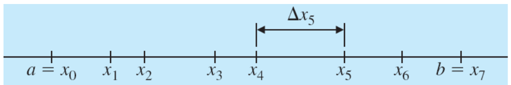
Intégrales Multiples

1. INTEGRALES DOUBLES

- Préliminaires

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(c_i)\,\Delta x$$

La définition suivante généralise l'intégration en supposant que la partition est irrégulière (c'est-à-dire tous les sous-intervalles n'ont pas la même largeur):



1. INTEGRALES DOUBLES

DEFINITION 1.1

Pour toute fonction *f* définie sur l'intervalle *[a, b]*, l'intégrale définie de *f* sur *[a, b]* est

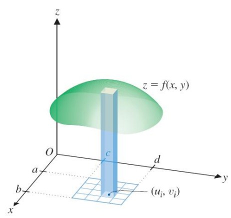
$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\|P\|\to 0} \sum_{i=1}^{n} f(c_i)\,\Delta x_i,$$

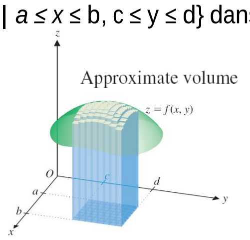
à condition que la limite existe et est la même pour tous les choix des points d'évaluation $c_i \in [x_{i-1}, x_i]$, pour i = 1, 2,. . . , *n*.
Dans ce cas, on dit que *f* est intégrable sur [a, b].
‖*P*‖ (la norme de la partition) est le plus grand de tous les Δx_i

1. INTEGRALES DOUBLES

- Intégrales Doubles sur un Rectangle

Pour une fonction *f (x, y)*, où *f* est continue et f (x, y) ≥ 0 pour tout *a ≤ x ≤ b, c ≤ y ≤ d*, on veut déterminer le volume du solide se trouvant en dessous de la surface *z = f (x, y)* et au-dessus du rectangle *R = {(x, y)* | *a ≤ x ≤* b, c ≤ y ≤ d} dans le plan xy





1. INTEGRALES DOUBLES

- Intégrales Doubles sur un Rectangle

$\boxed{V_i \approx \text{la hauteur} \times \text{aire de la base} = f(u_i, v_i)\,\Delta_i}$

$$V \approx \sum_{i=1}^{n} f(u_i, v_i)\,\Delta A_i \qquad \text{Somme de Riemann}$$

1. INTEGRALES DOUBLES

EXEMPLE 1.1 Approximation du volume situé sous une surface

Donner une approximation du volume se trouvant sous la surface

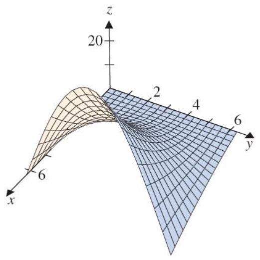
$$z = x^2 \sin \frac{\pi y}{6}$$

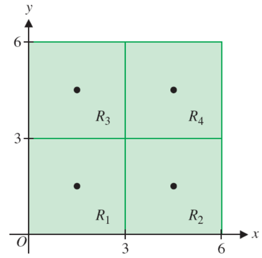
et au-dessus du rectangle *R* = {(*x, y*)|0 ≤ *x* ≤ 6, 0 ≤ *y* ≤ 6}.

1. INTEGRALES DOUBLES

EXEMPLE 1.1 Approximation du volume située sous une surface

Solution $z = x^2 \sin \frac{\pi y}{6}$





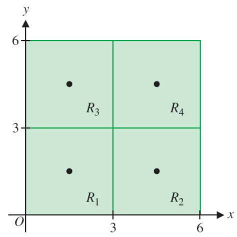
1. INTEGRALES DOUBLES

EXEMPLE 1.1 Approximation du volume située sous une surface

Solution $z = x^2 \sin \frac{\pi y}{6}$

Choisissez les points d'évaluation (u_i, v_i) comme étant les centres des quatre carrés, c'est-à-dire

$$\left(\frac{3}{2}, \frac{3}{2}\right), \left(\frac{9}{2}, \frac{3}{2}\right), \left(\frac{3}{2}, \frac{9}{2}\right) \text{ et } \left(\frac{9}{2}, \frac{9}{2}\right)$$



