

التمرين الأول

الجزء الأول

\mathbb{R} مزود بالقانون * المعرف كما يلي : $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2; x * y = x + y - e^{xy} + 1$

(1) لنبين أن القانون * تبادلي.

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2; x * y = x + y - e^{xy} + 1 = y + x - e^{yx} + 1 = y * x$$

لدينا $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2; x * y = y * x$ إذن

القانون * تبادلي

(ب) لنبين أن القانون * يقبل عنصرا محايدا نحدده.

ليكن y من \mathbb{R}

$$(\forall x \in \mathbb{R}; x * y = x) \Leftrightarrow (\forall x \in \mathbb{R}; x + y - e^{xy} + 1 = x) \Leftrightarrow (\forall x \in \mathbb{R}; y + 1 = e^{xy}) \Leftrightarrow (y = 0)$$

و بما أن * تبادلي فإن $\forall x \in \mathbb{R}; x * 0 = 0 * x = x$

0 هو العنصر المحايد للقانون *

(2) لنبين أن القانون * غير تجميعي

$$\text{لدينا } \alpha \text{ و } \beta \text{ حلين مختلفين للمعادلة } 3 + x - e^{2x} = 0 \text{ يعني } 3 + \alpha - e^{-2\alpha} = 3 + \beta - e^{-2\beta} = 0$$

$$\text{يعني } \alpha * 2 = \beta * 2 = 0 \text{ و منه } (\alpha * 2) * \beta = 0 * \beta = \beta \text{ و } \alpha * (2 * \beta) = \alpha * 0 = \alpha$$

و بما أن $\alpha \neq \beta$ فإن $\alpha * (2 * \beta) \neq (\alpha * 2) * \beta$

القانون * غير تجميعي

نستنتج ان

الجزء الثاني

$$M(x, y) = \begin{pmatrix} x & -2y \\ y & x \end{pmatrix} \text{ مع } F = \{M(x, y) / (x, y) \in \mathbb{R}^2\}$$

(1) لنبين أن F فضاء متجهي جزئي للفضاء المتجهي الحقيقي $(M_2(\mathbb{R}), +, \cdot)$

$F \subset M_2(\mathbb{R})$ (حسب تعريفه) و $F \neq \emptyset$ لأن $I = M(1, 0) \in F$

$$\forall (M(x, y), M(z, t)) \in F^2 \text{ و } \forall (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$$

لدينا

$$\alpha M(x, y) + \beta M(z, t) = \begin{pmatrix} \alpha x & -2\alpha y \\ \frac{\alpha y}{2} & \alpha x \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \beta z & -2\beta t \\ \frac{\beta t}{2} & \beta z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha x + \beta z & -2(\alpha y + \beta t) \\ \frac{\alpha y + \beta t}{2} & \alpha x + \beta z \end{pmatrix} = M(\alpha x + \beta z, \alpha y + \beta t)$$

إذن $\alpha M(x, y) + \beta M(z, t) \in F$ نستنتج أن :

F فضاء متجهي جزئي للفضاء المتجهي الحقيقي $(M_2(\mathbb{R}), +, \cdot)$

(2) لنبين أن F جزء مستقر من $(M_2(\mathbb{R}), \times)$

لدينا

$$\begin{aligned} (\forall (M(x, y), M(z, t)) \in F^2); M(x, y) \times M(z, t) &= \begin{pmatrix} x & -2y \\ \frac{y}{2} & x \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} z & -2t \\ \frac{t}{2} & z \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} xz - yt & -2(xt + yz) \\ \frac{yz + xt}{2} & -yt + xz \end{pmatrix} = M(xz - yt, xt + yz) \in F \end{aligned}$$

إذن F جزء مستقر من $(M_2(\mathbb{R}), \times)$

(3) φ تطبيق من \mathbb{C}^* نحو F بحيث :

(أ) لنبين أن φ تشاكل من (\mathbb{C}^*, \times) نحو (F, \times) .

