Troisième MATHEMATIQUES

Chapitre 0

Méthodes de raisonnement

Prof : Dhiaf

I Propositions

Définition

*Un énoncé mathématique (vrai ou faux) est appelé **proposition**.*
Si une proposition est vraie, sa négation est fausse et réciproquement

Proposition	*Véracité*	*Négation*	*Véracité*
Pour tout réel x , x + 1 > x			
Il existe au moins un réel x tel que $\frac{1}{1+x^2} > 1$			
Tout nombre premier est impair.			
$\forall x \in IR, \exists y \in IR \,/\, x + y > 2$			
Toutes les fenêtres de la salle sont fermées			

II Condition nécessaire - Condition suffisante

Condition nécessaire :
Il faut d'abord casser des œufs pour faire une omelette. Casser des œufs est donc nécessaire pour réaliser ce plat.
La phrase logique s'écrit alors : « Pour faire une omelette, il est nécessaire que je casse des œufs »
La condition « casser des œufs » s'appelle une condition nécessaire.
On peut noter cette phrase sous la forme : Faire une omelette ⇒ Je casse des œufs. (La condition nécessaire est à droite)
On peut écrire cette phrase logique avec « SI et ALORS » : SI je fais une omelette ALORS je casse des œufs
Remarque : Un autre moyen de repérer une condition nécessaire, est de dire que si elle ne se réalise pas, alors la deuxième condition ne peut se réaliser non plus.
Exemple : Si je ne casse pas d'œufs, alors je ne peux pas faire d'omelette.

Condition suffisante :
Parmi ces deux phrases, laquelle semble correcte :
Pour casser des œufs il suffit de faire une omelette .... / Pour faire une omelette il suffit de casser des œufs ....
Dans cet exemple, la condition suffisante est faire une omelette.
Faire une omelette ⇒ je casse des œufs *(La condition suffisante est à gauche)*
SI je fais une omelette ALORS je casse des œufs

Exemples :

1) *Soit ABCD un quadrilatère. La proposition «* $\overrightarrow{AB}$ *et* $\overrightarrow{DC}$ *sont colinéaires » est une condition nécessaire et non suffisante de la proposition « ABCD est un parallélogramme »*
2) *Soit* $x \in IR$*. La proposition «* $x > 1$ *» est une condition suffisante et non nécessaire de la proposition «* $x^2 > 1$ *»*
3) *Soit A et B deux points distincts.*
   La proposition «$MA + MB = AB$ *» est une condition nécessaire et suffisante de la proposition «*$M \in [AB]$*»*

Exercice

1) *Pour chacune des affirmations suivantes dire si elle est vraie ou fausse :*
   a) Pour avoir son permis de conduire, il faut réussir son examen de circulation. ....
   b) Pour avoir son permis de conduire, il suffit de réussir son examen de circulation. ....
   c) Avoir au moins 10 dans chaque matière au bac est une condition nécessaire pour avoir son bac. ....
   d) Avoir au moins 10 dans chaque matière au bac est une condition suffisante pour avoir son bac. ....
   e) Pour que $xy \geq 0$ *il est nécessaire et suffisant que x et y soient tous deux positifs* ....
2) *Donner une condition nécessaire (pas forcément suffisante) à chacune des propositions suivantes :*
   a) Pour que A appartienne au segment [BC], il est nécessaire que ....
   b) Pour que ABCD soit un carré, il est nécessaire que ....
3) *Donner une condition suffisante (pas forcément nécessaire) à chacune des propositions suivantes :*
   a) n un entier naturel. Pour que $2^n \geq 1000$*, il suffit que* ....
   b) Pour que ABCD soit un parallélogramme, il suffit que ....

II Implication, Equivalence

Exercice 1 :

Pour chacun des couples de propositions suivantes (P ; Q), dire si P implique Q et si Q implique P

Quand les deux implications sont vraies, on dit que P et Q sont équivalentes, et on note $P \Leftrightarrow Q$

1°) $P : x^2 = 9$, $Q : x = 3$: **P .... Q**

2°) Soit ABCD un quadrilatère.

