CM 3. La LOGIQUE STOÏCIENNE et la LOGIQUE des PROPOSITIONS

Introduction

Si l'on s'accorde pour reconnaître l'existence d'un autre type de logique dans l'Antiquité que celle d'Aristote, à savoir la « logique stoïcienne », il convient également de signaler qu'il n'y a pas de sources directes pour cette dernière et peu de sources indirectes. Néanmoins, il est connu que, attribuée au stoïcien grec Chrysippe (IIIe siècle av. JC), elle a pourtant été inventée par des logiciens de l'époque même d'Aristote : les Mégariques dont Eubulide – que nous reverrons apparaître bientôt. Comme chez Aristote, ainsi que cela a été posé en fin du chapitre précédent **[CM2]**, leur logique est étroitement liée à leur philosophie.

Ainsi, alors que la logique d'Aristote convient avec une logique de la substance et de l'essence, c'est-à-dire une logique du terme général ou **concept**, les Stoïciens, eux, sont nominalistes. Ce faisant, ils rejettent la réalité des essences en lesquelles ils ne voient que des noms qui expriment des classifications artificielles : la seule réalité est individuelle et concrète. Aussi la pensée ne peut-elle vraiment se porter que vers l'individuel connu par l'énumération de ses particularités et non procéder par l'emboîtement d'espèces et de genres par différences spécifiques. De plus, ce qui est au cœur de la pensée stoïcienne n'est pas la substance mais ce qui est réellement : ce qui se passe, l'événement, le fait. L'objet de la pensée n'est donc plus la liaison de concepts, tels « homme » et « mortel », mais ce qui survient : « Dion se promène » ou « s'il est jour, il fait clair. » En cela elle est une **logique des propositions** et non une logique des concepts.

Par ailleurs, les Mégariques et, en particulier Eubulide, ont relevé les limites de la logique d'Aristote en montrant qu'elle produisait des paradoxes. Alors que le *sophisme* est un raisonnement faux qui paraît vrai, le *paradoxe* est au contraire un raisonnement vrai (ou valide) qui paraît faux. Un des plus célèbres paradoxes permis par la logique d'Aristote est celui du tas de sable :

> Soit un tas de sable.
> Si on ôte un grain à un tas de sable, le tas ne disparaît pas : il demeure tas de sable.
> Si on recommence l'opération, pour la même raison, le tas de sable demeure.
> Mais un tas de sable est un ensemble fini de grains de sable.
> Donc si l'on poursuit l'opération, alors on doit finir par épuiser le tas de sable.
> Par conséquent, il est difficile de concilier les deux affirmations suivantes :
>
> 1) ôter un grain à un tas de sable ne le fait pas disparaître
> 2) un tas de sable est constitué d'un nombre fini de grains

La solution serait de dire qu'à partir d'un moment, on ne peut plus considérer qu'on a un tas de sable. Mais Eubulide demande alors : à partir de combien de grains un tas cesse-t-il d'être un tas ? Soit on répond à cette question en posant que le nombre minimal de grains d'un tas de sable est *n* et alors on contredit 1), soit on ne répond pas à cette question ce qui suppose qu'un tas de sable n'est pas seulement un certain nombre de grains et on contredit 2). Quel est le sens de cet exemple pour Eubulide ? Il s'agit pour lui de montrer qu'il y a des **concepts vagues**, c'est-à-dire pour lesquels on ne peut avoir de caractérisations précises : entre un tas de sable et quelques grains de sable, la délimitation est floue. Dès lors, la logique d'Aristote se trouve mise à mal en cela que le syllogisme est entièrement fondé dans l'usage des concepts qui sont supposés précisément déterminés. Une chose *A* ne peut en même temps être et ne pas être *B*. Pourtant, en l'occurrence, un ensemble de *n* grains de sable peut à la fois être un tas et ne pas l'être. Ceci revient à un autre élément de la pensée stoïcienne qui est déterminant pour sa compréhension et dans sa différence avec la logique aristotélicienne : le rapport entre la *langue*, la *pensée* et la *réalité*.

