UNIVERSITÉ SAAD DAHLAB BLIDA
Première Année LMD TCST
2014/2015

Module: Maths I **Série d'Exercices** n^o : 5

Fonctions usuelles & Développements limités

Exercice (02):Déterminer les domaines de définition et de dérivabilité, puis calculer la dérivée des fonctions :

1. $f(x) = \arccos\left(\dfrac{2x}{1+x^2}\right)$.
2. $f(x) = \arctan(x + \cos(x))$,
3. $f(x) = \sinh(\ln(x))$.

Exercice (01):(**Examen 2013/2014**)
Soit f la fonction définie par:

$$f(x) = \arctan(\frac{2x}{1-x^2}).$$

1. Déterminer le domaine de définition de f.
2. Peut-on prolonger f par continuité en $x_0 = 1$?
3. Calculer la dérivée de f sur $[0,1[\cup]1,+\infty[$.
4. Enoncer le Théorème des accroissements finis.
5. Montrer que $\forall x \in]0,1[$ on a:

$$\frac{2x}{x^2+1} < \arctan(\frac{2x}{1-x^2}) < 2x.$$

6. En déduire la limite suivante:

$$\lim_{x\mapsto 0^+} \frac{1}{x}\arctan(\frac{2x}{1-x^2}).$$

Exercice (02): Trouver $DL_n(f)(0)$ dans les cas suivants:
1/ $f(x) = 1 + \exp x - \sin x + chx + \frac{1}{1-x}$ avec$(n = 3)$
2/ $f(x) = \sqrt{1+x} + \sqrt{1-x}$ avec$(n = 4)$
3/ $f(x) = \cos x \ln(1-x)$ avec $(n = 3)$
4/ $f(x) = (1+x^2)\exp x + x\sqrt{1+x^2}$ avec$(n = 4)$
5/ $f(x) = \frac{1+x+x^3}{2+\sin x}$ avec $(n = 4)$
6/ $f(x) = \exp(\sin x)$ avec $(n = 4)$
7/ $f(x) = \exp(\cos x)$ avec $(n = 4)$
8/ $f(x) = \frac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}$ avec $(n = 5)$
Donner $DL_n(f)(x_0)$ pour les fonctions suivantes:
1/ $f(x) = \sqrt{x}$ avec $x_0 = 1, n = 3$; 2/ $f(x) = \ln(\sin x)$ avec $x_0 = \frac{\pi}{2}, n = 3$
3/ $f(x) = (1+\cos x)^{\frac{1}{x}}$ avec $x_0 = \frac{\pi}{2}, n = 3$.
Trouver le développement limité au voisinage de l'infini des fonctions suivantes:
1/ $f(x) = \ln(x + \sqrt{1+x^2}) - \ln x$ au $v(+\infty)$ et $n = 4$.
2/ $f(x) = \frac{\sqrt{x+2}}{\sqrt{x}}$ au $v(+\infty)$ et $n = 3$.
3/ $f(x) = \sqrt{x^2-1} - \sqrt{x^2-x}$ au $v(\pm\infty)$ et $n = 3$.
4/ $f(x) = (x^3 - x^2 + \frac{x}{2})\exp(\frac{1}{x}) - \sqrt{x^6+1}$ au $v(+\infty)$ et $n = 3$.

Exercice (03):
Soit la fonction f définie pour tout $x \in \mathbb{R}$ par:

$$f(x) = \sqrt{1+x+x^2}$$

1/ Déterminer le développement limité de f à l'ordre 2 au voisinage de 0.
2/ En déduire l'équation de la tangente au point d'abscisse $x = 0$ ainsi que sa position par rapport à la courbe de f.
3/ Déterminer une équation de l'asymptote au $v(+\infty)$,ainsi que la position de cette asymptote par rapport à la courbe de f.

Exercice (04)(Examen 2003):
Soient $a \in \mathbb{R}$ et f la fonction indéfiniment dérivable au point 0 définie par:

$$f(x) = \ln\left[1 + a\sin x + (a^2+1)x^2\right]$$

1/ Montrer que f admet un développement limité au voisinage de 0 à l'ordre 3 qui s'écrit:

$$ax + (4a^2+3)\frac{x^2}{2} - (a^3+7a)\frac{x^3}{6} + \circ(x^3)$$

2/ En déduire les valeurs de $f(0), f'(0), f''(0)$ et $f^{(3)}(0)$.
3/ Quelle est l'équation de la tangente à la courbe Γ de f ?

Exercice(05) Soient $a \in \mathbb{R}$ et f la fonction indéfiniment dérivable au point 0 et admettant le développement limité:

$$f(x) = (3-4a) + (a^2-2a)x + (a^3-7a)\frac{x^2}{2} - ax^3 + o(x^3).$$

1. Trouver la valeur de a, vérifiant les deux conditions: $f(0) = f^{(1)}(0)$ et $f^{(2)}(0) = f^{(3)}(0)$.
2. Pour $a = 1$, déterminer le développement limité de la fonction $g(x) = fo(\sin(x))$ à l'ordre 3, dans un voisinage de 0.
3. En déduire les valeurs suivantes:

$$g^{(3)}(0) \quad ; \quad \lim_{x\mapsto 0}\frac{g(x)+1}{x}.$$

Exercice(06) Soient les fonctions f et g définies par:

$$f(x) = \frac{1}{1+\ln(x+\cos(x))} \quad ; \quad g(x) = \frac{1+x^2+x^3}{1+x}.$$

1. Donner les développements limités à l'ordre 3 de f et g, dans un voisinage de 0.
2. Déterminer l'équation de la tangente au graphe de f au point d'abscisse 0, puis préciser la position du graphe par rapport à cette droite.
3. Trouver selon les valeurs de $n \in \mathbb{N}$, la limite suivante: $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)-g(x)}{x^n}$.

