Exercices corrigés : Lois Statistiques

Exercice 1

Une entreprise logistique décide de faire des économies sur ses coûts des courriers publicitaires à envoyer aux clients. Pour cela, elle décide , au hasard, une proportion de 3 lettres sur 5 au tarif urgent, les autres au tarif normal.

1. Quatre lettres sont envoyées dans une ville où réside quatre clients : quelle est la probabilité des événements :

   A : «Au moins l'un d'entre eux reçoit une lettre au tarif urgent».

   B : «Exactement 2 clients sur les quatre reçoivent une lettre au tarif urgent».

2. Soit X la variable aléatoire : «nombre de lettres au tarif urgent parmi 10 lettres» : Quelle est la loi de probabilité de X, quelle est son espérance, quelle est sa variance ?

Exercice 2

Un avion peut accueillir 20 personnes ; des statistiques montrent que 25% clients ayant réservé ne viennent pas. Soit X la variable aléatoire : «nombre de clients qui viennent après réservation parmi 20». Quelle est la loi de X ? (on ne donnera que la forme générale) quelle est son espérance, son écart-type ? Quelle est la probabilité pour que X soit égal à 15?

Exercice 3

Dans une poste d'un petit village, on remarque qu'entre 10 heures et 11 heures, la probabilité pour que deux personnes entrent durant la même minute est considérée comme nulle et que l'arrivée des personnes est indépendante de la minute considérée. On a observé que la probabilité pour qu'une personne se présente entre la minute n et la minute $n+1$ est : $p = 0.1$. On veut calculer la probabilité pour que : 3,4,5,6,7,8... personnes se présentent au guichet entre 10h et 11h.

1. Définir une variable aléatoire adaptée, puis répondre au problème considéré.
2. Quelle est la probabilité pour que au moins 10 personnes se présentent au guichet entre 10h et 11h ?

Exercice 4

Si dans une population une personne sur cent est un centenaire (son age est plus 100 ans), quelle est la probabilité de trouver au moins un centenaire parmi 100 personnes choisies au hasard ? Et parmi 200 personnes ?

Exercice 5

Une population comporte en moyenne une personne mesurant plus de 1m90 sur 80 personnes. Sur 100 personnes, calculer la probabilité qu'il y ait au moins une personne mesurant plus de 1.90m (utiliser une loi de Poisson). Sur 300 personnes, calculer la probabilité qu'il y ait au moins une personne mesurant plus de 1.90m.

Exercice 6

Une usine fabrique des billes de diamètre 8mm. Les erreurs d'usinage provoquent des variations de diamètre. On estime, sur les données antérieures, que l'erreur est une variable aléatoire qui obeit à une loi normale les paramètres étant : moyenne : 8mm, écart-type : 0.02mm. On rejette les pièces dont le diamètre n'est pas compris entre 7.97mm et 8.03mm. Quelle est la proportion de billes rejetées ?

Exercice 7

Des machines fabriquent des crêpes destinées à être empilées dans des paquets de 10. Chaque crêpe a une épaisseur qui suit une loi normale de paramètres $m = 0.6$mm et $\sigma = 0.1$. Soit X la variable aléatoire «épaisseur du paquet en mm». Calculez la probabilité pour que X soit compris entre 6.3mm et 6.6mm.

Exercice 8

Sur un grand nombre de personnes on a constaté que la répartition du taux de cholestérol suit une loi normale avec les résultats suivants :

- 56% ont un taux inférieur à 165 cg ;
- 34% ont un taux compris entre 165 cg et 180 cg ;
- 10% ont un taux supérieur à 180 cg.

Quelle est le nombre de personnes qu'il faut prévoir de soigner dans une population de 10000 personnes, si le taux maximum toléré sans traitement est de 182 cg ?

Correction de l'exercice 1

1. On utilise une loi binomiale, loi de la variable aléatoire : «nombre de lettres au tarif urgent parmi 4 lettres» $n=5$, $p=\frac{3}{5}$. On obtient $P(A)=1-(\frac{2}{5})^4=0.9744$, $P(B)=\binom{4}{2}(\frac{2}{5})^2(\frac{3}{5})^2=0.3456$.
2. La loi de probabilité de X est une loi binomiale, loi de la variable aléatoire : «nombre de lettres au tarif urgent parmi 10 lettres». $n=10$, $p=\frac{3}{5}$, son espérance est $np=6$, sa variance est $np(1-p)=\frac{12}{5}$.

Correction de l'exercice 2

Soit X la variable aléatoire nombre de clients qui viennent après réservation parmi 20. La loi de X est une loi binomiale de paramètres $n=20$, $p=0.75$. Son espérance est $np=15$, son écart-type est $\sqrt{np(1-p)}=\sqrt{15\cdot 0.25}$. La probabilité pour que X soit égal à 15 est $\binom{20}{15}0.75^{15}0.25^5=0.20233$.

