
Institut préparatoire aux études 2015-2016

d'ingénieurs de Tunis MP 1 / MP 2

Devoir à la maison 3:

Nombres de Fermat

&

Infinitude de l'ensemble des nombres premiers

On se propose avec ce problème de donner plusieurs démonstration du théorème d'Euclide sur l'infinitude de l'ensemble $\mathcal{P}$ des nombres premiers (partie II).

I–Les nombres de Fermat

On appelle nombre de Fermat tout entier de la forme:

$$P_n = 2^{2^n} + 1$$

où n est un entier naturel.

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}, P_{n+1}$ et P_n sont premiers entre eux.

2. Montrer que pour $n \neq m$ dans $\mathbb{N}, P_n$ et P_m sont premiers entre eux.

3. Montrer que pour $n \neq m$ dans $\mathbb{N}$ et p dans $\mathbb{N}^*, F_n^\gamma p$ et $F_m^\gamma p$ sont premiers entre eux.

4.

On considère la suite d'entiers naturels $(G_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ G_n = 2^{3^n} + 1.$$

(a) Montrer que dans cette suite, seul G_0 est premier.

(b) Montrer que, pour $n \in \mathbb{N}, G_n$ est divisible par 3^{n+1}

5. Soient $m \geq 1$ et $a \geq 2$ deux entiers.

Montrer que si $p = a^m + 1$ est premier, alors a est pair et il existe un entier $n \geq 0$

tel que $m = 2^n$, c'est-à-dire que $p = 2^{2^n} b^{2^{2n}} + 1$ avec $b \geq 1$ et dans le cas où $b = 1$,

p est un nombre de Fermat premier (par exemple pour $n = 0, 1, 2, 3, 4$) .

Comme pour les nombre de Fermat, on peut vérifier que pour tout entier pair $a \geq 2$,

les entiers $u_n = a^{2^n} + 1$ sont deux à deux premiers entre eux.

6. Soit p un diviseur premier d'un nombre de Fermat P_n avec $n \geq 0$.

Montrer que p est soit égal à P_n, soit de la forme $p = 2^{n+1}q + 1$, où q admet un diviseur premier impair.

7. Montrer que, pour tout $n \geq 2$, le chiffre des unités de P_n est égal à 7.

-II–Infinitude de l'ensemble $\mathcal{P}$ des nombres premiers

On se propose ici de donner plusieurs démonstration du théorème d'Euclide sur l'infinitude de l'ensemble $\mathcal{P}$ des

nombres premiers.

Preuve 1: Rappeler la démonstration d'Euclide de l'infinitude de l'ensemble $\mathcal{P}$ des nombres premiers.

Preuve 2: Montrer que pour tout entier naturel n, on peut trouver un nombre premier p plus grand que n. Conclure.

Pour les questions 3. 4. 5. 6. 7. et 8. on suppose que $\mathcal{P}$ est fini

et on note $p_1 = 2 << p_r$ tous ses éléments (p_r et donc le plus grand nombre premier).

Pour tout réel x, on note $[x]$ sa partie entière.

Preuve 3: Pour tout entier k compris entre 1 et r, on note $n = \prod_{k=1}^{r} p_k = p_k q_k$.

En utilisant les diviseurs premiers de $S = \sum_{k=1}^{r} q_k$, montrer qu'on aboutit à une contradiction et conclure.

Preuve 4: En utilisant la décomposition en facteurs premiers,

Montrer que pour tout entier $n \geq 1$ on a $2^n \leq (n+1)^r$ et conclure.

Preuve 5: Soit n un entier naturel non nul.

(a) Soit m un entier compris entre 1 et p_r^n.

Montrer que si $m = \prod_{k=1}^{r} p_k^{\alpha_k}$ est la décomposition en nombres premiers de m, alors

$$\alpha_k \leq [n\frac{\ln(p_r)}{\ln(2)}]$$

(

(b) En déduire que $p_r^n \leq n^r(\frac{\ln(p_r)}{\ln(2)} + 1)^r$ et conclure.

Preuve 6:

(a) Soient x un réel strictement supérieur à 1, n un entier naturel compris entre 1 et x et $n = \prod_{k=1}^{r} p_k^{\alpha_k}$ la décomposition en facteurs premiers de n où les $(y_k$ sont des entiers positifs ou nuls. Montrer que pour tout k compris entre 1 et r, on a:

(b) En déduire que pour tout réel $x > 1$, on a:

$$(\alpha_k \leq [\frac{\ln(x)}{\ln(2)}]$$

$$x < (\frac{\ln(2x)}{\ln(2)})^r + 1$$

Preuve 7:

(a) Montrer que si on dispose d'une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ strictement croissante d'entiers naturels différents de 0 et 1 et deux à deux premiers entre eux, on peut alors en déduire que $\mathcal{P}$ infini.

(b) En utilisant les nombres de Fermat, montrer que $\mathcal{P}$ infini.

(c) Soient a, b deux entiers naturels non nuls premiers entre eux avec $b > a$. On définit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par :

$$\begin{cases} u_0 = b \\ \forall n \geq 1,\ u_n - a = u_{n-1}(u_{n-1} - a) \end{cases}$$

i. Montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite strictement croissante d'entiers naturels différents de 0 et 1.