$$(\forall ((x, y), (z, t)) \in (\mathbb{R}^2 - \{(0, 0)\})^2); \varphi((x + iy) \times (z + it)) = \varphi(xz - yt + i(xt + yz))$$

$$= M(xz - yt, xt + yz)$$

$$(\text{حسب السؤال 2}) = M(x, y) \times M(z, t)$$

$$= \varphi(x + iy) \times \varphi(z + it)$$

φ تشاكل من (\mathbb{C}^*, \times) نحو (F, \times)

إذن

$$\text{ب) نضع } F^* = F - \{M(0, 0)\} \text{ لنبين أن } F^* = \varphi(\mathbb{C}^*)$$

$$\varphi(x + iy) = M(0, 0) \Leftrightarrow M(x, y) = M(0, 0) \Leftrightarrow (x, y) = (0, 0)$$

$$\text{يعني } (x, y) \neq (0, 0) \Leftrightarrow \varphi(x + iy) \neq M(0, 0)$$

$$\text{يعني } z \in \mathbb{C}^* \Leftrightarrow \varphi(z) \in F^*$$

و منه

$$\boxed{\varphi(\mathbb{C}^*) = F^*}$$

ج) لنبين أن (F^*, \times) زمرة تبادلية

لدينا (\mathbb{C}^*, \times) زمرة تبادلية و φ تشاكل من (\mathbb{C}^*, \times) نحو (F, \times) و $\varphi(\mathbb{C}^*) = F^*$

(F^*, \times) زمرة تبادلية

إذن

(4) لنبين أن $(F, +, \times)$ جسم تبادلي

- بما أن F فضاء متجهي جزئي للفضاء المتجهي الحقيقي $(M_2(\mathbb{R}), +, \cdot)$ فإن $(F, +)$ زمرة تبادلية.
 - (F^*, \times) زمرة تبادلية
 - بما أن \times توزيعي على $+$ في $M_2(\mathbb{R})$ و F جزء مستقر بالنسبة ل \times و ل $+$ فإن \times توزيعي على $+$ في F .
- نستنتج أن $(F, +, \times)$ جسم تبادلي

التمرين الثاني

1 - $a \in \mathbb{Z}$ لنبين أن $a \wedge 13 = 1 \Rightarrow a^{2016} \equiv 1[13]$

العدد 13 أولي إذن حسب مبرهنة فرما الصغرى لدينا $a^{13} \equiv a[13]$ و بما ان $a \wedge 13 = 1$ فإن 13 لا يقسم a و منه $a^{12} \equiv 1[13]$

يستلزم $(a^{12})^{168} \equiv 1[13]$ و أخيرا نحصل على المطلوب $a^{2016} \equiv 1[13]$

2- نعتبر في \mathbb{Z} المعادلة $x^{2015} \equiv 2[13]$: (E) وليكن x حلا للمعادلة (E) .

(1) لنبين أن x و 13 أوليان في ما بينهما

بالخلف نفترض أن 13 يقسم x

$$\begin{cases} 13|x \\ x^{2015} \equiv 2[13] \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 13|x^{2015} \\ x^{2015} \equiv 2[13] \end{cases} \Rightarrow 13|2$$

و هذا غير ممكن إذن الإفتراض خاطئ و منه 13 لا يقسم x

نستنتج أن x و 13 أوليان في ما بينهما

(2) لنبين أن $x \equiv 7[13]$

بما أن x و 13 أوليان في ما بينهما فإن حسب السؤال 1- لدينا $x^{2016} \equiv 1[13]$

