Institut préparatoire aux études d'ingénieurs de Tunis

2015-2016

MP 1 / MP 2

Devoir à la maison 4:

Problème I

Préambule:

Dans tout le probléme $f : [-1, 1] \to \mathbb{R}$ continue et $n \in N^*$. $(r_k)_{1\leq k\leq n}$ famille de n réels de [-1, 1] deux à deux distincts.

On dit qu'un polynome P interpolle f aux points $(r_k)_{1\leq k\leq n}$ si et seulement si $P(r_k) = f(r_k)\ \forall k \in [|1, n|]$.

I- Polynomes d'interpolation de Lagrange:

Pour tout $i \in [|1, n|]$, on pose : $L_i(X) = \prod_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{n} \dfrac{X - r_j}{r_i - r_j}$

1. Donner le degré de chaque polynome, L_i, ses racines ainsi que son coefficient dominant.

2. Calculer : $L_i(r_k)\ \ \forall i, k \in [|1, n|]$

3. En déduire que $P(X) = \sum_{i=1}^{n} f(r_i)L_i(X)$ est l'unique polynome de degré $n - 1$ qui interpole f aux points $(r_k)_{1\leq k\leq n}$.

II- Polynomes de tchebechev:

Dans la suite on pose : $T_n(X) = cos(n\ arccos(X))$.

4. Montrer que $T_{n+1}(X) = 2X\ T_n\ (X) - T_{n-1}(X)$.

5. En déduire que T_n est un polynome, on l'appelle n-éme polynomes de tchebychev.

Montrer que son degré est n et que son coefficient dominant vaut 2^{n-1} si $n \geq 1$

6. Determiner les racines de T_n

7. Montrer $\sup_{x\in[-1,1]} |T_n(x)| = 1$.

III- Recherche des points réalisant la meilleure interpolation:

On se propose dans cette partie de déterminer les points $(r_k)_{1\leq k\leq n}$ pour les quels l'interpolation est meilleure, c'est à dire pour les quels $\sup_{x\in[-1,1]} |f(x) - P(x)|$ est minimal, où P est l'unique polynome de degré $n-1$ qui interpole f aux points $(r_k)_{1\leq k\leq n}$.

On suppose que f est de classe C^n

8. Soit $x \in [-1,1]$ différent de tous les $(r_k)_{1\leq k\leq n}$, et A $= \dfrac{f(x)-P(x)}{\displaystyle\prod_{i=1}^{n}(x-r_i)}$

Soit g la fonction definie sur $[-1,1]$ par : $g(t) = f(t) - P(t) - A\displaystyle\prod_{i=1}^{n}(t-r_i)$

(a) Montrer que g s'annule $n+1$ fois sur $[-1,1]$,

puis que $g^{(n)}$ s'annule au moins une fois sur $[-1,1]$.

(b) En déduire que $\exists c_x \in [-1,1]$ tel que : $A = \dfrac{f^{(n)}(c_x)}{n!}$

(c) En déduire que : $\sup_{x\in[-1,1]} |f(x) - P(x)| \leq \dfrac{M}{n!} \sup_{t\in[-1,1]} |\displaystyle\prod_{i=1}^{n}(t-r_i)|$

avec $M = \sup_{t\in[-1,1]} |f^{(n)}(t)|$

Remarque :

Ainsi pour que $\sup_{x\in[-1,1]} |f(x) - P(x)|$ soit minimal il sufit que $\sup_{t\in[-1,1]} |\displaystyle\prod_{i=1}^{n}(t-r_i)|$ le soit, on cherchera dorénavant à trouver les r_i pour les quels $\displaystyle\prod_{i=1}^{n}(x-r_i)$ est minimal, c'est à dire encore à chercher les polynomes Q unitaires de degré n pour les quels $\sup_{x\in[-1,1]} |Q(x)|$ est minimal, et dont les r_i sont les racines distinctes.

9. Montrer que ce sup vaut $\dfrac{1}{2^{n-1}}$ lorsque les r_k sont les racines du n-éme polynomes de tchebychev.

10. Soit le cas général $Q(X) = \displaystyle\prod_{i=1}^{n}(X-r_i)$

Supposons que : $\sup_{x\in[-1,1]} |Q(x)| < \dfrac{1}{2^{n-1}}$

(a) Montrer que : $Q - \dfrac{1}{2^{n-1}}T_n$ est un polynome de degré inférieur à $n-1$.