1. INTEGRALES DOUBLES

EXEMPLE 1.1 Approximation du volume située sous une surface

Solution $V \approx \sum_{i=1}^{4} f(u_i, v_i)\,\Delta A_i \qquad \Delta A_i = 9$

$$= f\left(\frac{3}{2}, \frac{3}{2}\right)(9) + f\left(\frac{9}{2}, \frac{3}{2}\right)(9) + f\left(\frac{3}{2}, \frac{9}{2}\right)(9) + f\left(\frac{9}{2}, \frac{9}{2}\right)(9)$$

$$= 9\left[\left(\frac{3}{2}\right)^2 \sin\left(\frac{\pi}{4}\right) + \left(\frac{9}{2}\right)^2 \sin\left(\frac{\pi}{4}\right) + \left(\frac{3}{2}\right)^2 \sin\left(\frac{3\pi}{4}\right) + \left(\frac{9}{2}\right)^2 \sin\left(\frac{3\pi}{4}\right)\right]$$

$$= \frac{405}{2}\sqrt{2} \approx 286.38$$

1. INTEGRALES DOUBLES

EXEMPLE 1.1 Approximation du volume située sous une surface

Solution

On peut améliorer l'approximation en augmentant le nombre de rectangles dans la partition.

Nb de carrés dans la partition	Volume Approximatif
4	286,38
9	280,00
36	276,25
144	275,33
400	275,13
900	275,07

1. INTEGRALES DOUBLES

NOTE

Le choix du centre de chaque carré comme le point d'évaluation, tel qu'il est utilisé dans l'exemple 1.1, correspond au point milieu de la règle pour l'approximation de la valeur d'une intégrale définie d'une fonction d'une seule variable.
Ce choix de points d'évaluation produit généralement une assez bonne approximation.

1. INTEGRALES DOUBLES

DEFINITION 1.2

Pour toute fonction f définie sur le rectangle $R = \{(x, y) \mid a \le x \le b \text{ et } c \le y \le d\}$, on définit l'intégrale double de f sur R par

$$\iint_R f(x, y)\,dA = \lim_{\|P\| \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(u_i, v_i)\,\Delta A_i,$$

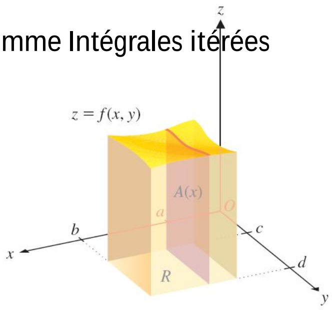
à condition que la limite existe et est la même pour tous les choix des points d'évaluation (u_i, v_i) dans R_i, pour i = 1, 2,. . . , n.
Dans ce cas, on dit que f est intégrable sur R.

1. INTEGRALES DOUBLES

- Intégrales Doubles comme Intégrales itérées

$$V = \int_a^b A(x)\,dx$$

$$A(x) = \int_c^d f(x, y)\,dy$$

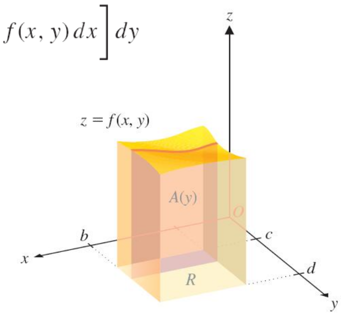


$$V = \int_a^b A(x)\,dx = \int_a^b \left[\int_c^d f(x, y)\,dy \right] dx$$

1. INTEGRALES DOUBLES

- Intégrales itérées

$$V = \int_c^d A(y)\,dy = \int_c^d \left[\int_a^b f(x, y)\,dx \right] dy$$



1. INTEGRALES DOUBLES

- Intégrales itérées

Pour simplifier, on écrit les intégrales sans les parenthèses :

$$\int_a^b \left[\int_c^d f(x, y)\,dy \right] dx = \int_a^b \int_c^d f(x, y)\,dy\,dx$$

$$\int_c^d \left[\int_a^b f(x, y)\,dx \right] dy = \int_c^d \int_a^b f(x, y)\,dx\,dy$$

1. INTEGRALES DOUBLES

THEOREME 1.1 (Théorème de Fubini)

Supposons que f est intégrable sur le réctangle $R = \{(x, y) \mid a \le x \le b \text{ and } c \le y \le d\}$.

