

## Fonctions usuelles & Développements limités

**Exercice (01):**Déterminer les domaines de définition et de dérivabilité, puis calculer la dérivée des fonctions :

1.  $f(x) = \arccos\left(\frac{2x}{1+x^2}\right)$ .
2.  $f(x) = \arctan(x + \cos(x))$ .
3.  $f(x) = \sinh(\ln(x))$ .
4.  $f(x) = \operatorname{argsh}(2-x)$ .

**Exercice (02):(Examen 2013/2014)**

Soit  $f$  la fonction définie par:

$$f(x) = \arctan\left(\frac{2x}{1-x^2}\right).$$

1. Déterminer le domaine de définition de  $f$ .
2. Peut-on prolonger  $f$  par continuité en  $x_0 = 1$ ?
3. Calculer la dérivée de  $f$  sur  $[0, 1[ \cup ]1, +\infty[$ .
4. Enoncer le Théorème des accroissements finis.
5. Montrer que  $\forall x \in ]0, 1[$  on a:

$$\frac{2x}{x^2+1} < \arctan\left(\frac{2x}{1-x^2}\right) < 2x.$$

6. En déduire la limite suivante:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x} \arctan\left(\frac{2x}{1-x^2}\right).$$

**Exercice (03):** Trouver  $DL_n(f)(0)$  dans les cas suivants:

- 1/  $f(x) = 1 + \exp x - \sin x + chx + \frac{1}{1-x}$  avec  $(n = 3)$
- 2/  $f(x) = \sqrt{1+x} + \sqrt{1-x}$  avec  $(n = 4)$
- 3/  $f(x) = \cos x \ln(1-x)$  avec  $(n = 3)$
- 4/  $f(x) = (1+x^2) \exp x + x\sqrt{1+x^2}$  avec  $(n = 4)$
- 5/  $f(x) = \frac{1+x+x^3}{2+\sin x}$  avec  $(n = 4)$
- 6/  $f(x) = \exp(\sin x)$  avec  $(n = 4)$
- 7/  $f(x) = \exp(\cos x)$  avec  $(n = 4)$
- 8/  $f(x) = \frac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}$  avec  $(n = 5)$

Donner  $DL_n(f)(x_0)$  pour les fonctions suivantes:

- 1/  $f(x) = \sqrt{x}$  avec  $x_0 = 1, n = 3$ ; 2/  $f(x) = \ln(\sin x)$  avec  $x_0 = \frac{\pi}{2}, n = 3$
- 3/  $f(x) = (1 + \cos x)^{\frac{1}{x}}$  avec  $x_0 = \frac{\pi}{2}, n = 3$ .

Trouver le développement limité au voisinage de l'infini des fonctions suivantes:

- 1/  $f(x) = \ln(x + \sqrt{1+x^2}) - \ln x$  au  $v(+\infty)$  et  $n = 4$ .
- 2/  $f(x) = \frac{\sqrt{x+2}}{\sqrt{x}}$  au  $v(+\infty)$  et  $n = 3$ .
- 3/  $f(x) = \sqrt{x^2-1} - \sqrt{x^2-x}$  au  $v(\pm\infty)$  et  $n = 3$ .
- 4/  $f(x) = (x^3 - x^2 + \frac{x}{2}) \exp(\frac{1}{x}) - \sqrt{x^6+1}$  au  $v(+\infty)$  et  $n = 3$ .

**Exercice (04):**

Soit la fonction  $f$  définie pour tout  $x \in \mathbb{R}$  par:

$$f(x) = \sqrt{1+x+x^2}$$

- 1/ Déterminer le développement limité de  $f$  à l'ordre 2 au voisinage de 0.

2/ En déduire l'équation de la tangente au point d'abscisse  $x = 0$  ainsi que sa position par rapport à la courbe de  $f$ .

3/ Déterminer une équation de l'asymptote au  $v(+\infty)$ , ainsi que la position de cette asymptote par rapport à la courbe de  $f$ .

**Exercice (05)**(Examen 2003):

Soient  $a \in \mathbb{R}$  et  $f$  la fonction indéfiniment dérivable au point 0 définie par:

$$f(x) = \ln [1 + a \sin x + (a^2 + 1)x^2]$$

1/ Montrer que  $f$  admet un développement limité au voisinage de 0 à l'ordre 3 qui s'écrit:

$$ax + (4a^2 + 3)\frac{x^2}{2} - (a^3 + 7a)\frac{x^3}{6} + o(x^3)$$

2/ En déduire les valeurs de  $f(0), f'(0), f''(0)$  et  $f^{(3)}(0)$ .

3/ Quelle est l'équation de la tangente à la courbe  $\Gamma$  de  $f$  ?

**Exercice(06)** Soient  $a \in \mathbb{R}$  et  $f$  la fonction indéfiniment dérivable au point 0 et admettant le développement limité:

$$f(x) = (3 - 4a) + (a^2 - 2a)x + (a^3 - 7a)\frac{x^2}{2} - ax^3 + o(x^3).$$

1. Trouver la valeur de  $a$ , vérifiant les deux conditions:  $f(0) = f^{(1)}(0)$  et  $f^{(2)}(0) = f^{(3)}(0)$ .
2. Pour  $a = 1$ , déterminer le développement limité de la fonction  $g(x) = fo(\sin(x))$  à l'ordre 3, dans un voisinage de 0.
3. En déduire les valeurs suivantes:

$$g^{(3)}(0) \quad ; \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{g(x) + 1}{x}.$$

**Exercice(07)** Soient les fonctions  $f$  et  $g$  définies par:

$$f(x) = \frac{1}{1 + \ln(x + \cos(x))} \quad ; \quad g(x) = \frac{1 + x^2 + x^3}{1 + x}.$$

1. Donner les développements limités à l'ordre 3 de  $f$  et  $g$ , dans un voisinage de 0.
2. Déterminer l'équation de la tangente au graphe de  $f$  au point d'abscisse 0, puis préciser la position du graphe par rapport à cette droite.
3. Trouver selon les valeurs de  $n \in \mathbb{N}$ , la limite suivante:  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - g(x)}{x^n}$ .

