frac{1}{2}\right)$, $B'\left(0 ; \frac{1}{2}\right)$, $C'\left(\frac{1}{2} ; 0\right)$.

b. Les équations des droites sont
(AA′) : $x - y = 0$. (BB′) : $x + 2y - 1 = 0$.
(CC′) : $2x + y - 1 = 0$.

2. a. Le système est $\begin{cases} x - y = 0 \\ x + 2y = 1 \end{cases}$, sa résolution donne $G\left(\frac{1}{3} ; \frac{1}{3}\right)$.

b. Comme $2 \times \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - 1 = 0$ le point G est sur la droite (CC′).
Le théorème est « les trois médianes d'un triangle sont concourantes ».

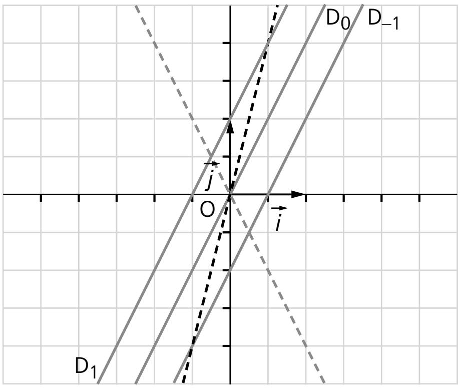
3. a. Comme le vecteur $\overrightarrow{AG}$ a pour coordonnées $\left(\frac{1}{3} ; \frac{1}{3}\right)$, la traduction vectorielle est $\overrightarrow{AG} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$.

b. Comme $3\overrightarrow{AG} = 3\overrightarrow{AB} + 3\overrightarrow{AC}$ on en déduit $3\overrightarrow{AG} = \overrightarrow{AG} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{AG} + \overrightarrow{GC}$ ou encore $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \vec{0}$.

c. L'égalité précédente donne
$\overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GA} + \overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GC} = \vec{0}$.
Soit $3\overrightarrow{MG} = \vec{0}$, donc M est en G.
G est le seul point qui vérifie
$\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = \vec{0}$.

4. $\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BE} + \overrightarrow{CF} = \vec{0}$ s'écrit
$\overrightarrow{AG} + \overrightarrow{GD} + \overrightarrow{BG} + \overrightarrow{GE} + \overrightarrow{CG} + \overrightarrow{GF} = \vec{0}$ comme $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \vec{0}$ il vient $\overrightarrow{GD} + \overrightarrow{GE} + \overrightarrow{GF} = \vec{0}$,
G est le centre de gravité du triangle EDF.

85 **1. a.**



b. Les coordonnées d'un vecteur directeur de la droite $\mathcal{D}_m$ sont (1 ; 2) donc toutes les droites $\mathcal{D}_m$ sont parallèles.

2. Les coordonnées des points A_m et B_m sont respectivement $\left(-\dfrac{m}{2}\,;0\right)$ et (0 ; m).

3. a. Les coordonnées du point I_m sont $\left(-\dfrac{m}{4}\,;\dfrac{m}{2}\right)$.
Les points I_m sont sur la droite d'équation $y = -2x$.

2. a. Les coordonnées du point J_m $\left(\dfrac{m}{2}\,;2m\right)$.

b. Les points J_m sont sur la droite d'équation $y = 4x$.

86 **1. a.** Les coordonnées des points sont A(0 ; 0), I(1 ; 0), B(2 ; 0) et D(0 ; 1).

b. Les coordonnées des points sont C(c ; 1) et $J\left(\dfrac{c}{2}\,;1\right)$.

c. Les vecteurs $\overrightarrow{AD}(0\,;1)$ et $\overrightarrow{BC}(c-2\,;1)$ sont colinéaires si et seulement si $c = 2$.

