Lycée Secondaire Bennane-Bodheur	EXAMEN BAC BLANC	Lycée Secondaire Khniss
Prof: Bouhouch Ameur	Le 05/05/2016 4 ème Math Durée: 4h	Prof: Slimani Akrem

N.B : Le sujet comporte trois pages numérotées de 1 à 3.
La qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante lors de l'appréciation des copies…

Exercice n°1: **(3 pts)**

I) Répondre par « Vrai » ou « Faux » en justifiant votre réponse :

1) Si A et B sont deux évènements indépendants alors $\overline{A}$ et B sont aussi indépendants.

2) Si F est la fonction de répartition d'une variable aléatoire qui suit la loi exponentielle de paramètre $\lambda > 0$.
Alors F est dérivable à droite en 0 et $F_d'(0) = \lambda$.

II) Soit (X,Y) une série statistique double donnée par le tableau suivant :

X	35	40	45	50	55	60
Y	140	120	100	95	85	70

Pour chacune des propositions suivantes, une seule réponse est exacte. Choisir la bonne réponse :

1) Le coefficient de corrélation r, arrondi à 10^{-2}, de la série (X,Y) est égal à :
a) $r = 0{,}99$ b) $r = 0{,}-98$ c) $r = 0{,}92$

2) Une équation de la droite de régression de Y en X est :
a) $y = 26{,}4x - 133$ b) $y = -8{,}12x - 758$ c) $y = -2{,}63x + 226{,}5$

Exercice n°2: **(3.5 pts)**

En prévision d'une élection entre deux condidats A et B, un institut de sondage recueille les intentions de vote de futurs électeurs.
Parmi les 1200 personnes qui ont répondu au sondage, 47% affirment vouloir voter pour le condidat A et les autres pour le condidat B.
Compte tenu du profil des condidats, l'institut de sondage estime que 10% des personnes déclarant vouloir voter pour le condidat A ne disent pas la vérité et votent en réalité pour le condidat B, tandis que 20% des parsonnes déclarant vouloir voter pour le condidat B ne disent pas la vérité et votent en réalité pour le condidat A.
On choisit au hasard une personne ayant répondu au sondage et on note les évènements :
A : « la personne interrogée affirme vouloir voter pour le condidat A »
B: « la personne interrogée affirme vouloir voter pour le condidat B »
V: « la personne interrogée dit la vérité»

1) Construire un arbre pondéré traduisant la situation.
2) a) Calculer la probabilité que la personne interrogée dise la vérité.
b) Sachant que la personne interrogée dit la vérité, Calculer la probabilité qu'elle affirme vouloir voter pour le condidat A.
3) Démontrer que la probabilité que la personne choisie vote effectivement pour le condidat A est 0,529.
4) Pour effectuer ce sondage, l'institut a réalisé une enquête téléphonique à raison de 10 communications par demi-heure. La probabilité qu'une personne contactée accepte de répondre à cette enquête est 0,4.
L'institut de sondage souhaite obtenir un échantillon de 1200 réponses.
Quel temps moyen, exprimé en heures, l'institut doit-il prévoir pour parvenir à cet objectif.

Exercice n°3: **(4 pts)**

1) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'entier $a_n = 3^{2n} - 1$ est divisible par 8.

2) a) Donner une solution particulière de l'équation $(E): 91x - 10y = 1$.

b) Résoudre dans $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ l'équation (E).

3) On considère, dans $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$, l'équation $(E'):\ a_3 x - a_2 y = 24$.

a) Montrer que les solutions de (E') sont les couples (a, b) tels que $a = 3 + 10k$ et $b = 27 + 91k$; $k \in \mathbb{Z}$.

b) Donner les valeurs possibles de $a \wedge b$.

c) Déterminer toutes les solutions (a, b) de (E') tels que $a \wedge b = 3$.

4) Un astronome a observé au jour J_0 le corps céleste A, qui apparaît périodiquement tous les 728 jours.

Vingt quatre jours plus tard ($J_0 + 24$), il observe le corps B, dont la période d'apparition est de 80 jours.

On appelle J_1 le jour de la prochaine apparition simultanée des deux objets aux yeux de l'astronome.

Soient u et v le nombre de périodes effectuées respectivement par A et B entre J_0 et J_1.

a) Justifier que le couple (u, v) est solution de l'équation (E').

b) Combien de jours l'astronome devrait-il attendre jusqu'à la prochaine apparition simultanée des deux astres?