Alors on peut écrire l'intégrale double de f sur R comme l'une des Intégrales itérées :

$$\iint_R f(x, y)\,dA = \int_a^b \int_c^d f(x, y)\,dy\,dx = \int_c^d \int_a^b f(x, y)\,dx\,dy$$

1. INTEGRALES DOUBLES

EXEMPLE 1.2 Intégrale Double sur un Réctangle

Si $R = \{(x, y) \mid 0 \le x \le 2 \text{ and } 1 \le y \le 4\}$, calculer

$$\iint_R (6x^2 + 4xy^3)\,dA.$$

1. INTEGRALES DOUBLES

EXEMPLE 1.2 Intégrale Double sur un Réctangle

Solution

$$\iint_R (6x^2 + 4xy^3)\,dA = \int_1^4 \int_0^2 (6x^2 + 4xy^3)\,dx\,dy$$

$$= \int_1^4 \left[\int_0^2 (6x^2 + 4xy^3)\,dx \right] dy$$

$$= \int_1^4 \left(6\frac{x^3}{3} + 4\frac{x^2}{2}y^3 \right) \Bigg|_{x=0}^{x=2} dy$$

$$= \int_1^4 (16 + 8y^3)\,dy = \left(16y + 8\frac{y^4}{4} \right) \Bigg|_1^4$$

$$= [16(4) + 2(4)^4] - [16(1) + 2(1)^4] = 558$$

1. INTEGRALES DOUBLES

EXEMPLE 1.2 Intégrale Double sur un Réctangle

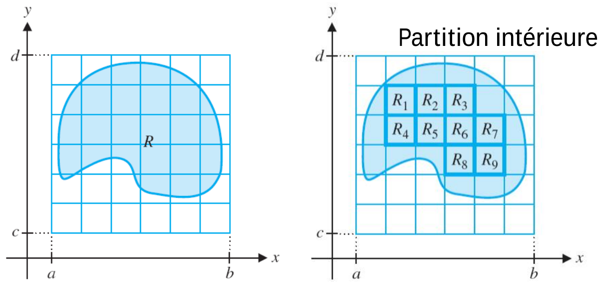
Solution

Nous laissons comme exercice pour montrer qu'on obtient la même valeur en intégrant d'abord par rapport à y, c'est-à-dire

$$\iint_R (6x^2 + 4xy^3)\, dA = \int_0^2 \int_1^4 (6x^2 + 4xy^3)\, dy\, dx = 558$$

1. INTEGRALES DOUBLES

- Intégrales Doubles sur une Région Quelconque



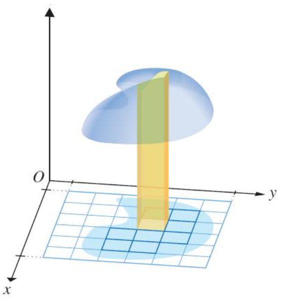
1. INTEGRALES DOUBLES

- Intégrales Doubles sur une Région Quelconque

$V_i \approx$ la hauteur × aire de la base = $f(u_i,v_i)\, \Delta_i$

$$V \approx \sum_{i=1}^{n} f(u_i, v_i)\, \Delta A_i$$

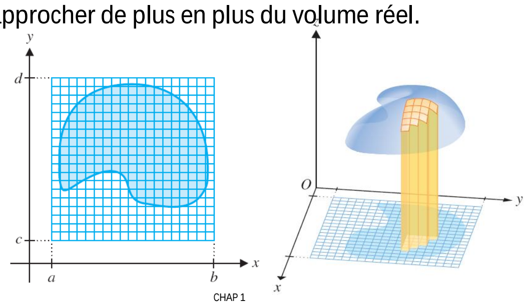
On Définit la norme ‖P‖ de la partition intérieure comme la plus grande diagonale des rectangles $R_1, R_2, \ldots, R_n$.



1. INTEGRALES DOUBLES

- Intégrales Doubles sur une Région Quelconque

Notons que lorsque ‖P‖ devient plus petit, la partition intérieure remplit bien R et le volume approximatif devrait se rapprocher de plus en plus du volume réel.



1. INTEGRALES DOUBLES

- DEFINITION 1.3

Pour toute fonction f définie sur une région délimitée $R \subset \mathbb{R}^2$, on définit l'intégrale double de f sur R par

$$\iint_R f(x, y)\, dA = \lim_{\|P\| \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(u_i, v_i)\, \Delta A_i,$$

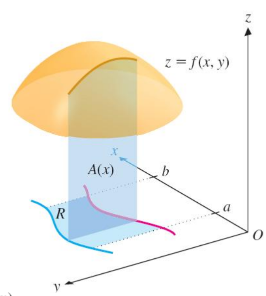
à condition que la limite existe et est la même pour tous les choix des points d'évaluation (u_i, v_i) dans R_i , pour $i = 1, 2, \ldots, n$.

Dans ce cas, on dit que f est intégrable sur R.