2. a. Équation cartésienne de la droite (AC) :
Les vecteurs $\overrightarrow{AM}(x\,;y)$ et $\overrightarrow{AC}(c\,;1)$ sont colinéaires donc le produit en croix est nul, c'est-à-dire $x - cy = 0$.
Équation cartésienne de la droite (DB) :
Les vecteurs $\overrightarrow{DM}(x\,;y-1)$et $\overrightarrow{DB}(2\,;-1)$ sont colinéaires, c'est-à-dire $x + 2y - 2 = 0$.
Équation cartésienne de la droite (BC) :
Les vecteurs $\overrightarrow{BM}(x-2)\,;y)$ et $\overrightarrow{BC}\left(\dfrac{c}{2}-1\,;1\right)$ sont colinéaires, c'est-à-dire $x + (2-c)y - 2 = 0$.
Équation cartésienne de la droite (IJ) :
Les vecteurs $\overrightarrow{IM}(x-1\,;y)$ et $\overrightarrow{IJ}(c-2\,;1)$ sont colinéaires, c'est-à-dire $x + -\left(\dfrac{c}{2}-1\right)y - 1 = 0$.

b. Coordonnées du point N :
Un vecteur directeur de la droite (AC) est $\vec{u}(c\,;1)$ et un vecteur directeur de la droite (BD) est $\vec{v}(2\,;-1)$. Les droites se coupent lorsque les vecteurs directeurs ne sont pas parallèles donc lorsque le produit en croix est non nul, soit $-c - 2 \neq 0$ c'est-à-dire lorsque $c \neq -2$. (comme c est positif ce cas ne se présente pas).
Les coordonnées du point d'intersection N vérifient le système : $\begin{cases} x - cy = 0 \\ x + 2y - 2 = 0 \end{cases}$.
La résolution du système donne
$N\left(\dfrac{2c}{c+2}\,;\dfrac{2}{c+2}\right)$.
Coordonnées du point M :
Un vecteur directeur de la droite (AD) est $\vec{w}(0\,;1)$ et un vecteur directeur de la droite (BC) est $\vec{t}(c-2\,;1)$. Les droites se coupent lorsque $c \neq 2$.
Les coordonnées du point d'intersection M vérifient le système : $\begin{cases} x = 0 \\ x + (2-c)y - 2 = 0 \end{cases}$.
M a pour coordonnées $\left(0\,;\dfrac{2}{2-c}\right)$.

3. a. On constate que
$0 + -\left(\dfrac{c}{2}-1\right)\dfrac{2}{c-2} - 1 = 0,$
donc les coordonnées du point M vérifient l'équation de la droite (IJ). Le point M est sur la droite (IJ).

De même, on constate que

$$\frac{2c}{2-c} + -\left(\frac{c}{2}-1\right)\frac{2}{c+2} - 1 = 0,$$

donc les coordonnées du point N vérifient l'équation de la droite (IJ). Le point N est sur la droite (IJ). Les points I, J, M et N sont alignés.

b. Les coordonnées du vecteurs $\overrightarrow{NJ}$ sont $\left(\frac{c(c-2)}{2(c+2)} ; \frac{c}{c+2}\right)$ celles de $\overrightarrow{NI}\left(\frac{2-c}{c+2} ; \frac{-2}{c+2}\right)$.

On constate que $\overrightarrow{NJ} = -\frac{c}{2}\overrightarrow{NI}$ donc $k = -\frac{c}{2}$.

Les coordonnées du vecteurs $\overrightarrow{MJ}$ sont $\left(\frac{c}{2} ; \frac{-c}{2-c}\right)$ celles de $\overrightarrow{MI}\left(1 ; \frac{-2}{2-c}\right)$. On constate que $\overrightarrow{MJ} = \frac{c}{2}\overrightarrow{MI}$, donc $k' = \frac{c}{2}$. On constate que $k = k'$.

87 **1. a.** Un vecteur directeur de la droite $\mathscr{D}$ est (–3 ; 2).

b. $2 \times 1 + 3 \times 2 = 8$ donc le vecteur de coordonnées (1 ; 2) n'est pas colinéaire au vecteur de coordonnées (–3 ; 2).

2. Première méthode :

a. L'équation de la droite passant par M de vecteur directeur (1 ; 2) est $2(x-a)-(y-b)=0$ ou encore $2x - y + (b - 2a) = 0$.

b. Les coordonnées du point M' vérifient le système $\begin{cases} 2x - y + b - 2a = 0 \\ 2x + 3y + 1 = 0 \end{cases}$.

c. La résolution du système donne

$x = \frac{3}{4}a - \frac{3}{8}b - \frac{1}{8}$ et $y = -\frac{1}{2}a + \frac{1}{4}b - \frac{1}{4}$.

Les coordonnées du point M' sont

$\left(\frac{3}{4}a - \frac{3}{8}b - \frac{1}{8} ; -\frac{1}{2}a + \frac{1}{4}b - \frac{1}{4}\right)$.