(b) Montrer que $(Q - \dfrac{1}{2^{n-1}}T_n)(\cos(\dfrac{k\pi}{n}))$ est de signe de celui de $(-1)^{k+1}$ $\forall 0 \leq k \leq n$.

(c) En deduire que $Q - \dfrac{1}{2^{n-1}}T_n$ admet au moins n racines.

(d) En déduire une contradiction.

11. Conclure que les points $(r_k)_{1\leq k\leq n}$ réalisant la meilleure interpolation sont exactement les racine du n-éme polynomes de tchebychev.

Problème II

Soient a et b deux réels strictement positifs ; pour tout entier naturel non nul n, P_n désigne la fonction polynomiale définie par :

$$P_n(x) = \frac{x^n(a-bx)^n}{n!} \textit{pour tout } x \in \mathbb{R}$$

I-Premiére partie:

Soit n un entier naturel non nul.

1) (a) Quel est le degré de P_n ?

(b) Préciser les racines de P_n et donner l'ordre de multiplicit´e de chacune d'elles.

(c) Donner la valeur de $P_n^{(k)}(0)$ et $P_n^{(k)}(\dfrac{a}{b})$ pour tout entier $k \in \{0, ..., n-1\}$.

2) Soit $k \in\in [|n, 2n|]$.

(a) Montrer que, pour tout réel x,

$$P_n^{(k)}(x) = \frac{1}{n!}\sum_{p=k-n}^{n} C_k^p \frac{n!}{(n-p)!}\frac{n!}{(n-k+p)!}(-b)^{k-p}x^{n-p}(a-bx)^{n-k+p}$$

(b) En déduire les valeurs de $P_n^{(k)}(0)$ et $P_n^{(k)}(\dfrac{a}{b})$ en fonction de a, b, n et k.

(c) Vérifier que si a et b sont des entiers, il en est de meme de$P_n^{(k)}(0)$ et $P_n^{(k)}(\dfrac{a}{b})$

II-Deuxiéme partie

3) Soit n un entier naturel non nul.

(a) Etudier la fonction P_n sur le segment $[0, \frac{a}{b}]$,dresser son tableau de variations.

(b) En déduire que P_n est positive et bornée sur le segment $[0, \frac{a}{b}]$,

puis déterminer sa borne supérieure notée β_n : $\beta_n = \sup\limits_{0 \leq x \leq \frac{a}{b}} P_n(x)$

4) α étant un réel strictement positif, on considére la suite $(u_n)_{n \geq 1}$ définie par :

$u_n = \dfrac{\alpha^n}{n!},\ n \geq 1$

(a) Montrer que la suite $\left(\frac{u_{n+1}}{u_n}\right)_{n \geq 1}$converge vers 0.

(b) En déduire que la suite $(u_n)_{n \geq 1}$ converge vers 0.

(c) Que peut-on alors dire de la suite $(\beta_n)_{n \geq 1}$?

III-Troisiéme partie

On se propose de montrer l'irrationalité de π ,on suppose donc qu'il existe deux

entiers naturels non nuls, notés c et d, tels que $\pi = \dfrac{c}{d}$

Pour tout entier naturel non nul n, on pose

$Q_n(x) = \dfrac{x^n(a - bx)^n}{n!}$,$x \in \mathbb{R}$ et $I_n = \displaystyle\int_0^\pi Q_n(x)\,\sin(x)\,dx$

5) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 \leq I_n \leq \dfrac{\pi}{n!}\left(\frac{c^2}{4d}\right)^n$,

puis en déduire la limite de $(I_k)_{k \geq 1}$.

6) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $I_n \neq 0$.

7) (a)En utilisant des intégrations par partie, montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$I_n = \sum_{k=n}^{2n} \left(Q_n^{(k)}(\frac{c}{d}) \cos(\frac{c}{d} + k\frac{\pi}{2} + \pi) - Q_n^{(k)}(0) \cos(k\frac{\pi}{2} + \pi) \right)$$

8) Justifier alors que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, I_n est un entier.

9) Conclure.