1. INTEGRALES DOUBLES

THEOREME 1.2

On suppose que f est continue dans la région définie par $R = \{(x, y) \,|\, a \le x \le b$ et $g_1(x) \le y \le g_2(x)\}$, pour g_1 et g_2 fonctions continues, avec $g_1(x) \le g_2(x)$, pour tout x dans $[a, b]$.



Alors,

$$\iint_R f(x, y)\, dA = \int_a^b \int_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(x, y)\, dy\, dx.$$

1. INTEGRALES DOUBLES

EXEMPLE 1.3 L'évaluation d'une intégrale double

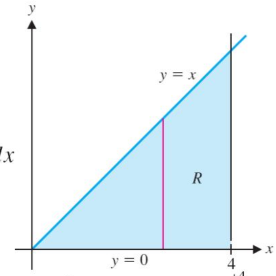
Soit R la région délimitée par les graphes de $y = x$, $y = 0$ et $x = 4$. Calculer

$$\iint_R (4e^{x^2} - 5\sin y)\, dA.$$

1. INTEGRALES DOUBLES

EXEMPLE 1.3 L'évaluation d'une intégrale double

Solution



$$\iint_R (4e^{x^2} - 5\sin y)\, dA = \int_0^4 \int_0^x (4e^{x^2} - 5\sin y)\, dy\, dx$$

$$= \int_0^4 (4ye^{x^2} + 5\cos y)\Big|_{y=0}^{y=x} dx$$

$$= \int_0^4 (4xe^{x^2} + 5\cos x - 5)\, dx = (2e^{x^2} + 5\sin x - 5x)\Big|_0^4$$

$$= 2e^{16} + 5\sin 4 - 22 \approx 1.78 \times 10^7$$

1. INTEGRALES DOUBLES

EXEMPLE 1.4 Limites approximatives de l'intégration

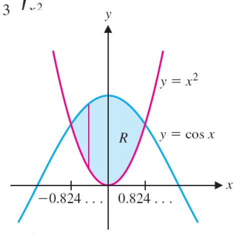
Evaluer $\iint_R (x^2 + 6y)\, dA$, où R est la région délimitée par les graphes de $y = \cos x$ et $y = x^2$.

1. INTEGRALES DOUBLES

EXEMPLE 1.4 Limites approximatives de l'intégration

Solution

$$\iint_R (x^2 + 6y)\, dA \approx \int_{-0.82413}^{0.82413} \int_{x^2}^{\cos x} (x^2 + 6y)\, dy\, dx$$



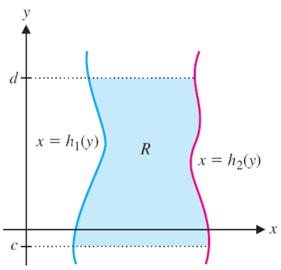
$$= \int_{-0.82413}^{0.82413} \left(x^2 y + 6\frac{y^2}{2}\right)\Big|_{y=x^2}^{y=\cos x} dx$$

$$= \int_{-0.82413}^{0.82413} [(x^2\cos x + 3\cos^2 x) - (x^4 + 3x^4)]\, dx \approx 3.659765588$$

1. INTEGRALES DOUBLES

THEOREME 1.3

On suppose que f est continue dans la région définie par $R = \{(x, y) \mid c \le y \le d$ et $h_1(y) \le x \le h_2(y)\}$, pour h_1 et h_2 fonctions continues, avec $h_1(y) \le h_2(y)$, pour tout y dans $[c, d]$.



Alors, $$\iint_R f(x, y)\, dA = \int_c^d \int_{h_1(y)}^{h_2(y)} f(x, y)\, dx\, dy.$$

1. INTEGRALES DOUBLES

EXEMPLE 1.5 Intégration d'abord par rapport à x

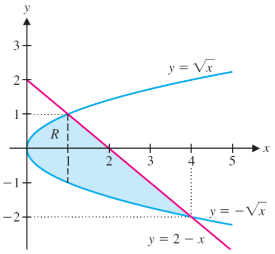
Ecrire $\iint_R f(x, y)\, dA$

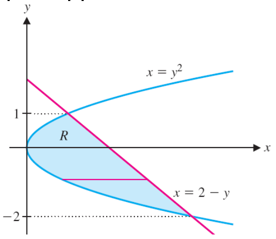
comme intégrale itérée, où R est la région délimitée par les courbes de $x = y^2$ et $x = 2 - y$.

1. INTEGRALES DOUBLES

EXEMPLE 1.5 Intégration d'abord par rapport à *x*

Solution Intégrer d'abord par rapport à *x*.