Seconde méthode :

a. Le point N est tel que les vecteurs $\overrightarrow{MN}$ et $\vec{u}$ sont colinéaires. Le point N est sur la droite passant par M de vecteur directeur $\vec{u}$.

b. Les coordonnées du point N vérifient donc

$\begin{cases} x = a + t \\ y = b + 2t \end{cases}$ (1) avec t réel quelconque.

c. Le point N se trouve sur la droite $\mathscr{D}$ d'équation $2x + 3y + 1 = 0$.

t vérifie $2(a + t) + 3(b + 2t) + 1 = 0$ ce qui donne $t = -\frac{1}{4}a - \frac{3}{8}b - \frac{1}{8}$.

On remplace t dans (1) et on retrouve

$x = \frac{3}{4}a - \frac{3}{8}b - \frac{1}{8}$ et $y = -\frac{1}{2}a + \frac{1}{4}b - \frac{1}{4}$.

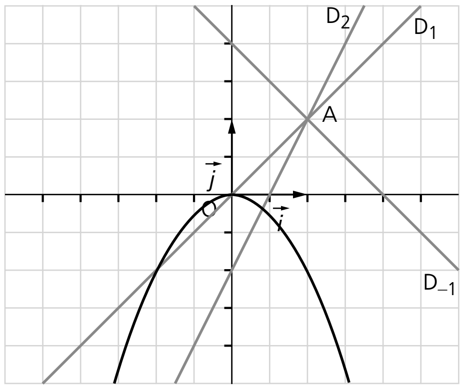
On retrouve les coordonnées du point

$M'\left(\frac{3}{4}a - \frac{3}{8}b - \frac{1}{8} ; -\frac{1}{2}a + \frac{1}{4}b - \frac{1}{4}\right)$.

88 **1.** Soit M un point de la droite $\mathscr{D}_m$. Le vecteur $\overrightarrow{AM}$ est colinéaire au vecteur de coordonnées (1 ; m). Le produit en croix est nul : $m(x - 1) - (y - 1) = 0$.

Ce qui s'écrit $y = mx - m + 1$.

2. a.



b. $\mathscr{D}_{-1}$: On doit résoudre le système

$\begin{cases} y = -x + 2 \\ y = -x^2 \end{cases}$ soit $x^2 - x + 2 = 0$ le discriminant est négatif, il n'y a pas de solution.

$\mathscr{D}_1$: $\begin{cases} y = x \\ y = -x^2 \end{cases}$ soit $x^2 + x = 0$

donc $x = 0$ et $x -1$.

Les coordonnées des points sont (0 ; 0) et (–1 ; –1).

$\mathscr{D}_2$: $\begin{cases} y = 2x - 1 \\ y = -x^2 \end{cases}$ soit $x^2 + 2x - 1 = 0$, donc

$x = -1 + \sqrt{2}$ et $x = -1 - \sqrt{2}$.

Les coordonnées des points sont

$(-1 + \sqrt{2} ; 3 - 2\sqrt{2})$ et $(-1 - \sqrt{2} ; 3 + 2\sqrt{2})$.

3. a. On doit résoudre le système

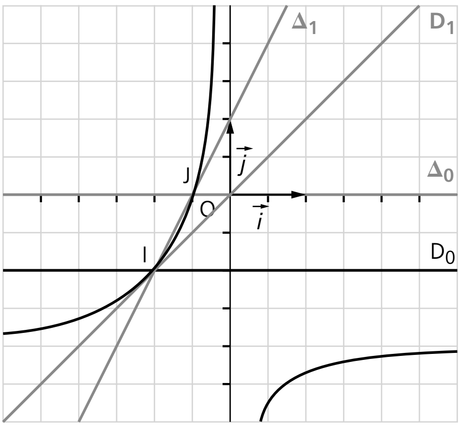
$\begin{cases} y = mx - m + 1 \\ y = -x^2 \end{cases}$, soit $x^2 + mx + (1 - m) = 0$.

Le discriminant est $\Delta = m^2 + 4m - 4$.