و بما أن $x^{2015} \equiv 2[13]$ فإن $x^{2016} \equiv 2x[13]$

نستنتج أن $2x \equiv 1[13]$ ما يستلزم أن $14x \equiv 7[13]$ و حيث أن $14x \equiv x[13]$ فإن $x \equiv 7[13]$ و هذا هو المطلوب

$$x \equiv 7[13]$$

(3) لنبين أن مجموعة حلول المعادلة (E) هي $S = \{7 + 13k / k \in \mathbb{Z}\}$

(4) لدينا $x^{2015} \equiv 2[13] \Rightarrow x \equiv 7[13]$

لنبين أن $x \equiv 7[13] \Rightarrow x^{2015} \equiv 2[13]$

لدينا $x \equiv 7[13] \Rightarrow x^{2015} \equiv 7^{2015} [13] (*)$

لنحدد باقي قسمة 7^n على 13

12	11	10	9	8	7	6	5	4	3	2	n
1	2	4	8	3	6	12	11	9	5	10	باقي قسمة 7^n على 13

$$\begin{cases} 7^{12} \equiv 1[13] \\ 7^{11} \equiv 2[13] \end{cases} \Rightarrow 7^{12 \times 167 + 11} \equiv 2[13] \Rightarrow 7^{2015} \equiv 2[13] \text{ لدينا إذن}$$

$$x \equiv 7[13] \Rightarrow x^{2015} \equiv 2[13] \text{ (*) تصيح}$$

لقد بينا أن المعادلة (E) تكافئ $x \equiv 7[13]$

$$x \equiv 7[13] \Leftrightarrow (x-7=13k; k \in \mathbb{Z}) \Leftrightarrow x \in S \text{ و}$$

و بالتالي :

S هي مجموعة حلول المعادلة E

(I - II) ليكن n هو رقم الكرة المسحوبة

$$\begin{cases} n \in S \\ n \in \{1, 2, \dots, 50\} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (\exists k \in \mathbb{Z}; n = 7 + 13k) \\ n \in \{1, 2, \dots, 50\} \end{cases} \Leftrightarrow n \in \{7, 20, 33, 46\} \text{ لدينا}$$

ومنه الاحتمال المطلوب هو $\frac{4}{50}$.

احتمال الحصول على كرة رقمها حلا للمعادلة (E) هو $\frac{2}{25}$

$$(2) \text{ ليكن } X \text{ المتغير العشوائي الحداني الذي وسيطاه } n=3 \text{ و } p = \frac{2}{25}$$

الاحتمال المطلوب هو $p(X=2)$.

$$p(X=2) = C_3^2 p^2 (1-p) = 3 \times \frac{4}{625} \times \frac{23}{25} = \frac{276}{15625}$$

احتمال الحصول مرتين بالضبط على كرة رقمها حل للمعادلة (E) هو $\frac{276}{15625}$

التمرين الثالث

نعتبر في \mathbb{C} المعادلة $(E): z^2 - (1+i)z + 2 + 2i = 0$

(1) أ) لنحسب Δ مميز المعادلة (E)

$$\Delta = (1+i)^2 - 4(2+2i) = 2i - 8 - 8i = 1 - 6i - 9 = (1-3i)^2$$

مميز المعادلة (E) هو $(1-3i)^2$

(ب) تحديد حلي المعادلة (E)

$$\text{لدينا } z_1 = \frac{1+i-1+3i}{2} = 2i \text{ و } z_2 = \frac{1+i+1-3i}{2} = 1-i$$

$$z_1 = 2i \quad \text{و} \quad z_2 = 1-i$$

ج) لنبين أن $\frac{z_1}{z_2} = \sqrt{2}e^{i\frac{3\pi}{4}}$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{2i}{1-i} \sqrt{2}e^{i\frac{3\pi}{4}} = \frac{2e^{i\frac{\pi}{2}}}{\sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{4}}} = \sqrt{2}e^{i(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{4})} = \sqrt{2}e^{i\frac{3\pi}{4}} \quad \text{لدينا}$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \sqrt{2}e^{i\frac{3\pi}{4}}$$

