

Exercice :

On souhaite étudier l'évolution de deux populations liées : des chouettes et des souris présentes dans une zone donnée.

Pour tout entier naturel n , on note respectivement C_n et S_n le nombre, en milliers, de chouettes et de souris au 1^{er} juin de l'année 2010 + n .

En 2010, on comptait 3 000 chouettes et 2 000 souris.

Des scientifiques ont modélisé la prédation entre ces deux espèces :

Pour tout entier naturel n :

$$\begin{cases} C_{n+1} = 0,5 C_n + 0,4 S_n \\ S_{n+1} = -0,104 C_n + 1,1 S_n \end{cases}$$

Les coefficients 0,5 et 1,1 représentent la croissance de chaque espèce sans la présence de l'autre : les chouettes disparaissent sans souris comme nourriture et les souris augmentent sans chouettes comme prédateurs.

Les coefficients 0,4 et - 0,104 correspondent à la prédation des chouettes sur les souris : positif pour les chouettes (la présence de souris augmente leur nombre) et négatif pour les souris (la présence de chouettes diminue leur nombre).

On se propose d'étudier l'évolution des ces deux populations à long terme.

1. Conjecture

Recopier et compléter ce tableau à l'aide d'un tableur ou de la calculatrice.

On complétera jusqu'à une valeur de n assez grande pour émettre une conjecture.

On acceptera des valeurs approchées.

n	C_n	S_n	rapport $\frac{S_n}{C_n}$
0	3	2	0,66666666667
1			

Émettre une conjecture sur l'évolution de chaque population et de la proportion des souris par rapport aux chouettes.

2. Étude à l'aide d'une suite de matrice colonne.

Pour tout entier naturel n , on note U_n la matrice colonne $\begin{pmatrix} C_n \\ S_n \end{pmatrix}$.

a. Montrer que, pour tout entier naturel n , $U_{n+1} = A U_n$ où A est une matrice carrée d'ordre 2 que l'on déterminera.

b. En déduire une relation entre U_n , U_0 , A et n .

c. On donne les matrices $P = \begin{pmatrix} 10 & 5 \\ 13 & 1 \end{pmatrix}$ et $D = \begin{pmatrix} 1,02 & 0 \\ 0 & 0,58 \end{pmatrix}$.

Démontrer que $PDP^{-1} = A$, puis que pour tout nombre entier naturel n : $A^n = PD^nP^{-1}$

d. En déduire les coefficients de la matrice U_n en fonction de n .

e. Déterminer la limite de chacune des suites (C_n) , (S_n) et $\left(\frac{S_n}{C_n}\right)$.

f. Interpréter les résultats de la question précédente.