Si $m < -2 - 2\sqrt{2}$ ou si $m > -2 + 2\sqrt{2}$, il existe deux solutions.

b. Pour $m = -2 + 2\sqrt{2}$ ou pour $m = -2 - 2\sqrt{2}$ il existe une seule solution.
L'équation de ces droites sont :
Pour $m = -2 + 2\sqrt{2}$, l'équation de la droite est $y = (-2 + 2\sqrt{2})x + (3 - 2\sqrt{2})$
et $m = -2 - 2\sqrt{2}$, l'équation de la droite est $y = (-2 - 2\sqrt{2})x + (3 + 2\sqrt{2})$.
Remarque : pour $-2 - 2\sqrt{2} < m < -2 + 2\sqrt{2}$ il n'y a pas de solution.
4. a. L'équation d'une tangente en x_0 est $y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$.
Elle s'écrit $y = -2x_0(x - x_0) - x_0^2$. L'équation réduite s'écrit $y = -2x_0x + x_0^2$.
b. Pour que cette droite passe par le point A, il faut que $1 = -2x_0 + x_0^2$.
C'est-à-dire $x_0 = 1 + \sqrt{2}$ ou $x_0 = 1 - \sqrt{2}$.
On retrouve les équations des tangentes de la question **3.**
$y = -2(1 - \sqrt{2})x + (1 - \sqrt{2})^2$
et $y = -2(1 + \sqrt{2})x + (1 + \sqrt{2})^2$.

89 **1. a.**



b. On résoud le système $\begin{cases} y = 1 \\ y = x \end{cases}$.
Les coordonnées du point d'intersection I des deux droites $\mathscr{D}_1$ et $\mathscr{D}_2$ sont $(-1 ; -1)$
c. $m \times (-1) + m - 1 = -1$ donc toutes les droites $\mathscr{D}_m$ passent par le point I.
2. a. Voir figure.
b. On résoud le système $\begin{cases} y = 0 \\ y = 2x + 1 \end{cases}$.
Les coordonnées du point d'intersection J de ces deux droites sont $\left(-\dfrac{1}{2} ; 0\right)$
c. $2m \times -\dfrac{1}{2} + m = 0$, donc toutes les droites Δ_m passent par le point J.
3. a. On résoud le système $\begin{cases} y = mx + m - 1 \\ y = 2mx + m \end{cases}$.
Les coordonnées du point d'intersection M_m des droites $\mathscr{D}_m$ et Δ_m sont $\left(-\dfrac{1}{m} ; m - 2\right)$
b. On pose $x = -\dfrac{1}{m}$ et $y = m - 2$ on constate que $y = -\dfrac{1 + 2x}{x}$, donc tous les points M_m sont sur la courbe représentative $\mathscr{C}$ de la fonction f définie par $f(x) = -\dfrac{1 + 2x}{x}$.
c. Voir figure.

Défis

90 On appelle I le milieu du segment [BC].
A' est au tiers de [AI] et B' est au tiers de [ID]
Dans le triangle AID d'après le théorème de Thalès, $\overrightarrow{A'B'} = \dfrac{1}{3}\overrightarrow{AD}$.
De même, on montre que $\overrightarrow{E'D'} = \dfrac{1}{3}\overrightarrow{AD}$ et donc $\overrightarrow{A'B'} = \overrightarrow{E'D'}$, ce qui donne A'B'D'E' est un parallélogramme, les diagonales se coupent en leur milieu, donc [A'D'] et [E'B'] ont même milieu. On montre de la même façon que, B'C'F'E' est un parallélogramme, donc [C'F'] et [B'E'] ont même milieu.
Les trois segments [A'D'], [B'E'] et [C'F'] ont même milieu.

91 ABCD est un parallélogramme
$\overrightarrow{A'B'} = \overrightarrow{D'C'}$. Ce qui s'écrit
$\overrightarrow{A'A} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BB'} = \overrightarrow{D'D} + \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{CC'}$.
Ou encore $t\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AB} + t\overrightarrow{BC} = t\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DC} + t\overrightarrow{CD}$.
Soit $(1 - t)\overrightarrow{AB} + t\overrightarrow{BC} = (1 - t)\overrightarrow{DC} + t\overrightarrow{AD}$,
$(1 - t)\overrightarrow{AB} + t(\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DC}) = (1 - t)\overrightarrow{DC} + t\overrightarrow{AD}$.
$(1 - 2t)\overrightarrow{AB} = (1 - 2t)\overrightarrow{DC}$. Soit $t = \dfrac{1}{2}$ ou soit $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$.
Donc soit ABCD est un parallélogramme ou $t = \dfrac{1}{2}$ avec ABCD non nécessairement un parallélogramme.