P : ABCD est un losange. Q : [AC] et [BD] ont le même milieu et sont perpendiculaires. **P .... Q**

3°) Soit n et k deux entiers. P : n = 4k Q : n est pair. **P .... Q**

4°) P : I est le milieu de [AB] , Q : AI = IB. **P .... Q**

5°) P : MA = MB , Q : M est sur la médiatrice de [AB]. **P .... Q**

6°) $P : x^2 > 4$, $Q : x > 2$. **P .... Q**

Exercice 2 Compléter par $\Rightarrow$ ou $\Leftrightarrow$.

a) $\sqrt{x+1} = x-1$ .... $x+1 = (x-1)^2$

b) Soit x et y deux entiers. $5x - 3y = 1$ .... $5(x-2) = 3(y-3)$ .... 3 divise $(x-2)$ et 5 divise $(y-3)$.

c) Soit (u_n) est une suite réelle. (u_n) est arithmétique .... $u_2 - u_1 = u_1 - u_0$.

d) Soit a et b deux réels. $a^2 = b^2$................$|a| = |b|$

Exercice 3

Soit x et y des réels positifs . Montrer que si $\dfrac{x}{1+y} = \dfrac{y}{1+x}$ alors $x = y$

III Raisonnement par l'absurde

Pour démontrer qu'une proposition P est vraie, on peut supposer que P est fausse et on cherche une contradiction.

Exemple 1 : Montrons que $\sqrt{2}$ n'est pas un nombre rationnel.

Preuve : Supposons que $\sqrt{2}$ soit un rationnel, il s'écrit donc comme quotient de deux entiers strictement positifs p et q, premiers entre eux. Soit $\dfrac{p}{q} = \sqrt{2}$ ou $p = q\sqrt{2}$. Elevons au carré, nous obtenons $2q^2 = p^2$ et donc p² est pair d'où p est pair.

Posons p = 2k, $p^2 = 4k^2$, et par conséquent $2q^2 = 4k^2$, soit $q^2 = 2k^2$. q est donc aussi pair, ce qui contredit le fait que p et q sont premiers entre eux.

Exemple 2 :

Démontrer que si x et y sont des nombres premiers tels que $x^2 - y^2 = pq$ avec p et q premiers supérieurs à 2, alors y = 2.

Preuve :

Compléter :

- Ce qu'on a (les hypothèses) : ....
....
- Ce qu'on veut (la conclusion) :..

Supposons que P est vraie : x et y sont des nombres premiers tels que : $x^2 - y^2 = pq$ avec p et q premiers supérieurs à 2 et Q est fausse :

L'égalité " y = 2 " fausse signifie que y est un nombre premier impair.

Donc y^2 est aussi impair et comme x est un nombre premier plus grand que y (sinon $x^2 - y^2$ serait négatif, ce qui est impossible), alors x est aussi impair de même que x^2. Par conséquent, $x^2 - y^2$ est pair.

Or p et q sont des nombres premiers supérieurs à 2, donc p et q sont impairs, et $pq = x^2 - y^2$ est impair.

On a une contradiction. On peut donc conclure que la propriété demandée est démontrée.

IV Raisonnement par contre-exemple

Exemple 1 : la proposition suivante est-elle vraie : « Deux rectangles de même aire ont même périmètre »

Exemple 2 : Les nombres de Fermat

Soit la proposition P : « Pour tout entier naturel n, $F_n = 2^{2^n} + 1$ est un nombre premier.

On veut montrer que cette proposition est fausse. Il est équivalent de montrer que la proposition contraire (non P) :

il existe un entier naturel n tel que $2^{2^n} + 1$ n'est pas premier.

1) Calculer F_0, F_1, F_2, F_3, F_4 et F_5. 2) Vérifier que F_5 = 4 294 967 297 = 641 x 6 700 417.
3) Conclure

V Raisonnement par contraposée

Définition

Soit (P) la proposition : Si A est vraie, alors B est vraie, notée aussi $A \Rightarrow B$.

La proposition contraposée de (P) est la proposition : Si B n'est pas vraie, alors A n'est pas vraie.

P est vraie si et seulement si la contraposée de P est vraie

Donc si l'on souhaite montrer l'assertion « P implique Q » est vraie, on montre en fait que ((non Q) implique (non P)) est vraie.

Exemple 1 :

Soit n un entier naturel. Montrer que si n^2 est pair alors n est pair.

Preuve :

Soit A la proposition : « n^2 est pair » et B la proposition : « n est pair »

(A⇒B) est vraie si et seulement si (non B ⇒ non A) est vraie.

On montre que si n n'est pas pair, donc impair, alors n^2 est impair.

n est impair alors $n = 2k + 1$, $k \in IN$ d'où $n^2 = 4k^2 + 4k + 1 = 2(2k^2 + 2k) + 1$ et donc n^2 est impair.

Conclusion : *Si n^2 est pair alors n est pair.*

Exemple 2 :

Démontrer que si $2^n - 1$ est premier alors n est premier.

VI Raisonnement par disjonction des cas

Exemple 1 :

Montrer que pour tout entier naturel n, $n(2n + 1)(7n + 1)$ est divisible par 3.

Preuve 1 :

Soit n un entier naturel. Nous distinguons trois cas.