و منه

أ. لنحدد e لحق E منتصف القطعة $[AB]$

$$e = \frac{1+i}{2}$$

لدينا $e = \frac{z_1 + z_2}{2} = \frac{1+i}{2}$ و منه

ب. r الدوران الذي مركزه A و قياس زاويته $-\frac{\pi}{2}$

$$r(E) = C \Leftrightarrow c - z_1 = e^{-i\frac{\pi}{2}}(e - z_1) \Leftrightarrow c = -i\left(\frac{1+i}{2} - 2i\right) + 2i \Leftrightarrow c = -\frac{1}{2}i + \frac{1}{2} - 2 + 2i \Leftrightarrow c = -\frac{3}{2} + \frac{3}{2}i$$

$$c = -\frac{3}{2} + \frac{3}{2}i$$

ج) D النقطة ذات اللوح $d = 1 + \frac{3}{2}i$ لنبين أن العدد $\left(\frac{z_2 - d}{c - d}\right) \times \left(\frac{c - z_1}{z_2 - z_1}\right)$ حقيقي .

$$\left(\frac{z_2 - d}{c - d}\right) = \frac{1-i-1-\frac{3}{2}i}{-\frac{5}{2}} = i \quad \text{و} \quad \left(\frac{c - z_1}{z_2 - z_1}\right) = \frac{-\frac{3}{2} + \frac{3}{2}i - 2i}{1-3i} = \frac{1}{2} \frac{-3-i}{-i+3} = \frac{-1}{2}i \quad \text{لدينا}$$

$$\left(\frac{z_2 - d}{c - d}\right) \times \left(\frac{c - z_1}{z_2 - z_1}\right) = i \times \frac{-i}{2} = \frac{1}{2} \quad \text{إذن}$$

$$\left(\frac{z_2 - d}{c - d}\right) \times \left(\frac{c - z_1}{z_2 - z_1}\right) = \frac{1}{2}$$

التأويل الهندسي:

$$\arg\left(\left(\frac{z_2 - d}{c - d}\right) \times \left(\frac{c - z_1}{z_2 - z_1}\right)\right) \equiv \arg\left(\frac{z_2 - d}{c - d}\right) + \arg\left(\frac{c - z_1}{z_2 - z_1}\right) [2\pi] \quad \text{لدينا}$$

$$\arg\left(\frac{z_2-d}{c-d}\right) + \arg\left(\frac{c-z_1}{z_2-z_1}\right) \equiv \overline{(DC, DB)} + \overline{(AB, AC)}[2\pi] \text{ و}$$

$$\overline{(DC, DB)} + \overline{(AB, AC)} \equiv [2\pi] \text{ فإن } \arg\left(\frac{1}{2}\right) \equiv 0[2\pi] \text{ و بما أن}$$

$$\overline{(DC, DB)} \equiv \overline{(AC, AB)}[2\pi] \text{ نستنتج أن}$$

$$\overline{(DC, DB)} \equiv \overline{(AC, AB)} \equiv \frac{\pi}{2}[2\pi] \text{ إذن } \left(\frac{c-z_1}{z_2-z_1}\right) = -\frac{i}{2} \text{ و } \left(\frac{z_2-d}{c-d}\right) = i \text{ وحسب ما سبق}$$

نستنتج أن

النقط A, B, C و D متداورة و تنتمي إلى الدائرة ذات القطر $[BC]$

التمرين الرابع

$$n \in \mathbb{N}^*; \forall x \in \mathbb{R}; f_n(x) = \frac{1}{1 + e^{-\frac{3}{2}(x-n)}}$$

$$y = 1 \text{ (أ) } \lim_{x \rightarrow +\infty} f_n(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{1 + e^{-\frac{3}{2}(x-n)}} = 1 \text{ لأن } \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-\frac{3}{2}(x-n)} = 0 \text{ و منه ل } (C_n) \text{ مقارب عند } +\infty \text{ معادلته } y = 1$$

$$\text{و } \lim_{x \rightarrow -\infty} f_n(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{1 + e^{-\frac{3}{2}(x-n)}} = 0 \text{ لأن } \lim_{x \rightarrow -\infty} e^{-\frac{3}{2}(x-n)} = +\infty \text{ و منه ل } (C_n) \text{ مقارب عند } -\infty \text{ معادلته } y = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f_n(x) = 1 \text{ و } \lim_{x \rightarrow -\infty} f_n(x) = 0$$

