Université Paris-Diderot Année 2015-2016
MM1 - Algèbre et analyse élémentaires I Section C

Feuille de TD 2 - Ensembles et applications

Questions de cours. (a) Donner la définition de l'image directe d'un ensemble par une application.

(b) Donner la définition de l'image réciproque d'un ensemble par une application.

(c) Donner la définition d'une application injective, respectivement surjective, respectivement bijective.

(d) En utilisant les nombres complexes, donner les équations des translations, rotations et homothéties du plan.

(e) Soient E et F deux ensembles finis de même cardinal et $f\colon E \to F$. Donner des conditions nécessaires et suffisantes pour que f soit une bijection. Justifier votre réponse.

(f) Soient A et B deux parties d'un ensemble fini E, donner une formule pour le cardinal de $A \cup B$. Justifier votre réponse.

(g) Soient E et F deux ensembles finis. Combien y a-t-il d'applications de E vers F ? Justifier votre réponse.

(h) Soit E un ensemble fini. Quel est le cardinal de $\mathcal{P}(E)$? Justifier votre réponse.

(i) Soient $k \leq n$. Combien y a t-il de parties à k él'éments dans un ensemble à n éléments ?

(j) Donner la définition d'un ensemble dénombrable.

Exercice 1. Soient E un ensemble et A, B des parties de E.

(a) Simplifier chacune des expressions suivantes :

$$A \cap (A \cap B), \quad A \cup (A \cup B), \quad A \cup (A \cap B), \quad A \cap (A \cup B).$$

(b) Trouver un ensemble E et trois parties A, B et C de E tels que

$$(A \cap B) \cup C \neq A \cap (B \cup C).$$

Exercice 2. Soient E un ensemble et A, B, C trois parties de E.

(a) Montrer que si $A \cup B = A \cup C$ et $A \cap B = A \cap C$, alors $B = C$.

(b) Montrer que $A \cap B = A \cap C$ si et seulement si $A \cap (E \setminus B) = A \cap (E \setminus C)$.

(c) Montrer que si $A \subset B$ alors $A \cup C \subset B \cup C$.

(d) Montrer que $E \setminus (A \cup B) = (E \setminus A) \cap (E \setminus B)$.

(e) Montrer que $A \subset B$ si et seulement si $A \cap (E \setminus B) = \emptyset$

Exercice 3. On considère les parties de $\mathbb{R}$ suivantes : $I = [1, 3]$ et $J = [2, 4]$. Trouver un élément de $(I \cup J) \times (I \cup J)$ qui n'appartient pas à $(I \times I) \cup (J \times J)$.

Exercice 4. On considère l'application $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto x^2$.

(a) Déterminer les ensembles

(i) $f(\emptyset)$, (ii) $f(\{0\})$, (iii) $f(\{2\})$, (iv) $f([-2, 3])$.

(b) Déterminer les ensembles

(i) $f^{-1}(\emptyset)$, (ii) $f^{-1}(\{-1\})$, (iii) $f^{-1}(\{0,\, 1\})$,

(iv) $f^{-1}([0,1])$, (v) $f^{-1}([-2,3])$.

Exercice 5. On considère l'application $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \sin x$.

(a) Comparer les ensembles $[0, \pi/2]$ et $f^{-1}(f([0, \pi/2]))$.

(b) Comparer les ensembles $[0, 2]$ et $f(f^{-1}([0, 2]))$

Exercice 6. Les applications suivantes sont-elles injectives ? surjectives ? bijectives ?

(a) $f_1\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, $n \mapsto n+1$;

(b) $f_2\colon \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$, $n \mapsto n+1$;

(c) $f_3\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $(x, y) \mapsto (x+y, x-y)$;

(d) $f_4\colon \mathbb{R} \smallsetminus \{1\} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \frac{x+1}{x-1}$.

Exercice 7. Soit $E = [0, 1]$.

(a) Donner un exemple d'application $f\colon E \to E$ non injective et non surjective.

(b) Donner un exemple d'application $f\colon E \to E$ non injective et surjective.

(c) Donner un exemple d'application $f\colon E \to E$ injective et non surjective.

(d) Donner un exemple d'application $f\colon E \to E$ bijective.

Exercice 8. Considérons

$$f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto \frac{x-2}{x+2}.$$

(a) La fonction f est-elle une application ? Comment restreindre f a minima pour avoir une application ? Notons f_1 cette restriction.

(b) L'application f_1 est-elle injective ? surjective ?

(c) Comment restreindre a minima l'espace d'arrivée de f_1 pour avoir une bijection ? On appelle f_2 cette bijection.

(d) Donner une formule algébrique pour la réciproque de f_2.

Exercice 9. Soient f et g les fonctions de $\mathbb{R}^+$ dans $\mathbb{R}^+$ définies par

$$f(x) = x+1, \quad g(x) = \begin{cases} x-1 & \text{si } x \in [1, +\infty[\\ 0 & \text{si } x \in [0, 1] \end{cases}$$

(a) Montrer que f est injective mais non surjective.

(b) Étudier l'injectivité et la surjectivité de g.

(c) Calculer $g \circ f$ et $f \circ g$.

Exercice 10. On considère les applications f, $g\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ données par

$$f(z) = 2z + \mathrm{i} \qquad \text{et} \qquad g(z) = \frac{1-\mathrm{i}}{\sqrt{2}} z + 3.$$

(a) Déterminer si f définit une rotation/une homothétie, et calculer le centre et l'angle/le rapport de f le cas échéant.

