Institut préparatoire aux études d'ingénieurs de Tunis — 2015-2016

MP 1 / MP 2

Devoir à la maison 1:

Théorème de Cantor − Bernstein

Le but de ce probleme est de démontrer le *théorème de Cantor − Bernstein* :

Soient E et F deux ensembles, f une injection de E dans F

et g une injection de F dans E.Il existe une bijection entre E et F

Preuve du théorème:

Rappel: Soit f une application de E dans F, et soit $(A_i)_{i\in I}$ une famille de parties de

E. On a:

$$\begin{cases} f(\bigcup_{i\in I} A_i) = \bigcup_{i\in I} f(A_i) \\ \text{et si } f \text{ est injective alors } f(\bigcap_{i\in I} A_i) = \bigcap_{i\in I} f(A_i) \end{cases}$$

On se place dans les hypothèse du théorème.

1. Soit $X = \{A \in \mathcal{P}(E),\ g[F\backslash f(A)] \subset E\backslash A\}$. Montrer que $X \neq \emptyset$.

2. Soit $B = \bigcup\limits_{A\in X} A$. Montrer que $B \in X$, et est ainsi le plus grand element de X (au sens de l'inclusion).

3. Soit $C = E\backslash g[F\backslash f(B)]$. Montrer que $C = B$ en vérifiant que $B \subset C$ et $C \in X$.

4. Définir une bijection de E dans F.

Un ensemble E est dit dénombrable si et seulement si il existe une bijection entre l'ensemble $\mathbb{N}$ des entiers naturels et E Cette bijection permet alors de numéroter les él ments de E.

1. Dans cette question, on desire établir que Z est dénombrable.Pour cela on introduit l'application ϕ: $\mathbb{N} \to$ Z définie par: $\phi(n) = \dfrac{n}{2}$ si n est pair et $\phi(n) = -\dfrac{n+1}{2}$ si n est impair. Etablir que ϕ est bijective.

2. Dans cette question, on desire établir que $\mathbb{N}^2$ est dénombrable.Pour cela on introduit l'application $\phi : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}^*$définie par : $\phi(p,\ q) = 2^p(2q+1)$

(a) Montrer que ϕ est bien définie et qu'elle est injective.

(b) En observant, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, l'existence d'une plus grande puissance de 2 divisant n, établir que ϕ est surjective.

(c) Conclure que $\mathbb{N}^2$ est dénombrable et qu'il en est de m$^{\mathrm{A}}$eme de Z^2

3. Dans cette question, on desire établir que $\mathbb{Q}$ est dénombrable.

(a) Exhiber une injection de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{Q}$

(b) On appelle représentant irréductible d'un nombre rationnel r l'unique fraction irréductible $\frac{p}{q}$ égale à r avec $p \in Z$ et $q \in \mathbb{N}^*$.Observer que l'application ϕ: $\mathbb{Q} \to Z \times \mathbb{N}^*$ qui à $r \in \mathbb{Q}$ associe le couple $(p,\ q) \in Z \times \mathbb{N}^*$ avec $\frac{p}{q}$ le représentant irréductible est injective. Est-elle surjective?

(c) Former une injection de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{N}$.On peut alors conclure que $\mathbb{Q}$ est dénom-

brable à l'aide du *théorème de Cantor -B ernstein.*

4. Montrer qu'il existe une bijection de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$.

5. Définir une bijection de $]\ 0,1\ [$dans $\mathbb{R}$.

6. Dans cette question, on desire établir que $\mathbb{R}$ n'est pas dénombrable. On représente chaque nombre de$]\ 0,1\ [$par son développement décimal: fini si le nombre en question est decimal, par exemple, $\frac{2}{5}$ sera représenté par $0,4$ et pas par $0,\ 39999\cdots$ En fait, on conviendra de terminer le développement, lorsqu'il est fini, par une infinite de 0 : $\frac{2}{5} = 0,\ 4000\cdots$; et infini dans les autre cas. Ainsi, à chaque nombre réel de$]\ 0,1\ [$est associé un et un seul développement decimal, et inversement. Si$]\ 0,1\ [$était dénombrable, on pourrait ranger tous les nombres de$]\ 0,1\ [$en une suite: $x_1, x_2, \ldots$ Moyennant $1'$échange éventuel de deux termes de la suite, on peut supposer que le développement décimal de x_1 commence par $0,0\ldots$On définit alors un nombre x par son développement decimal de la manière suivante:

$-x = 0, \ldots.$

-Le $k^{ième}$ chiffre après la virgule de x est nul si le $k^{i\grave{e}:me}$ chiffre après la virgule de x_k est non nul

-Le $k^{i\grave{e}:me}$ chiffre après la virgule de x est 1 si le $k^{i\grave{e}:me}$ chiffre après la virgule de x_k est nul

Montrer que $x \in]\ 0,1\ [$et ne figure pas dans la suite $x_1, x_2, \ldots.$ Conclure.