Exercice(07).Soit pour $\alpha \in \mathbb{R}$, la fonction $f(x)$ définie par:

$$f(x) = (x^2+\alpha)\ln\bigl(2+\sin(x)\bigr).$$

1. Montrer que f admet un développement limité dans un voisinage de 0.
2. Donner en fonction de α, le développement limité de f, à l'ordre 3, dans un voisinage de 0.
3. Déterminer l'équation de la tangente au graphe de f au point d'abscisse 0, puis préciser la position du graphe par rapport à cette droite.
4. Pour quelle valeur de α on a: $f^{(2)}(0) = \ln(4)$?

Exercice (08):
En utilisant les développements limités, calculer les limites:
1/ $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{tg^2 x}$ 2/ $\lim\limits_{x\to\to 0}\frac{(1-\exp(x))\sin x}{x^2+x^3}$ 3/ $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\arcsin x - x}{x-\sin x}$
4/ $\lim\limits_{x\to 0}\left[\frac{1}{\sin^2 x}-\frac{1}{x^2}\right]$ 5/ $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin(\operatorname{tg} x)+\sin x-2x}{(\sin x)^5}$.

Exercices supplémentaires

Exercice (09):
Donner le DL à l'ordre n indiqué au voisinage de 0 pour les fonctions suivantes:

1/ $f(x)=\frac{x}{\cos x}$ $(n=4)$, 2/ $f(x)=(\cos x)^{\sin x}$ $(n=5)$

3/ $f(x) = \log(\frac{1+\sin x}{1-2\sin x})$, $(n = 4)$ 4/ $f(x) = sh(3x).\operatorname{arctg} x$ $(n=5)$

5/ $f(x)=(\arcsin x)^2$ $(n=5)$.

Exercice (10):
a/ Donner le développement limité à l'ordre n indiqué au voisinage de x_0 pour les fonctions suivantes:

1/ $f(x) = ch(\sqrt{x})$ $(x_0 = 1, n = 2)$; 2/ $f(x) = x^{\frac{1}{x}}$ $(x_0=1,n=3)$

3/ $f(x)=\sqrt[3]{\sin x}$ $(x_0=\frac{\pi}{2},n=4)$; 4/ $f(x)=\sqrt{\frac{1+x}{2+x}}$ (au $v(\infty), n=3$).

b/ Donner le développement limité généralisé des fonctions suivantes au voisinage de x_0 :

1/ $f(x)=\frac{1}{x^2+x^4}$ $(x_0=0,n=4)$ 2/ $f(x)=\frac{\cos x}{\log(1+x)}$ $(x_0=0,n=3)$.

Exercice (11):
Calculer en utilisant le développement limité les limites suivantes:

1/ $\lim\limits_{x\to 0}\frac{(1-\cos x)arctgx}{x\sin^2 x}$ 2/ $\lim\limits_{x\to\to 0}\frac{\exp x-\sin x-\cos x}{x^2}$

3/ $\lim\limits_{x\to 0}(\cos x)^{tgx}$ 4/ $\lim\limits_{x\to e}\frac{\sqrt{x}-\sqrt{e}}{\ln x-1}$ 5/ $\lim\limits_{x\to+\infty}(\cos\frac{a}{x})^x$.

Exercice (12):
Soit la fonction définie par $f(x)=\frac{\operatorname{arctg} x}{x}$

1/ Donner le DL de f à l'ordre 2 en $x_0=1$

2/ En déduire l'équation de la tangente à la courbe de f au point $x_0=1$ et sa position par rapport à celle-ci.

3/ Déterminer les asymptotes ainsi que leurs positions par rapport à la courbe représentative de f dans les cas suivants:

$f(x)=x^2\ln(1+\frac{1}{x})$ $f(x)=(x-1)\exp(\frac{x}{x-1})$

Les développements limités ci-dessous sont valables quand x tend vers 0 et uniquement dans ce cas.

$$e^x = 1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\ldots+\frac{x^n}{n!}+o(x^n)$$
$$\cos x = 1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}+\ldots+\frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!}+o(x^{2n+1})$$
$$\sin x = x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}+\ldots+\frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!}+o(x^{2n+2})$$
$$\operatorname{tg} x = x+\frac{x^3}{3!}+\frac{2x^5}{15}++\frac{17x^7}{315}+o(x^8)$$
$$\cosh x = 1+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}+\ldots+\frac{x^{2n}}{(2n)!}+o(x^{2n+1})$$
$$\sinh x = x+\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}+\ldots+\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}+o(x^{2n+2})$$
$$\sqrt{1+x} = 1+\frac{1}{2}x-\frac{1}{8}x^2+\frac{1}{16}x^3+o(x^3)$$
$$(1+x)^\alpha = 1+\alpha\frac{x}{1!}+\alpha(\alpha-1)\frac{x^2}{2!}+\ldots+\alpha\cdots(\alpha-n+1)\frac{x^n}{n!}+o(x^n)$$
$$\frac{1}{1-x} = 1+x+x^2+x^3+\ldots+x^n+o(x^n)$$
$$\frac{1}{\sqrt{1+x}} = 1-\frac{1}{2}x+\frac{3}{8}x^2-\frac{5}{16}x^3+o(x^3)$$
$$\ln(1+x) = x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}+\ldots+\frac{(-1)^{n-1}x^n}{n}+o(x^n)$$
$$\operatorname{arctg}(x) = x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}+\ldots+\frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)}+o(x^{2n+2})$$