(b) Déterminer les ensembles des points invariants des applications $u = f \circ g$ et $v = g \circ f$. L'application u est-elle une rotation/une homothétie ? L'application v est-elle une rotation/une homothétie ?

Exercice 11. Pour tout nombre complexe t, on définit la transformation

$$f_t \colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}, \qquad z \mapsto (t + \mathfrak{i})z - 1.$$

(a) Déterminer pour quelles valeurs de t la transformation f_t est une homothétie, respectivement une rotation, respectivement une translation.

(b) Supposons $t = 0$, calculer le vecteur de translation, ou le centre et l'angle/le rapport de f_0 suivant que f_0 est une translation, respectivement une rotation, resp. une homothétie.

(c) Supposons $t = 2 - \mathfrak{i}$, calculer le vecteur de translation, ou le centre et l'angle/le rapport de $f_{2-\mathfrak{i}}$ suivant que $f_{2-\mathfrak{i}}$ est une translation, respectivement une rotation, resp. une homothétie.

(d) Supposons $t = 1 - \mathfrak{i}$, calculer le vecteur de translation, ou le centre et l'angle/le rapport de $f_{1-\mathfrak{i}}$ suivant que $f_{1-\mathfrak{i}}$ est une translation, respectivement une rotation, resp. une homothétie.

Exercice 12. Soient X, Y deux ensembles et $f \colon X \to Y$ une application.

(a) Rappeler la définition de l'image directe d'un sous-ensemble de X par f et la définition de l'image réciproque d'un sous-ensemble de Y par f.

(b) Soient A, $B \subset X$, montrer que $f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$, puis montrer que $f(A \cap B) \subset f(A) \cap f(B)$ et donner un exemple où l'inclusion est stricte.

(c) Montrer que f est injective si, et seulement si, pour toutes parties A, B de X, on a $f(A \cap B) = f(A) \cap f(B)$.

(d) Montrer que f est bijective si, et seulement si, pour toutes parties A de X, on a $Y \setminus f(A) = f(X \setminus A)$.

(e) Soient A, $B \subset Y$. Montrer que $f^{-1}(A \cap B) = f^{-1}(A) \cap f^{-1}(B)$, puis que $f^{-1}(Y \setminus A) = X \setminus f^{-1}(A)$.

Exercice 13. Soient X, Y, Z trois ensembles et $f \colon X \to Y$, $g \colon Y \to Z$ des applications.

(a) Rappeler la définition d'une application injective, d'une application surjective.

(b) Donner l'exemple d'une application injective, d'une application surjective, d'une application ni injective, ni surjective.

(c) Montrer que :

  (i) si $g \circ f$ est injective, alors f est injective,

  (ii) si $g \circ f$ est surjective, alors g est surjective.

Exercice 14. Soient X, Y deux ensembles et $f \colon X \to Y$ une application. Montrer que les assertions suivantes sont équivalentes :

(a) f est injective,

(b) pour tout $a \in X$, $f^{-1}(f(\{a\})) = \{a\}$,

(c) pour tout $A \in \mathcal{P}(X)$, $f^{-1}(f(A)) = A$.

Indications : On vérifiera d'abord que pour tout $A \in \mathcal{P}(X)$, on a $A \subset f^{-1}(f(A))$.

Exercice 15. Soient X, Y deux ensembles et $f\colon X \to Y$ une application. Montrer que les assertions suivantes sont équivalentes :

(a) f est surjective,

(b) pour tout $b \in Y$, $f(f^{-1}(\{b\})) = \{b\}$,

(c) pour tout $B \in \mathcal{P}(Y)$, $f(f^{-1}(B)) = B$.

Indications : On vérifiera d'abord que pour tout $B \in \mathcal{P}(Y)$, on a $f(f^{-1}(B)) \subset B$.

Exercice 16. Soient X, Y deux ensembles et $f\colon X \to Y$ une application. Soient

$$\varphi\colon \mathcal{P}(Y) \to \mathcal{P}(X), \quad B \mapsto f^{-1}(B), \qquad \psi\colon \mathcal{P}(X) \to \mathcal{P}(Y), \quad A \mapsto f(A).$$

(a) Montrer que les assertions suivantes sont équivalentes :

  (i) f est injective

  (ii) φ est surjective

  (iii) ψ est injective

(b) Montrer que les assertions suivantes sont équivalentes :

  (i) f est surjective

  (ii) φ est injective

  (iii) ψ est surjective

Exercice 17. Soit E un ensemble ; pour toute partie A de E, on note $\varphi_A\colon \mathcal{P}(E) \to \mathcal{P}(E)$, définie par $X \mapsto X \cap A$ et $\phi_A\colon \mathcal{P}(E) \to \mathcal{P}(E)$, définie par $X \mapsto X \cup A$.

(a) Montrer que φ_A est injective si, et seulement si, φ_A est surjective si, et seulement si, $A = E$.

(b) Montrer que ϕ_A est injective si, et seulement si, ϕ_A est surjective si, et seulement si, $A = \emptyset$.

Exercice 18. Soit f une application de E dans E telle que $f \circ f \circ f = \mathbf{1}_E$. Montrer que f est bijective et exprimer sa bijection réciproque.

Exercice 19. Soient E et F deux ensembles finis. On note $m = \# E$ (resp. $n = \# F$) le nombre d'éléments de E (resp. F). Déterminer le nombre d'injections de E dans F. Puis déterminer le nombre de bijections de E sur F.

Exercice 20. Les ensembles $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Z} \times \mathbb{N}$, $\mathbb{Q}$, $\mathcal{P}(\mathbb{N})$, $\mathbb{R}$ sont-ils dénombrables ? Justifier votre réponse.