Probabilités

Kara-Zaitri Lydia

École préparatoire en sciences et techniques d'Oran

Programme de première année

2015◁2016

Chapitre 6

Couples aléatoires réels

6.1 Définitions

1. **Couple aléatoire réel :** On appelle couple aléatoire réel, noté $c.a.r$, tout couple de variables aléatoires (X, Y).
   - (X, Y) est dit couple aléatoire discret ($c.a.d$) si les variables X et Y sont discrètes.
   - (X, Y) est dit couple aléatoire continu ($c.a.c$) si les variables X et Y sont continues.
2. **Loi de probabilité conjointe :**
   (a) **Cas discret :** La loi de probabilité conjointe d'un c.a.d (X, Y) est donnée par :
   - $X(\Omega)$ et $Y(\Omega)$,
   - $\forall x_i \in X(\Omega)$ et $y_j \in Y(\Omega)\ :\ \mathcal{P}_{ij} = \mathcal{P}(X = x_i \cap Y = y_j)$.
     Tels que : $\sum_{x_i \in X(\Omega)} \sum_{y_j \in Y(\Omega)} \mathcal{P}_{ij} = 1$.

   Elle est souvent présentée sous forme d'un tableau.

   Exemple. *Une urne contient 3 boules numérotées :* 1, 2 *et* 3*. On tire successivement et sans remise 2 boules de cette urne.*
   L'espace $\Omega = \{(1;2), (1;3), (2,1), (2,3), (3,1), (3,2)\}$.
   Soient les variables aléatoires : X *qui donne le numéro de la* $1^{\text{ère}}$ *boule tirée et* Y *qui donne le plus grand des deux numéros obtenus.*
   - $X(\Omega) = \{1, 2, 3\}$.
   - $Y(\Omega) = \{2, 3\}$.

   La loi de probabilité conjointe du couple (X, Y) *est donnée par :*

$Y \setminus\ X$	1	2	3
2	$1/6$	$1/6$	$\setminus$
3	$1/6$	$1/6$	$2/6$

(b) **Cas continu :** La loi de probabilité conjointe d'un c.a.c (X, Y) est donnée par la fonction $f_{X;Y}$ appelée "densité de probabilité conjointe" telle que :

- $\forall (x, y) \in (X, Y)(\Omega) : f_{X;Y}(x, y) \geq 0$.
- $\iint_{\mathbb{R}^2} f_{X;Y}(x, y)\, dx\, dy \;=\; 1.$

Exemple. *Soit la densité de probabilité conjointe $f_{X;Y}$ définie par :*

$$f_{X,Y}(x, y) \;=\; \begin{cases} c\,x\,y\, \exp(-x^2 - y^2) & si\, x \geq 0\; et\, y \geq 0, \\ \\ 0 & sinon. \end{cases}$$

Donner la valeur de c.

3. **Loi de probabilité marginale :**

(a) **Cas discret :**

- La loi de probabilité marginale de la variable aléatoire X est donnée pour tout $x_i \in X(\Omega)$ par :
$$\mathcal{P}_{i.} = \mathcal{P}(X = x_i) = \sum_j \mathcal{P}(X = x_i \cap Y = y_j)$$
- La loi de probabilité marginale de la variable aléatoire Y est donnée pour tout $y_j \in Y(\Omega)$ par :
$$\mathcal{P}_{.j} = \mathcal{P}(Y = y_j) = \sum_i \mathcal{P}(X = x_i \cap Y = y_j)$$

Elles sont souvent présentées dans le tableau de la loi de probabilité conjointe.

Exemple. *Dans l'exemple précédent, donner les lois marginales de X et de Y .*

$Y \setminus \;\; X$	1	2	3	$\mathcal{P}_{.j}$
2	1/6	1/6	$\setminus$	2/6
3	1/6	1/6	2/6	4/6
$\mathcal{P}_{i.}$	2/6	2/6	2/6	1

(b) **Cas continu :**

- La loi de probabilité marginale de la variable aléatoire X est donnée par :
$$f_X(x) = \int_{\mathbb{R}} f_{X;Y}(x, y)\, dy$$
- La loi de probabilité marginale de la variable aléatoire Y est donnée par :
$$f_Y(y) = \int_{\mathbb{R}} f_{X;Y}(x, y)\, dx$$

Exemple. *Dans l'exemple précédent, donner les lois marginales de X et de Y .*

4. **Loi de probabilité conditionnelle :** La loi de probabilité de la variable X sachant que $Y = y$ est donnée par :

   (a) **Cas discret :**

   $$\mathcal{P}\left(X = x/Y = y\right) = \frac{\mathcal{P}(X = x_i \cap Y = y_j)}{\mathcal{P}(Y = y_j)}\,; \quad \text{si} \quad \mathcal{P}(Y = y_j) \neq 0$$