Premier cas : *$n = 3k$, $k \in IN$, alors n est divisible par 3 donc $n(2n+1)(7n+1)$ est divisible par 3*

Deuxième cas : *$n = 3k+1$, $k \in IN$, alors $2n+1 = 6k + 3 = 3(2k+1)$ d'où $2n+1$ est divisible par 3 et donc $n(2n+1)(7n+1)$ est divisible par 3*

Troisième cas : *$n = 3k+2$, $k \in IN$, alors $7n+1 = 21k + 15 = 3(7k+5)$ d'où $7n+1$ est divisible par 3 et donc $n(2n+1)(7n+1)$ est divisible par 3*

Conclusion : *Dans tous les cas, $n(2n+1)(7n+1)$ est divisible par 3*

Exemple 2 :

Montrer que pour tout réel x , $|x-1| \leq x^2 - x + 1$.

Preuve 2 :

Soit x un réel. Nous distinguons deux cas. $x \geq$ et $x < 1$.

Premier cas : *$x \geq 1$. Alors $|x-1| = x-1$. Calculons alors $x^2 - x + 1 - |x-1|$*

$$x^2 - x + 1 - |x-1| = x^2 - x + 1 - x + 1 = x^2 - 2x + 1 + 1 = (x-1)^2 + 1 \geq 0 \text{ donc } |x-1| \leq x^2 - x + 1$$

Deuxième cas : *$x < 1$. Alors $|x-1| = 1 - x$. Nous obtenons $x^2 - x + 1 - |x-1| = x^2 - x + 1 - 1 + x = x^2 \geq 0$*

donc $|x-1| \leq x^2 - x + 1$

Conclusion. *Dans tous les cas $|x-1| \leq x^2 - x + 1$*

VII Raisonnement par récurrence

Principe de récurrence :

Soit n_0 un entier naturel. Le principe de récurrence permet de montrer qu'une assertion P(n), dépendante de n, est vraie pour tout entier $n \geq n_0$.

La démonstration par récurrence se déroule en 3 étapes :

Étape 1 - Initialisation : *On prouve que $P(n_0)$ est vraie.*

Étape 2 - Hérédité : *On suppose $n \geq n_0$ donné avec P(n) vraie et on démontre que l'assertion $P(n + 1)$ est vraie.*

Étape 3 - Conclusion : *On rappelle que, par le principe de récurrence, P(n) est vraie pour tout $n \geq n_0$.*

Exemple :

Démontrer que $2^n > 5(n + 1)$ pour n entier supérieur ou égal à 5.

Preuve :

La propriété P(n) est " $2^n > 5(n + 1)$ ".

1) Condition initiale : pour n = 5 : P(5) est vrai car $2^5 = 32 > 5(5 + 1) = 30$.

2) Condition héréditaire : Soit n un entier supérieur ou égal à 5.

Si P(n) est vraie, alors en multipliant par 2 : $2(2^n) > 2[5(n + 1)]$. Or $2.[5(n + 1)] = 10n + 10$ et $10n + 10 > 5(n + 2)$.

Donc $2^{n+1} > 5(n + 2)$, soit $P(n + 1)$ est vraie.

Conclusion : pour tout $n \geq 5$, P(n) est vraie.

Exercice :

*Montrer **par** récurrence que pour tout entier naturel n, 9 divise $17^{2^n} + 8$.*

VIII Analyse et synthèse

On suppose le problème résolu et on en déduit des conditions nécessaires : c'est la phase d'analyse. On montre que ces conditions sont en fait suffisantes et on résout le problème : c'est la phase de synthèse.

Exemple :

Montrons que toute fonction de IR dans IR est somme d'une fonction paire et d'une fonction impaire. .

Preuve :

Raisonnons par analyse–synthèse.

Analyse : *Si f est une fonction somme d'une fonction paire p et d'une fonction impaire q, alors* $\forall x \in IR,\ f(x) = p(x) + q(x)$.

On a donc, en utilisant le fait que p est paire et q est impaire, $\forall x \in IR,\ f(-x) = p(-x) + q(-x) = p(x) - q(x)$, *de sorte que*

$\forall x \in IR,\ p(x) = f(x) + f(-x)$ *et* $q(x) = f(x) - f(-x)$.

Synthèse : *Posons* $\forall x \in IR,\ p(x) = f(x) + f(-x)$ *et* $q(x) = f(x) - f(-x)$.

La fonction p (resp. q) est paire (resp. impaire) comme on le voit immédiatement : $\forall x \in IR,\ p(-x) = f(-x) + f(x) = p(x)$ *et*

$\forall x \in IR,\ q(-x) = f(-x) - f(x) = -q(x)$.

Comme de plus par construction on a : $\forall x \in IR,\ p(x) + q(x) = f(x)$, *on a ainsi démontré qu'il existe une fonction paire p et une fonction impaire q telles que* $f = p + q$.