

Exercice n°1 :

Répondre par vrai ou faux.

- 1) f est une similitude directe de rapport $\sqrt{3}$ et d'angle $\frac{\pi}{2}$.
 - a) fof est une homothétie de rapport 3.
 - b) fof est une homothétie de rapport -3.
- 2) Soit ABCD un carré de centre O. Soit M,N,P et Q les milieux respectifs des cotés [AB] , [BC] , [CD] et [AD]. Soit E l'ensemble des similitudes directes qui envoie ABCD en MNPQ.
 - a) Tous les éléments de E fixent le même point.
 - b) Tous les éléments de E ont le même rapport.
 - c) E contient exactement quatre éléments.
- 3) Soit f_a l'application du plan dans lui-même qui à tout point M(z) on associe le point M'(z') tel que :
$$z' = ia + \frac{i}{a}(z - ia) \quad a \in \mathbb{R}_+^*$$
 alors : $f_{\frac{1}{a}} \circ f_{-a}$ est une translation .
- 4) ABCD est un carré direct de centre O f la similitude définie par : $f = h_{\left(o, -\frac{1}{2}\right)} \circ S_{(AC)}$ alors f est la similitude indirecte de rapport $\frac{1}{2}$, de centre O et d'axe (AC).
- 5) Soit f la transformation qui à M(z) associe M'(z') telle que : $z' = 2i\bar{z} - 1 - i$ et $I(1+i)$, f est une similitude indirecte de rapport 2 de centre I et d'axe $\Delta : x + 2y - 3 = 0$

Exercice n°2 :

Soit ABC un triangle rectangle isocèle direct de sommet principal A. On note D = S_C(A) et σ la similitude directe qui transforme D en C et C en B.

- 1) a) Expliquer pourquoi σ admet un centre que l'on nommera Ω .
b) Déterminer le rapport et l'angle de σ .
- 2) Quel est l'image de la droite (AC) par σ .
- 3) Démontrer que le triangle ΩBC est rectangle isocèle. En déduire une construction géométrique de Ω .

Exercice n°3 :

Soit ABC un triangle rectangle et isocèle tel que $(\overline{AB}, \overline{AC}) \equiv \frac{\pi}{2} [2\pi]$ et soit D le symétrique de C par rapport à A.

Soit f la similitude qui envoie sur B et B sur D.

- 1) a) Faire une figure.
b) Calculer le rapport et l'angle de f.
c) Montrer que f(D) = C.
- 2) On désigne par O le centre de f.
 - a) Déterminer fof.
 - b) En déduire une construction de O. Justifier.

- 3) Soit ξ_1 et ξ_2 les cercles de diamètres respectifs $[OA]$ et $[OB]$ et soit K leur second point d'intersection. (AC) recoupe ξ_1 en I et (BC) recoupe ξ_2 en J .
- Montrer que $K \in (AB)$.
 - Montrer que $f(I) = J$.
 - Prouver alors que I, J et K sont alignés.

Exercice n°4 :

Dans le plan orienté, on considère un rectangle $ABCD$ tel que $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}) \equiv \frac{\pi}{2} [2\pi]$ et $AB = 2AD$, $I = A*B$, $O = B*D$ et ξ le cercle circonscrit au rectangle $ABCD$. Soit f la similitude directe qui transforme B en I et I en D .

- Déterminer le rapport de f et une mesure de son angle.
- Soit $S = S_{\left(c, \sqrt{2}, -\frac{\pi}{4}\right)}$.
 - Montrer que $S(B) = I$.
 - Montrer que $f \circ S^{-1} = I_{dp}$.
 - En déduire que $f = S$.
- Soit $A' = f(A)$ montrer que $D = A'*I$ construire alors le point A' .
- La demi droite $[CA')$ recoupe ξ en O' .
 - Calculer CO' et CA' en fonction de CA .
 - En déduire que O' est le milieu de $[CA']$.
 - Prouver que $O' = f(O)$.

Exercice n°5 :

On donne deux triangles ABC et ACD rectangles et isocèle tels que $(\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB}) \equiv \frac{\pi}{2} [2\pi]$ et $(\overrightarrow{DA}, \overrightarrow{DC}) \equiv \frac{\pi}{2} [2\pi]$. On désigne par $I = D*C$ et $J = C*B$.

- Soit f la similitude directe de centre A qui transforme D en C .
 - Déterminer le rapport et l'angle de f .
 - Montrer que $f(C) = B$ et $f(I) = J$.
- Soit g la similitude directe tel que $g(C) = B$ et $g(B) = A$.
 - Déterminer le rapport et l'angle de g .
 - On désigne par Ω le centre de g . Déterminer $g \circ g(C)$ caractériser $g \circ g$ et en déduire que $(\Omega A) \perp (\Omega C)$.
 - Montrer que $(\Omega J) \perp (\Omega C)$.
 - En déduire que Ω et le projeté orthogonal de C sur (AJ) .
- Caractériser $S \circ g^{-1}$.
- Soit M un point du plan tel que $f(M) = M_1$ et $g(M) = M_2$.
 - Montrer que BM_2M_1 est un triangle rectangle isocèle en B de sens direct.
 - La perpendiculaire en A à la droite (AI) coupe (ΩC) en K . Montrer que $f(\Omega) = K$.
 - En déduire la nature du triangle $B\Omega K$.