   (b) **Cas continu :**

   $$f_{X/Y=y}(x) = \frac{f_{X;Y}(x,y)}{f_Y(y)}\,; \quad \text{si} \quad f_Y(y) \neq 0$$

5. **Indépendance :** Les variables aléatoires X et Y sont dites indépendantes si et seulement si :

   (a) **Cas discret :** $\forall (x_i, y_j) \in (X,Y)(\Omega)$:

   $$\mathcal{P}\left(X = x_i\,;\, Y = y_j\right) = \mathcal{P}(X = x_i) \times \mathcal{P}(Y = y_j)$$

   (b) **Cas continu :** $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$:

   $$f_{X;Y}(x,y) = f_X(x) \times f_Y(y)$$

6.2 Caractéristiques d'un couple aléatoire

1. **Fonction de répartition conjointe :** La fonction de répartition conjointe de (X,Y) est définie par :

   $$F_{X;Y}(x,y) = \mathcal{P}(X \leqslant x\,;\, Y \leqslant y)$$

   (a) **Cas discret :**

   $$F_{X;Y}(x,y) = \sum_{s \leq x} \sum_{t \leq y} \mathcal{P}(X = s\,;\, Y = t)$$

   (b) **Cas continu :**

   $$F_{X;Y}(x,y) = \int_{-\infty}^{x} \int_{-\infty}^{y} f_{X;Y}(s,t)\, ds\, dt$$

2. **Fonction de répartition marginale :**

   (a) **Cas discret :**

   - La fonction de répartition marginale de la v.a. X est donnée par :

     $$F_X(x) = \sum_{s \leq x} \mathcal{P}(X = s)$$

   - La fonction de répartition marginale de la v.a. Y est donnée par :

     $$F_Y(y) = \sum_{t \leq y} \mathcal{P}(Y = t)$$

(b) **Cas continu :**

- La fonction de répartition marginale de la v.a. X est donnée par :

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f_X(s)\, ds \quad \text{ou} \quad F_X(x) = \lim_{y \to +\infty} F_{X;Y}(x, y)$$

- La fonction de répartition marginale de la v.a. Y est donnée par :

$$F_Y(y) = \int_{-\infty}^{y} f_Y(t)\, dt \quad \text{ou} \quad F_Y(y) = \lim_{x \to +\infty} F_{X;Y}(x, y)$$

3. **Esperance mathématique :** Soit ϕ une fonction continue sur $(X, Y)(\Omega)$.

(a) **Cas discret :**

$$E(\phi(X, Y)) = \sum_{X(\Omega)} \sum_{Y(\Omega)} \phi(x, y)\, \mathcal{P}(X = x\,;\, Y = y)$$

(b) **Cas continu :**

$$E(\phi(X, Y)) = \iint_{\mathbb{R}^2} \phi(x, y)\, f_{X;Y}(x, y)\, dx\, dy$$

4. **Moments d'ordres r et s :** Soient r et $s \in \mathbb{N}^*$.

- Le moment simple d'ordres r et s est donné par :

$$\mu_{r,s} = E(X^r\, Y^s)$$

- Le moment centré d'ordres r et s est donné par :

$$m_{r,s} = E\left[(X - E(X))^r . (Y - E(Y))^s\right]$$

5. **Covariance :** La covariance entre X et Y est donnée par :

$$\begin{aligned} cov(X, Y) = m_{1,1} \quad &= E\left[(X - E(X)) . (Y - E(Y))\right] \\ &= E(X . Y) - E(X) . E(Y) \end{aligned}$$

6. **Corrélation :** Le coefficient de corrélation entre X et Y est donné par :

$$\rho(X\,;\,Y) = \frac{cov(X, Y)}{\sigma(X) . \sigma(Y)} \in [-1\,;\,1]$$

Propriétés. *Si les variables X et Y sont indépendantes alors :*

- $E(X . Y) = E(X) . E(Y)$.
- $cov(X, Y) = 0$.
- $\rho(X\,;\,Y) = 0$.

7. **Fonction génératrice des moments :** Elle nous permet d'avoir les moments simples d'ordres r et s, ($\forall r, s \in \mathbb{N}^*$), et est donnée par :

$$g_{X;Y}(t_1, t_2) = E\left(e^{t_1 X + t_2 Y}\right)$$

Le moment simple d'ordres r et s est donné par :

$$\mu_{r,s} = E\left(X^r\, Y^s\right) = \frac{d^{r+s}\, g_{X;Y}(t_1, t_2)}{dt_1^r\, dt_2^s}\Big|_{t_1=0\,;\,t_2=0}$$