Déterminant de Gram

Soit E un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel muni d'un produit scalaire noté $<\,,\,>$.

Partie I:

Soit $x_1, x_2, ..., x_n$ n vecteurs de E .

On note : $Gram(x_1, x_2, ..., x_n)$ la matrice carrée d'ordre n dont le coefficient

d'indice (i, j) est $< x_i, x_j >$

et par : $G(x_1, x_2, ..., x_n) = \det(Gram(x_1, x_2, ..., x_n))$

$$Gram(x_1, x_2, ..., x_n) = \begin{pmatrix} < x_1, x_1 > & .. & .. & < x_1, x_n > \\ : & & & : \\ : & & & : \\ < x_n, x_1 > & .. & .. & < x_n, x_n > \end{pmatrix} \text{ et } G(x_1, x_2, ..., x_n) = \begin{vmatrix} < x_1, x_1 > & .. & .. & < x_1, x_n > \\ : & & & : \\ : & & & : \\ < x_n, x_1 > & .. & .. & < x_n, x_n > \end{vmatrix}$$

1. On suppose la famille $\{x_1, x_2, ..., x_n\}$ est liée. Montrer que $G(x_1, x_2, ..., x_n) = 0$

2. On suppose la famille $\{x_1, x_2, ..., x_n\}$ est libre.

Soient $(e_1, e_2, ..., e_n)$ une base orthonormée de l'espace vectoriel engendré par $(x_1, x_2, ..., x_n)$

et $A = (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$ la matrice de passage de la base $(e_1, e_2, ..., e_n)$ à la base $(x_1, x_2, ..., x_n)$.

a) Exprimer $< x_i, x_j >$ à l'aide des coefficients de la matrice A .

b) Montrer que $Gram(x_1, x_2, ..., x_n) = (A^t)A$.

En déduire que $G(x_1, x_2, ..., x_n) > 0$

3. Soit F un sous-espace vectoriel de E de dimension p

et $(e_1, e_2, ..., e_p)$ une base de F .

On appelle distance de x vecteur de E au sous-espace vectoriel F le réel :

$d(x, F) = \inf\limits_{y \in F} \|x - y\|$

Soit p_F la projection orthogonal sur F

a)Démontrer que $d(x, F) = \|x - p_F(x)\|$

b) Etablir que:

$$d(x, F) = \frac{\sqrt{G(e_1, ..., e_p, x)}}{\sqrt{G(e_1, ..., e_p)}}$$

Partie II:(Déterminant de CAUCHY)

Soit p un entier naturel non nul et $a_1, ..., a_p, b_1, ..., b_p$ des réels tels que pour tout $i, j \in \{1, \ldots, p\}$,$a_i + b_j \neq 0$

Le but de cette partie est de calculer le déterminant de la matrice :

$$\left(\frac{1}{a_i + b_j}\right)_{1 \leq i,j \leq n} = \begin{pmatrix} \frac{1}{a_1 + b_1} & \frac{1}{a_1 + b_2} & \cdots & \frac{1}{a_1 + b_n} \\ \frac{1}{a_2 + b_1} & \frac{1}{a_2 + b_2} & & \vdots \\ \vdots & & & \vdots \\ \frac{1}{a_n + b_1} & \cdots & \cdots & \frac{1}{a_n + b_n} \end{pmatrix}$$

Ce déterminant sera noté $C_p(a_1, ..., a_p, b_1, ..., b_p)$.

1)Soit

$$F(X) = \frac{(X - a_1)...(X - a_{p-1})}{(X + b_1)......(X + b_p)}$$

Réaliser la décomposition en éléments simples de F.

2)Montrer que:

$$F(a_p)C_{p-1}(a_1, ..., a_{p-1}, b_1, ..., b_{p-1}) = \frac{\prod_{i=1}^{p-1}(a_i + b_p)}{\prod_{i=1}^{p-1}(b_p - b_i)} C_p(a_1, ..., a_p, b_1, ..., b_p)$$

Indication: calculer de deux façons $\begin{vmatrix} \frac{1}{a_1 + b_1} & \cdots & \frac{1}{a_1 + b_{p-1}} & F(a_1) \\ \frac{1}{a_2 + b_1} & & \frac{1}{a_2 + b_{p-1}} & F(a_2) \\ \vdots & & & \vdots \\ \frac{1}{a_p + b_1} & \cdots & \frac{1}{a_p + b_{p-1}} & F(a_p) \end{vmatrix}$

3)En déduire

$$C_p(a_1, ..., a_p, b_1, ..., b_p) = \frac{\prod_{1 \leq i < j \leq p}(b_j - b_i) \prod_{1 \leq i < j \leq p}(a_j - a_i)}{\prod_{1 \leq i,j \leq p}(a_i + b_p)}$$

4)En déduire la valeur de:(déterminant de HILBERT)

$$\begin{vmatrix} \dfrac{1}{2} & \dfrac{1}{3} & \cdots & \dfrac{1}{n+1} \\ \dfrac{1}{3} & \dfrac{1}{4} & & \vdots \\ \vdots & & & \vdots \\ \dfrac{1}{n+1} & \cdots & \cdots & \dfrac{1}{2n} \end{vmatrix}$$

et de :

$$\Delta_p = \begin{vmatrix} \dfrac{1}{1} & \dfrac{1}{2} & \cdots & \dfrac{1}{n} \\ \dfrac{1}{2} & \dfrac{1}{3} & & \vdots \\ \vdots & & & \vdots \\ \dfrac{1}{n} & \cdots & \cdots & \dfrac{1}{2n-1} \end{vmatrix}$$