Exercice n°6 :

Soit $ABCD$ un rectangle de centre O tel que $AB = 2AD$ et $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}) \equiv \frac{\pi}{2} [2\pi]$, $I = A*B$, $J = C*D$ et $K = D*J$. Soit h une similitude directe de centre A qui transforme C en O .

- Montrer que h est une homothétie.

- 2) Soit σ la similitude indirecte qui transforme D en B et K en C. Préciser le rapport de σ .
- 3) On pose $g = h \circ \sigma$; préciser $g(D)$ et $g(K)$. En déduire que g est une symétrie axiale dont on précisera l'axe. Caractériser alors σ

Exercice n°7 :

ABC est un triangle rectangle et isocèle tel que $(\overline{AB}, \overline{AC}) \equiv \frac{\pi}{2} [2\pi]$. On pose $D = S_A(C)$. Soit σ la similitude indirecte qui envoie A en B et B en C.

- 1) Déterminer le centre Ω de σ et vérifier que $\Omega = D$.
- 2) Le plan P muni d'un repère orthonormé $(A, \overline{AB}, \overline{AC})$. Soit $f : P \rightarrow P ; M(z) \rightarrow M'(z')$ tel que $z' = -(1+i)\bar{z} + 1$
 - a) Montrer que f est une similitude indirecte.
 - b) Montrer que $f = \sigma$.

Exercice n°8 :

Le plan est orienté dans le sens direct.

OAB est un triangle rectangle et isocèle en O et tel que $(\overline{OA}, \overline{OB}) \equiv \frac{\pi}{2} [2\pi]$. Soit I le milieu de segment [AB]. On désigne par C et D les symétriques respectifs du point I par rapport à O et à B. Soit f la similitude directe qui envoie A sur D et O sur C.

- 1) Montrer que f a pour rapport 2 et d'angle $\frac{\pi}{2}$.
- 2)
 - a) Montrer que O est l'orthocentre du triangle ACD.
 - b) Soit J le projeté orthogonal du point O sur (AC).
 - c) Déterminer les images des droites (OJ) et (AJ) par f et en déduire que J est le centre de similitude f .
- 3) Soit g la similitude indirecte de centre I qui envoie A sur D.
 - a) Vérifier que g est de rapport 2 et d'axe (IC), en déduire $g(O)$.
 - b) Déterminer les images de C et D par $g \circ f^{-1}$. En déduire la nature de $g \circ f^{-1}$.
- 4) Soit $I' = f(I)$ et $J' = g(J)$.
 - a) Déterminer les images des points J et I' par $g \circ f^{-1}$.
 - b) Montrer que les droites (IJ), ($I'J'$) et (CD) sont contractantes.

Exercice n°9 :

$R(O, \vec{u}, \vec{v})$ un repère orthonormé du plan. Soit $f : P \rightarrow P, M(x, y) \mapsto M'(x', y')$ tel que :
$$\begin{cases} x' = x + y + 1 \\ y' = x - y \end{cases}$$

- 1) Montrer que la forme complexe de f est $f : M(z) \rightarrow M'(z')$ tel que $z' = (1+i)\bar{z} + 1$.
- 2) Caractériser f .

Exercice n°10 :

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct (O, \vec{u}, \vec{v}) . On note S la similitude directe d'écriture

complexe : $z' = \frac{1}{2}iz + \frac{1-3i}{2}$.

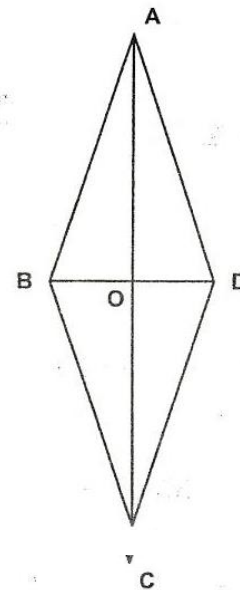
- 1) Déterminer le rapport k , une mesure de l'angle θ et l'affixe du centre Ω .
- 2) On note M_0 le point d'affixe $1 + 4\sqrt{3} + 3i$. Pour tout entier naturel n , on note le point $M_{n+1} = S(M_n)$.
 - a) Montrer par récurrence que $\Omega M_n = \frac{1}{2^{n-3}}$.
 - b) Déterminer l'entier n_0 à partir duquel le point M_n appartient au disque de centre Ω et de rayon $0,01$.
- 3) On pose $d_n = M_n M_{n+1}$ et $U_n = \sum_{k=0}^n d_k$.
 - a) Montrer que d est géométrique.
 - b) Déterminer la limite de la suite (U_n) .

Exercice n°11 :

Le plan est orienté dans le sens direct.

Dans la figure ci-contre, ABCD est un losange

de centre O tel que $(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}) \equiv \frac{\pi}{2} [2\pi]$ et $AC = 3 BD$.



- 1) Soit f la similitude directe qui envoie A en B et C en D .
 - a) Déterminer le rapport et l'angle de f .
 - b) Montrer que O est le centre de f .
- 2) a) Soit D' l'image de D par f . Montrer que D' est l'orthocentre du triangle ABD et que $OA \perp OD'$.
 - b) Soit B' l'image de B par f . Montrer que $BB'DD'$ est un losange.
- 3) Soit $g = f \circ S_{(AC)}$.
 - a) Déterminer la nature de g .
 - b) Déterminer les images des points O, A, B, C et D par g .
 - c) Déterminer l'axe Δ de g .
 - d) La droite Δ coupe les droites (AB) , (BD') , (DB') et (CD) respectivement en M, N, P et Q . Montrer que $MQ = 3 NP$.