EX N°1 :

Soit Un la suite définie pour tout entier naturel n non nul par :

$$\begin{cases} U_1 = \frac{1}{2} \\ U_{n+1} = \frac{n+1}{2n} U_n \end{cases}$$

1. Calculer U_2 , U_3 et U_4

2. a. Démontrer que, pour tout entier naturel n non nul que U_n est strictement positif.

b. Démontrer que la suite U_n est décroissante.

c. Que peut-on en déduire pour la suite U_n ?

3. Pour tout entier naturel n non nul, on pose $V_n = \frac{U_n}{n}$.

a. Démontrer que la suite V_n est géométrique. On précisera sa raison et son premier terme V_1.

b. En déduire que, pour tout entier naturel n non nul,

$$U_n = \frac{n}{2^n}$$

EX N°2 :

On considère la suite U_n définie sur N par :

$$\begin{cases} U_0 = \frac{3}{2} \\ U_{n+1} = 1 + \sqrt{U_n - 1} \end{cases}$$

1)

a - montrer par récurrence que $1 < U_n < 2$ pour tout n de N

b – montrer que U_n est croissante

c – en déduire que U_n est convergente vers une limite que l'on déterminera

2) soit V_n la suite définie par $V_n = ln\,(U_n - 1)$

a- Montrer que V_n est une suite géométrique de raison $\frac{1}{2}$

b- Déterminer $\lim_{n\to+\infty} V_n$

c- Retrouver $\lim_{n\to+\infty} U_n$

EX N°3 :

1) soit la suite U_n définie sur N par

$$\begin{cases} U_0 = 1 \\ U_{n+1} = \dfrac{4U_n}{1 + U_n} \end{cases}$$

a - calculer U_1 et U_2

b - montrer par récurrence que pour tout n de N , $0 < U_n < 3$

2) soit la suite V_n définie sur N par $V_n = \frac{U_n - 3}{U_n}$

a - montrer que V_n est géometrique de raison $\frac{1}{4}$

b - exprimer V_n puis U_n en fonction de n

c - calculer la limite de la suite U_n

3) on considére la suite W_n définie sur N par

$W_n = \frac{3}{u_n}$ et $S_n = \sum_{k=0}^{n} W_k$

a - montrer que pour tout n de N $W_n = 1 - V_n$

b - montrer que pour tout n de N que $S_n = n + 1 + \frac{8}{3}\left(1 - \left(\frac{1}{4}\right)^{n+1}\right)$

c-calculer $\lim_{n\to+\infty} \frac{S_n}{n}$

EX N°4 :

1) Soit la fonction f définie sur $[0, \frac{1}{2}]$ par $f(x) = \frac{x-1}{4x-3}$

a) Montrer que f est strictement croissante sur $[0, \frac{1}{2}]$ puis déterminer $f([0, \frac{1}{2}])$

b) Montrer que, pour tout x de $[0, \frac{1}{2}]$, $f(x) - x \geq 0$

2) On considère la suite réelle U_n définie sur N par :

$$\begin{cases} U_0 = 0 \\ U_{n+1} = f(U_n) \end{cases}$$

a - montrer que pour tout n de N $0 < U_n < \frac{1}{2}$

b - montrer que la suite U_n est croissante

c - en déduire que la suite U_n est convergente et calculer sa limite

EX N°5 :

On considére la suite I_n definie sur N^* par $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{4}} (tan(x))^n dx$

1) *a - montrer que $I_n \geq 0$*
   b – montrer que I_n est une suite décroissante
   c – en déduire que I_n est une suite convergente
2) *a – montrer que pour tout n de N^*, $I_n + I_{n+2} = \frac{1}{n+1}$*

b – en déduire la limite de la suite I_n

c – calculer I_1 , I_2 et I_4

EX N°6 :

On note R l'ensemble des nombres réels et on considère la fonction f définie sur R par :

$$f(x) = xe^{x-1} + 1$$

On note C sa courbe représentative dans un repère orthonormé.

1. Déterminer la limite de f en $-\infty$. Interpréter le resultat trouvée

2. Déterminer la limite de f en $+\infty$.

3. On admet que f est dérivable sur R et on note f' sa fonction dérivée.

Montrer que, pour tout réel x $f'(x) = (x+1)e^{x-1}$

4. Étudier les variations de f sur R et dresser son tableau de variation sur R.