ل (C_n) مقارب عند $+\infty$ معادلته $y = 1$ و (C_n) مقارب عند $-\infty$ معادلته $y = 0$

(ب) لنبين أن f_n قابلة للإشتقاق على \mathbb{R}

الدالة $x \rightarrow e^{-\frac{3}{2}(x-n)}$ قابلة للإشتقاق على \mathbb{R} إذن الدالة $x \rightarrow 1 + e^{-\frac{3}{2}(x-n)}$ قابلة للإشتقاق على \mathbb{R}

و بما أن $\forall x \in \mathbb{R}; 1 + e^{-\frac{3}{2}(x-n)} \neq 0$ فإن

الدالة f_n قابلة للإشتقاق على \mathbb{R}

حساب $f'_n(x)$

$$(\forall x \in \mathbb{R}); f'_n(x) = \frac{3}{2} \frac{e^{-\frac{3}{2}(x-n)}}{\left(1 + e^{-\frac{3}{2}(x-n)}\right)^2}$$

\mathbb{R} f_n تزايدية قطعاً على $(\forall x \in \mathbb{R}); f'_n(x) > 0$ إذن

(ج)

(2) أ) لنبين أن النقطة $I_n\left(n, \frac{1}{2}\right)$ مركز تماثل للمنحنى (C_n)

لدينا $\forall x \in \mathbb{R}; 2n - x \in \mathbb{R}$

$$f_n(2n-x) = \frac{1}{1 + e^{-\frac{3}{2}(2n-x-n)}} = \frac{1}{1 + e^{-\frac{3}{2}(n-x)}} = \frac{e^{-\frac{3}{2}(x-n)}}{e^{-\frac{3}{2}(x-n)} + 1} = 1 - \frac{1}{1 + e^{-\frac{3}{2}(x-n)}} = 1 - f_n(x) \text{ و}$$

النقطة $I_n\left(n, \frac{1}{2}\right)$ مركز تماثل للمنحنى (C_n)

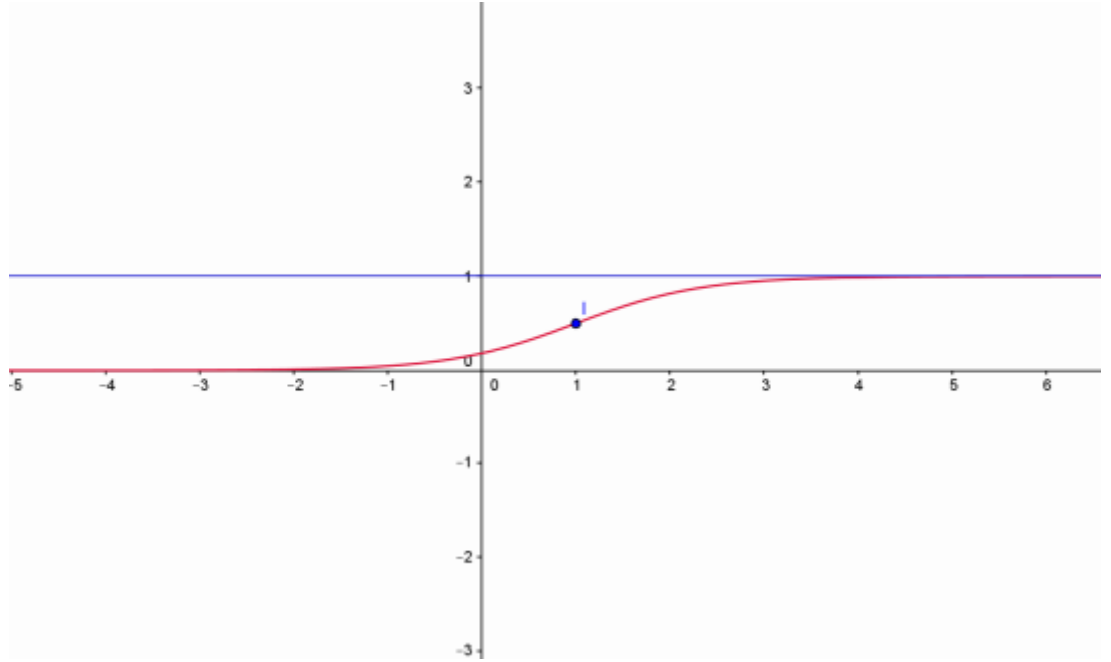
نستنتج أن

(ب) إنشاء (C_1)

