www.alphamaths.fr.cr

4I- EX2 (suites)- Principale2015- corrigé.

1)

a- $U_1 = \frac{1}{u_0} + \frac{u_0}{2} = \frac{1}{2} + 1 = \frac{3}{2}$, $U_2 = \frac{1}{u_1} + \frac{u_1}{2} = \frac{2}{3} + \frac{3}{4} = \frac{17}{12}$

et $U_3 = \frac{1}{u_2} + \frac{u_2}{2} = \frac{12}{17} + \frac{17}{24} = \frac{577}{408}$.

b- $U_{n+1} - \sqrt{2} = \frac{1}{u_n} + \frac{u_n}{2} - \sqrt{2} = \frac{2+u_n^2-2\sqrt{2}u_n}{2u_n} = \frac{(\sqrt{2}-u_n)^2}{2u_n}$

c- * pour n=0, $u_0=2>\sqrt{2}$ (vrai pour le 1er terme)

* supposons que $u_n>\sqrt{2}$,

On a : $U_{n+1}-\sqrt{2} = (\sqrt{2} - u_n)^2/2u_n > 0$ donc $u_{n+1}>\sqrt{2}$

Donc $u_n>\sqrt{2}$ pour tout entier naturel n.

d- $U_{n+1} - U_n = \frac{1}{u_n} + \frac{u_n}{2} - u_n = \frac{2+u_n^2-2u_n^2}{2u_n} = \frac{2-u_n^2}{2u_n} = \frac{(\sqrt{2}-u_n)(\sqrt{2}+u_n)}{2u_n}$..

Or $u_n>\sqrt{2} \Leftrightarrow \sqrt{2}-u_n<0$ alors $u_{n+1}-u_n <0$ donc (u_n) et décroissante.

e- La suite U est décroissante et minorée par $\sqrt{2}$

Alors elle est convergente vers un réel l.

2) On a : * $u_{n+1}=f(u_n)$ *(u_n) converge vers l

* $l>\sqrt{2}$ *f est continue sur $[\sqrt{2},+\infty[$.

Alors d'après le théorème de convergence des suite monotones la limite l vérifie l=f(l)

$$l = f(l) \Leftrightarrow l = \frac{1}{l} + \frac{l}{2} \Leftrightarrow l = \frac{2+l^2}{2l} \Leftrightarrow l^2 = 2 \Leftrightarrow l = \sqrt{2} \text{ou} -\sqrt{2}$$

or $l\in[\sqrt{2},+\infty[$ donc **$l=\sqrt{2}$**

3) U_3 =577/408=1.414215686274509803921568627451…

$\sqrt{2}$ =1.4142135623730950488016887242097…

Donc U_3 est une valeur approchée de $\sqrt{2}$ à 10^{-5} prés.