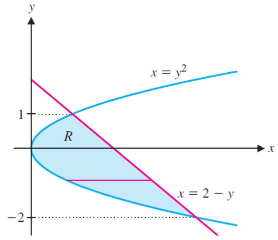
1. INTEGRALES DOUBLES

EXEMPLE 1.5 Intégration d'abord par rapport à *x*

Solution

$$0 = y^2 + y - 2 = (y + 2)(y - 1)$$

y=-2 et *y*=1



$$\iint_R f(x, y)\, dA = \int_{-2}^{1} \int_{y^2}^{2-y} f(x, y)\, dx\, dy$$

1. INTEGRALES DOUBLES

EXEMPLE 1.6 L'évaluation d'une intégrale double

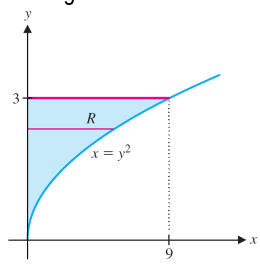
Soit *R* la région délimitée par les graphes de $y = \sqrt{x}$ *x* = 0 et *y* = 3.

Evaluer $\iint_R (2xy^2 + 2y \cos x)\, dA$.

1. INTEGRALES DOUBLES

EXEMPLE 1.6 L'évaluation d'une intégrale double

Solution $\iint_R (2xy^2 + 2y \cos x)\, dA$



$$= \int_0^3 \int_0^{y^2} (2xy^2 + 2y \cos x)\, dx\, dy$$

$$= \int_0^3 (x^2y^2 + 2y \sin x) \Big|_{x=0}^{x=y^2} dy$$

$$= \int_0^3 (y^6 + 2y \sin y^2)\, dy$$

$$= \left(\frac{y^7}{7} - \cos y^2\right)\Bigg|_0^3 = \frac{3^7}{7} - \cos 9 + \cos 0 \approx 314.3$$

1. INTEGRALES DOUBLES

EXEMPLE 1.7 Un cas où on doit changer l'ordre de l'intégration

Evaluer l'intégrales itérée $\int_0^1 \int_y^1 e^{x^2}\, dx\, dy$

1. INTEGRALES DOUBLES

EXEMPLE 1.7 Un cas où on doit changer l'ordre de l'intégration

Solution

$$\int_0^1 \int_y^1 e^{x^2}\, dx\, dy$$

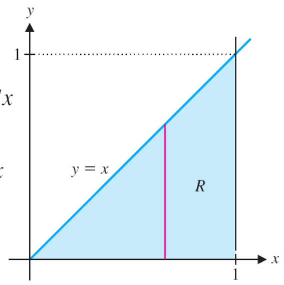
On ne peut pas évaluer l'intégrale sous cette forme puisqu'on connait pas une primitive pour e^{x^2}

1. INTEGRALES DOUBLES

EXEMPLE 1.7 Un cas où on doit changer l'ordre de l'intégration

Solution

$$\int_0^1 \int_y^1 e^{x^2} dx\, dy = \int_0^1 \int_0^x e^{x^2} dy\, dx$$
$$= \int_0^1 e^{x^2} y \Big|_{y=0}^{y=x} dx$$
$$= \int_0^1 e^{x^2} x\, dx$$



1. INTEGRALES DOUBLES

EXEMPLE 1.7 Un cas où on doit changer l'ordre de l'intégration

Solution

$$\int_0^1 \int_y^1 e^{x^2} dx\, dy = \frac{1}{2} \int_0^1 \underbrace{e^{x^2}}_{e^u} \underbrace{(2x)\, dx}_{du}$$
$$= \frac{1}{2} e^{x^2} \Big|_{x=0}^{x=1} = \frac{1}{2}(e^1 - 1)$$

1. INTEGRALES DOUBLES

THEOREME 1.4

Soient f et g deux fonctions intégrables sur la région $R \subset \mathbb{R}^2$ et soit c une constante.

Alors on a :

(i) $$\iint_R c f(x, y)\, dA = c \iint_R f(x, y)\, dA,$$

(ii) $$\iint_R [f(x, y) + g(x, y)]\, dA = \iint_R f(x, y)\, dA + \iint_R g(x, y)\, dA$$

1. INTEGRALES DOUBLES

THEOREME 1.4

(iii) Si $R = R_1 \cup R_2$, où R_1 et R_2 deux régions qui ne se chevauchent pas, alors

$$\iint_R f(x, y)\, dA = \iint_{R_1} f(x, y)\, dA + \iint_{R_2} f(x, y)\, dA.$$