جدول تغيرات الدالة f_1

x	$-\infty$	$+\infty$
$f_1(x)$	0	1

میان f_1



(ج) حساب مساحة الحيز المستوي المحصور بين المنحني (C_1) و المستقيمت التي معادلاتها على التوالي $x=0$ و $x=1$ و $y=0$

$$\int_0^1 f_1(x) dx = \int_0^1 \frac{1}{1+e^{-\frac{3}{2}(x-1)}} dx = \int_0^1 \frac{e^{\frac{3}{2}(x-1)}}{1+e^{\frac{3}{2}(x-1)}} dx = \left[\ln \left(1+e^{\frac{3}{2}(x-1)} \right) \right]_0^1 = \ln 2 - \ln \left(1+e^{-\frac{3}{2}} \right) = \ln \left(\frac{2}{1+e^{-\frac{3}{2}}} \right)$$
 لدينا

$$\|i\| \times \|j\| \times \ln \left(\frac{2}{1+e^{-\frac{3}{2}}} \right)$$

و منه

(2) (أ) $n \in \mathbb{N}^*$ نلبن أن المعادلة $f_n(x) = x$ تقبل حلا وحيدا u_n في المجال $]0, n[$

$$\varphi_n(x) = f_n(x) - x$$

$$(\forall x \in \mathbb{R}); \varphi_n'(x) = \frac{3}{2} \frac{e^{-\frac{3}{2}(x-n)}}{\left(1+e^{-\frac{3}{2}(x-n)}\right)^2} - 1 = -\frac{2+e^{-\frac{3}{2}(x-n)}+2e^{-3(x-n)}}{2\left(1+e^{-\frac{3}{2}(x-n)}\right)^2} < 0$$
 و \mathbb{R} قابلة للإشتقاق على

φ_n متصلة و تناقصية فقطعا على \mathbb{R} إذن φ_n تقابل من \mathbb{R} نحو \mathbb{R}

$$\varphi_n(\mathbb{R}) = \left] \lim_{x \rightarrow +\infty} \varphi_n(x), \lim_{x \rightarrow -\infty} \varphi_n(x) \right[=]-\infty, +\infty[$$
 و

نستنتج أن المعادلة $\varphi_n(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا u_n و بما أن $\varphi_n(0) = f_n(0) > 0$ و $\varphi_n(n) = f_n(n) - n = \frac{1}{2} - n < 0$

فإن (حسب مبرهنة القيم الوسطية) $u_n \in]0, n[$

$$(\forall n \in \mathbb{N}^*); \exists ! u_n \in]0, n[/ f_n(u_n) = u_n$$

(ب) لدينا :

$$(\forall n \in \mathbb{N}^*)(\forall x \in \mathbb{R}) f_{n+1}(x) - f_n(x) = \frac{1}{1+e^{-\frac{3}{2}(x-n-1)}} - \frac{1}{1+e^{-\frac{3}{2}(x-n)}}$$

$$= \frac{1+e^{-\frac{3}{2}(x-n)} - 1 - e^{-\frac{3}{2}(x-n-1)}}{\left(1+e^{-\frac{3}{2}(x-n)}\right)\left(1+e^{-\frac{3}{2}(x-n-1)}\right)} = \frac{e^{-\frac{3}{2}(x-n)}\left(1 - e^{\frac{3}{2}}\right)}{\left(1+e^{-\frac{3}{2}(x-n)}\right)\left(1+e^{-\frac{3}{2}(x-n-1)}\right)} < 0$$