**Exercice(08).** Soit pour  $\alpha \in \mathbb{R}$ , la fonction  $f(x)$  définie par:

$$f(x) = (x^2 + \alpha) \ln(2 + \sin(x)).$$

1. Montrer que  $f$  admet un développement limité dans un voisinage de 0.
2. Donner en fonction de  $\alpha$ , le développement limité de  $f$ , à l'ordre 3, dans un voisinage de 0.
3. Déterminer l'équation de la tangente au graphe de  $f$  au point d'abscisse 0, puis préciser la position du graphe par rapport à cette droite.
4. Pour quelle valeur de  $\alpha$  on a:  $f^{(2)}(0) = \ln(4)$ ?

**Exercice (09):**

En utilisant les développements limités, calculer les limites:

$$1/ \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{\operatorname{tg}^2 x} \quad 2/ \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1 - \exp(x)) \sin x}{x^2 + x^3} \quad 3/ \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin x - x}{x - \sin x}$$

$$4/ \lim_{x \rightarrow 0} \left[ \frac{1}{\sin^2 x} - \frac{1}{x^2} \right] \quad 5/ \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(\operatorname{tg} x) + \sin x - 2x}{(\sin x)^5}$$

Les développements limités ci-dessous sont valables quand  $x$  tend vers 0 et uniquement dans ce cas.

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + o(x^n)$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \dots + \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!} + o(x^{2n+1})$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \dots + \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o(x^{2n+2})$$

$$\operatorname{tg} x = x + \frac{x^3}{3!} + \frac{2x^5}{15} + \dots + \frac{17x^7}{315} + o(x^8)$$

$$\cosh x = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \dots + \frac{x^{2n}}{(2n)!} + o(x^{2n+1})$$

$$\sinh x = x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \dots + \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o(x^{2n+2})$$

$$\sqrt{1+x} = 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 + \frac{1}{16}x^3 + o(x^3)$$

## Exercices supplémentaires

### Exercice (10):

Donner le DL à l'ordre  $n$  indiqué au voisinage de 0 pour les fonctions suivantes:

$$1/ f(x) = \frac{x}{\cos x} \quad (n = 4), \quad 2/ f(x) = (\cos x)^{\sin x} \quad (n = 5)$$

$$3/ f(x) = \log\left(\frac{1 + \sin x}{1 - 2 \sin x}\right), \quad (n = 4) \quad 4/ f(x) = \operatorname{sh}(3x) \cdot \operatorname{arctg} x \quad (n = 5)$$

$$5/ f(x) = (\arcsin x)^2 \quad (n = 5).$$

### Exercice (11):

a/ Donner le développement limité à l'ordre  $n$  indiqué au voisinage de  $x_0$  pour les fonctions suivantes:

$$1/ f(x) = \operatorname{ch}(\sqrt{x}) \quad (x_0 = 1, n = 2); \quad 2/ f(x) = x^{\frac{1}{x}} \quad (x_0 = 1, n = 3)$$

$$3/ f(x) = \sqrt[3]{\sin x} \quad (x_0 = \frac{\pi}{2}, n = 4); \quad 4/ f(x) = \sqrt{\frac{1+x}{2+x}} \quad (\text{au } v(\infty), n = 3).$$

b/ Donner le développement limité généralisé des fonctions suivantes au voisinage de  $x_0$ :

$$1/ f(x) = \frac{1}{x^2 + x^4} \quad (x_0 = 0, n = 4) \quad 2/ f(x) = \frac{\cos x}{\log(1+x)} \quad (x_0 = 0, n = 3).$$

### Exercice (12):

Calculer en utilisant le développement limité les limites suivantes:

$$1/ \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1 - \cos x) \operatorname{arctg} x}{x \sin^2 x} \quad 2/ \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\exp x - \sin x - \cos x}{x^2}$$

$$3/ \lim_{x \rightarrow 0} (\cos x)^{\operatorname{tg} x} \quad 4/ \lim_{x \rightarrow e} \frac{\sqrt{x} - \sqrt{e}}{\ln x - 1} \quad 5/ \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\cos \frac{a}{x}\right)^x.$$

### Exercice (13):

Soit la fonction définie par  $f(x) = \frac{\operatorname{arctg} x}{x}$

1/ Donner le DL de  $f$  à l'ordre 2 en  $x_0 = 1$

2/ En déduire l'équation de la tangente à la courbe de  $f$  au point  $x_0 = 1$  et sa position par rapport à celle-ci.

3/ Déterminer les asymptotes ainsi que leurs positions par rapport à la courbe représentative de  $f$  dans les cas suivants:

$$f(x) = x^2 \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) \quad f(x) = (x-1) \exp\left(\frac{x}{x-1}\right)$$

$$(1+x)^\alpha = 1 + \alpha \frac{x}{1!} + \alpha(\alpha-1) \frac{x^2}{2!} + \dots + \alpha \dots (\alpha-n+1) \frac{x^n}{n!} + o(x^n)$$

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \dots + x^n + o(x^n)$$

$$\frac{1}{\sqrt{1+x}} = 1 - \frac{1}{2}x + \frac{3}{8}x^2 - \frac{5}{16}x^3 + o(x^3)$$

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \dots + \frac{(-1)^{n-1} x^n}{n} + o(x^n)$$

$$\operatorname{arctg}(x) = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \dots + \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)} + o(x^{2n+2})$$