Exercice n°4: **(4 pts)**

L'espace est muni d'un repère orthonormé direct $(o, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. Soient les points $A(1,3,-3)$, $B(-1,0,1)$ et $C(1,2,-2)$.

1) a) Montrer que les points A,B et C déterminent un plan que l'on notera P.

b) Montrer qu'une équation cartésienne de P est $x + 2y + 2z - 1 = 0$.

c) Soit le point $D(2,4,0)$. Montrer que ABCD est un tétraèdre et calculer son volume.

2) a) Donner une équation cartésienne du plan Q passant par le point $E(0,0,-4)$ et parallèle au plan P.

b) Montrer que la droite (DE) coupe le plan P au point C.

3) Soit h l'homothétie de centre D qui transforme le plan P au plan Q.

Les droites (AD) et (BD) coupent le plan Q respectivement en I et J.

a) Montrer que le rapport de h est 2.

b) Déduire, alors, que le volume du tétraèdre $DIJE$ est égal à 12 .

4) a) Donner une équation de la sphère S de diamètre [CD].

b) Montrer que le plan P est tangent à la sphère S.

c) Déterminer deux translations de vecteurs colinéaires à $\overrightarrow{DE}$ tel que l'image de la sphère S par l'une de ces translations est tangente au plan Q.

Exercice n°5: **(5,5 pts)**

A) Soit f la fonction définie sur $[0, +\infty[$ par $f(x) = \dfrac{e^{2x} - 1}{e^{2x} + 1}$. On note (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(o, \vec{i}, \vec{j})$. (unité 2 cm).

1) Montrer que $f'(x) = \dfrac{4e^{2x}}{(e^{2x} + 1)^2}$ puis dresser le tableau de variation de f.

2) Ecrire une équation de la demi-tangente Δ à (C) à droite du point O.

3) Tracer (C) et Δ.

4) a) Vérifier que pour tout $x \in [0, +\infty[$, $f(x) = \dfrac{e^{x} - e^{-x}}{e^{x} + e^{-x}}$.

b) Calculer, alors, l'aire en cm^2, de la partie du plan limitée par la courbe (C), l'axe des abscisses, et les droites d'équations $x = 0$ et $x = \ln 2$

B) Soient k un entier naturel non nul et f_k la fonction définie sur $[0,+\infty[$ par $f_k(x)=\dfrac{e^{2x}-k^2}{e^{2x}+k^2}$ On note (C_k) sa courbe représentative dans ce même repère.

1) a) Vérifier que $f(x-\ln k)=f_k(x)$.

b) En déduire que (C_k) est l'image de (C) par une translation qu'on précisera.

2) a) Vérifier que $f'(x)=1-f^2(x)$ pour tout $x\in[0,+\infty[$.

b) Calculer, alors, $\int_0^{\ln(2)} f^2(x)dx$.

c) Soit l'arc $\Gamma=\{M(x,y);\ y=f_k(x) \text{ et } \ln(k)\le x\le \ln(2k)\}$. Montrer que le volume du solide de révolution obtenu par rotation de Γ autour de l'axe des abscisses est indépendant de k et donner sa valeur en cm^3.

C) Soit la suite réelle (U_n) définie sur IN* par $U_n=\int_0^{\ln(2)}(f(x))^{2n}dx$.

1) Montrer que $0\le U_n\le\left(\dfrac{3}{5}\right)^{2n}$ puis calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n$.

2) Montrer que $U_{n+1}=U_n-\dfrac{1}{2n+1}\left(\dfrac{3}{5}\right)^{2n+1}$.

3) En déduire que, pour tout entier $n\ge 2$, on a : $\sum\limits_{k=1}^{n-1}\dfrac{1}{2k+1}\left(\dfrac{3}{5}\right)^{2k+1}=U_1-U_n$ puis calculer $\lim\limits_{n\to+\infty}\sum\limits_{k=1}^{n-1}\dfrac{1}{2k+1}\left(\dfrac{3}{5}\right)^{2k+1}$.

« Le terrorisme mathématique. Celui-ci consiste à utiliser le prestige des mathématiques dans le but de confondre, tromper ou autrement embrouiller les gens à qui l'on s'adresse ».

Normand Baillargeon

BON TRAVAIL