$$(\forall n \in \mathbb{N}^*)(\forall x \in \mathbb{R}) f_{n+1}(x) < f_n(x)$$

إذن

(ج) لنبين أن المتتالية $(u_n)_{n \geq 1}$ تناقصية قطعاً ثم لنستنتج أنها متقاربة

لدينا $(\forall n \in \mathbb{N}^*)(\forall x \in \mathbb{R}) : f_{n+1}(x) < f_n(x) \Rightarrow f_{n+1}(x) - x < f_n(x) - x$

$$\Rightarrow \varphi_{n+1}(x) < \varphi_n(x)$$

$$\Rightarrow \varphi_{n+1}(u_{n+1}) < \varphi_n(u_{n+1})$$

$$\Rightarrow \varphi_n(u_n) < \varphi_n(u_{n+1}) \quad (\text{لأن } \varphi_{n+1}(u_{n+1}) = \varphi_n(u_n) = 0)$$

و بما أن الدالة φ_n تناقصية قطعاً على \mathbb{R} فإن $u_n > u_{n+1}$ $(\forall n \in \mathbb{N}^*)$

نستنتج أن : المتتالية $(u_n)_{n \geq 1}$ تناقصية قطعاً

$$\text{المتتالية } (u_n)_{n \geq 1} \text{ تناقصية قطعاً}$$

إستنتاج : بما أن المتتالية $(u_n)_{n \geq 1}$ تناقصية قطعاً ومصغرة ب 0 فإنها متقاربة

$$\text{المتتالية } (u_n)_{n \geq 1} \text{ متقاربة}$$

(د) لنحسب نهاية المتتالية $(u_n)_{n \geq 1}$

المتتالية $(u_n)_{n \geq 1}$ متقاربة والدالة f_n متصلة على المجال $]0, n[$ وتحقق $]0, n[\subset]0, n[$ $f_n(0) = \frac{1}{2}$ $f_n(]0, n[) =]0, n[$

إذن المتتالية $(u_n)_{n \geq 1}$ تقبل نهاية l تحقق $\lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(l) = l$ ولدينا $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{1+e^{-\frac{3}{2}(l-n)}} = 0$ نستنتج أن $l = 0$

$$\lim u_n = 0$$

التمرين الخامس

نعتبر الدالة g المعرفة على \mathbb{R}^* ب $g(x) = \int_x^{3x} \frac{\cos t}{t} dt$

(1) لنبين أن الدالة g زوجية

$$\forall x \in \mathbb{R}^*; -x \in \mathbb{R}^* \text{ و } g(-x) = \int_{-x}^{-3x} \frac{\cos t}{t} dt \stackrel{t=-u}{=} \int_x^{3x} \frac{\cos(-u)}{-u} (-du) = \int_x^{3x} \frac{\cos u}{u} du = g(x)$$

الدالة g زوجية

نستنتج أن

(2) الدالة $t \rightarrow \frac{\cos t}{t}$ متصلة على $]0, +\infty[$ إذن تقبل دالة أصلية φ على هذا المجال

$$g(x) = \int_x^{3x} \frac{\cos t}{t} dt = [\varphi(t)]_x^{3x} = \varphi(3x) - \varphi(x) \text{ لدينا}$$

بما أن الدالة φ قابلة للإشتقاق (أصلية) على $]0, +\infty[$ فإن الدالة g قابلة للإشتقاق على $]0, +\infty[$ ولدينا :

$$(\forall x > 0); g'(x) = 3\varphi'(3x) - \varphi'(x) = 3 \frac{\cos 3x}{3x} - \frac{\cos x}{x} = \frac{\cos 3x - \cos x}{x}$$

$$(\forall x > 0); g'(x) = \frac{\cos 3x - \cos x}{x}$$

$$\forall x > 0; \int_x^{3x} \frac{\cos t}{t} dt = \frac{\sin 3x - 3 \sin x}{3x} + \int_x^{3x} \frac{\sin t}{t^2} dt \text{ (أ) لنتحقق من أن}$$

$$\forall x > 0; \int_x^{3x} \frac{\cos t}{t} dt = \left[\frac{\sin t}{t} \right]_x^{3x} - \int_x^{3x} -\frac{\sin t}{t^2} dt = \frac{\sin 3x}{3x} - \frac{\sin x}{x} + \int_x^{3x} \frac{\sin t}{t^2} dt = \frac{\sin 3x - 3 \sin x}{3x} + \int_x^{3x} \frac{\sin t}{t^2} dt \text{ لدينا}$$