Correction de l'exercice 3

Une variable aléatoire adaptée à ce problème est le nombre X de personnes se présentant au guichet entre 10h et 11h. Compte tenu des hypothèses, on partage l'heure en 60 minutes. Alors X suit une loi binomiale de paramètres $n=60$ et $p=0.1$. On est dans le cas de processus poissonnien : on peut approcher la loi de X par la loi de Poisson de paramètre $\lambda=60\times 0.1=6$. L'espérance de X est donc $E(X)=6$;

On peut alors calculer les probabilités demandées : $P[X=k]=\frac{6^ke^{-6}}{k!}$. Valeurs lues dans une table ou calculées : $P[X=3]\simeq 0.9\%$; $P[X=4]\simeq 13.4\%$; $P[X=5]=P[X=6]\simeq 16.1\%$; $P[X=7]\simeq 13.8\%$; $P[X=8]\simeq 10.3\%$.
Remarque : de façon générale si le paramètre λ d'une loi de Poisson est un entier K, on a : $P[X=K-1]=\frac{K^{K-1}e^{-K}}{(K-1)!}=\frac{K^Ke^{-K}}{K!}=P[X=K]$.
Calculons maintenant la probabilité pour que au moins 10 personnes se présentent au guichet entre 10h et 11h : C'est $P[X\geqslant 10]=1-\sum_{k=0}^{9}\frac{6^ke^{-6}}{k!}\simeq 8.392\times 10^{-2}$.

Correction de l'exercice 4

La probabilité $p=\frac{1}{100}$ étant faible, on peut appliquer la loi de Poisson d'espérance $100p=1$ au nombre X de centenaires pris parmi cent personnes. On cherche donc : $P[X\geqslant 1]=1-P[X=0]=1-e^{-1}\simeq 63\%$.
Sur un groupe de 200 personnes : l'espérance est 2 donc : $P[X'\geqslant 1]=1-e^{-2}\simeq 86\%$. La probabilité des événements : $[X'=1]$ et $[X'=2]$ sont les mêmes et valent : 0.14. Ainsi, sur 200 personnes, la probabilité de trouver exactement un centenaire vaut 0.14, égale à la probabilité de trouver exactement deux centenaires. Cette valeur correspond au maximum de probabilité pour une loi de Poisson d'espérance 2 et se généralise. Si X obeit à une loi de Poisson d'espérance K, alors le maximum de probabilité est obtenu pour les événements $[X=K-1]$ et $[X=K]$.

Correction de l'exercice 5

Le nombre X de personnes mesurant plus de 1.90m parmi 100 obéit à une loi de Poisson de paramètre $\frac{100}{80}$.
La probabilité qu'il y ait au moins une personne mesurant plus de 1.90m est donc $1-P[X=0]=1-e^{-\frac{100}{80}}=1-e^{-\frac{5}{4}}=0.71350$.
Sur 300 personnes : la probabilité qu'il y ait au moins une personne mesurant plus de 1.90m est donc $1-P[Y=0]=1-e^{-\frac{300}{80}}=0.97648$.

Correction de l'exercice 6

La probabilité qu'une bille soit rejetée est, en notant D la variable aléatoire «diamètre», $p=1-P[7.97\leqslant D\leqslant 8.03]$. Or $P[7.97\leqslant D\leqslant 8.03]=P[-\frac{0.03}{0.02}\leqslant\frac{D-8}{0.02}\leqslant\frac{0.03}{0.02}]=F(1.5)-F(-1.5)=0.8664$. La proportion de billes rejetées est donc $p=13.4\%$.

Correction de l'exercice 7

+2 CONTROLE

Correction de l'exercice 8

Si X est de moyenne m et d'écart-type σ alors $Y=\frac{X-m}{\sigma}$ suit une loi centrée réduite. Donc si $P[X\leqslant 165]$ alors $P[\frac{X-m}{\sigma}\leqslant\frac{165-m}{\sigma}]=0,56$. Or on peut lire dans la table de Gauss $F(0.15)=0.5596$.
De même, si $P[X\geqslant 180]$ alors $P[\frac{X-m}{\sigma}\geqslant\frac{180-m}{\sigma}]=0.1$. Donc $P[\frac{X-m}{\sigma}\leqslant\frac{180-m}{\sigma}]=0.9$ et l'on peut lire de même $F(1.28)=0.8997$.
Pour trouver m et σ il suffit de résoudre le système d'équations : $\frac{165-m}{\sigma}=0.15$ et $\frac{180-m}{\sigma}=1.28$ d'où $\sigma\simeq 13.27$, $m\simeq 163$ cg. Alors, $P[X\geqslant 182]=P[\frac{X-m}{\sigma}\geqslant\frac{182-m}{\sigma}]=1-F(1.43)=0.0764$.
Sur 10000 personnes on estime le nombre de personnes à soigner de l'ordre de 764 personnes ; en fait la théorie de l'estimation donnera une fourchette.