إذن

$$\forall x > 0; \int_x^{3x} \frac{\cos t}{t} dt = \frac{\sin 3x - 3 \sin x}{3x} + \int_x^{3x} \frac{\sin t}{t^2} dt$$

(ب) لنبين أن $(\forall x > 0); |g(x)| < \frac{2}{x}$

$$(\forall x > 0); |g(x)| < \left| \int_x^{3x} \frac{\cos t}{t} dt \right| \leq \left| \frac{\sin 3x - 3 \sin x}{3x} \right| + \left| \int_x^{3x} \frac{\sin t}{t^2} dt \right| \leq \frac{4}{3x} + \int_x^{3x} \frac{1}{t^2} dt \text{ لدينا}$$

$$(\forall x > 0); x \leq t \leq 3x \Rightarrow \frac{1}{3x} \leq \frac{1}{t} \leq \frac{1}{x} \Rightarrow \frac{1}{t^2} \leq \frac{1}{x^2} \Rightarrow \int_x^{3x} \frac{1}{t^2} dt \leq \int_x^{3x} \frac{1}{x^2} dt \text{ و لدينا}$$

$$\int_x^{3x} \frac{1}{x^2} dt = \left[-\frac{1}{x} \right]_x^{3x} = \frac{-1}{3x} + \frac{1}{x} = \frac{2}{3x} \text{ و}$$

$$\text{نستنتج أن } (\forall x > 0); |g(x)| < \frac{4}{3x} + \frac{2}{3x} :$$

$$\boxed{(\forall x > 0); |g(x)| < \frac{2}{x}}$$

$$(4) \text{ أ) لنبين أن } (\forall x > 0); 0 \leq \int_x^{3x} \frac{\cos t - 1}{t} dt \leq 2x$$

$$\text{لدينا } (\forall t > 0); 1 - \cos t \leq t \Rightarrow \frac{1 - \cos t}{t} \leq 1 \Rightarrow \int_x^{3x} \frac{1 - \cos t}{t} dt \leq \int_x^{3x} dt$$

$$\text{و لدينا } \int_x^{3x} dt = 2x \text{ نستنتج أن :}$$

$$\boxed{(\forall x > 0); 0 \leq \int_x^{3x} \frac{\cos t - 1}{t} dt \leq 2x}$$

$$(ب) \text{ لنتحقق أن } (\forall x > 0); g(x) - \ln 3 = \int_x^{3x} \frac{\cos t - 1}{t} dt$$

$$\text{لدينا } (\forall x > 0); \int_x^{3x} \frac{\cos t - 1}{t} dt = g(x) - \int_x^{3x} \frac{1}{t} dt = g(x) - [\ln t]_x^{3x} = g(x) - (\ln 3x - \ln x) = g(x) - \ln 3$$

و منه

$$\boxed{(\forall x > 0); \int_x^{3x} \frac{\cos t - 1}{t} dt = g(x) - \ln 3}$$

$$(ج) \text{ لدينا } (\forall x > 0); 0 \leq \int_x^{3x} \frac{\cos t - 1}{t} dt \leq 2x \text{ و بما أن } \lim_{x \rightarrow 0^+} \int_x^{3x} \frac{\cos t - 1}{t} dt = 0$$

$$\text{فإن } \lim_{x \rightarrow 0^+} g(x) - \ln 3 = 0 \text{ و بالتالي}$$

$$\boxed{\lim_{x \rightarrow 0^+} g(x) = \ln 3}$$

إنتهى