En effet, quand nous employons le concept « tas de sable », nous ne sommes pas capables de le préciser et, pourtant, nous le comprenons. Pourtant, si nous le comprenons tous, nous ne nous le représentons certainement pas de la même façon : nous n'en avons pas la même image. Aussi y a-t-il une différence la **représentation psychique** d'un concept et le **sens** que nous lui attribuons : la représentation psychique est personnelle, privée, tandis que le sens est commun et fait que nous nous comprenons. La relation du terme à la représentation psychique (ou état de l'âme) dépend alors de la *psychologie* tandis que la relation du terme à son sens est proprement ce qui est l'objet de la *logique*. Pour les Stoïciens, Aristote avait confondu psychologie et logique en s'intéressant au terme en tant qu'état de l'âme qui correspond à la réalité. Pour leur part, ils s'intéressent au *lekton* qui n'est pas la représentation psychique corrélée au terme, ni même la réalité signifiée par ce dernier, mais qui consiste en ce qui est saisi par ceux qui comprennent la langue utilisée. Dès lors les *lekta* apparaissent comme déterminés par les règles mêmes de la langue qui sont communes à ceux qui la partagent et qui, de ce fait, peuvent être étudiées de façon *objective*.

Parmi ces *lekta*, certains sont susceptibles de vérité et de fausseté : ce ne sont ni les mots isolés, ni les phrases interrogatives, impératives, exclamatives, etc. : ce sont les propositions (*axiomata*). La **proposition** est donc au centre de la logique des Stoïciens, comme l'est le concept dans la logique d'Aristote, à la fois en cela qu'elle exprime les événements bien mieux que ne le fait le mot seul et qu'elle constitue l'élément objectif d'une étude de la pensée dans sa relation à la vérité et à la fausseté.

1. Propositions, valeurs de vérité et connecteurs

1.1. Quelques notions élémentaires

Alors que pour Aristote, la tripartition logique se fait entre termes, propositions et syllogismes, pour les Stoïciens elle se décompose en propositions simples, propositions complexes et raisonnements. Ainsi, alors que la proposition se décompose chez Aristote en termes et copule, les termes deviennent au contraire inséparables dans la proposition des Stoïciens. L'énoncé « Dion se promène » est indécomposable : il est dit *simple*. En revanche, il peut être composé avec une autre proposition simple, telle « il fait jour » en « Dion se promène et il fait jour. » Cette proposition est dite *complexe*. Entre les deux propositions simples qui composent la proposition complexe, le terme « et » est la *copule*. De nos jours, nous disons que la proposition simple est **atomique**, la proposition complexe est **moléculaire** et la copule est dénommée **connecteur**. Parmi les connecteurs les plus courants se trouvent :

- la conjonction « et » notée $\wedge$
- la disjonction « ou » notée $\vee$
- l'implication « si… alors… » notée $\rightarrow$
- auquel s'ajoute la négation « ne… pas » notée ~

La définition des connecteurs est en elle-même problématique, parce qu'ils sont à la fois compris par tous et pourtant impossibles à expliciter par eux-mêmes. Néanmoins tel n'est pas l'objet de la logique stoïcienne : celle-ci, si elle porte sur les propositions, s'intéresse en particulier à la manière dont les propositions sont vraies, non en elles-mêmes (ce qui reviendrait à poser une question de type aristotélicien sur la réalité de la possession du prédicat par le sujet, ou de l'essence par la substance), mais relativement les unes aux autres. En d'autres termes, ce qui est l'objet de la logique des propositions, c'est ce qu'il advient de la vérité ou de la fausseté des propositions quand elles sont combinées les unes avec les autres. En retour, c'est ainsi que peuvent être définis les connecteurs.

Un énoncé ne peut être dit que vrai et faux : il n'admet que deux valeurs de vérité, **V** et **F** = théorie de la **bivalence**. Une combinaison de deux propositions est donc une combinaison de ces deux valeurs. On peut alors établir une connexion entre les valeurs de chacune des propositions simples et chaque valeur possible de leur combinaison. Pour cela, commençons par définir le seul **connecteur singulaire** (sur une seule proposition) qu'est la négation :

- si p est V alors ~p est F
- si p est F alors ~p est V

Ce qui peut s'écrire sous la forme d'un tableau, dite **table de vérité** :

p	~p
V	F
F	V

1.2. Les tables de vérité

Une table de vérité peut alors être formée représentant tous les cas possibles de valeur de vérité de la combinaison de deux propositions en fonction des valeurs de vérité de chacune des propositions. Un tel serait composé de 4 lignes = 4 cas possibles de combinaison des deux valeurs de vérité V et F pour les deux propositions *p* et *q* = 2 valeurs de vérité $\times$ 2 propositions. Ce tableau serait par ailleurs composé de 16 colonnes représentant les combinaisons possibles de V et F sur 4 lignes = 2^4 valeurs de vérité possibles = 2 (pour la 1ère ligne) $\times$ 2 (pour la 2e ligne) $\times$ 2 (pour la 3e ligne) $\times$ 2 (pour la 4e ligne) :

p	**q**	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
V	**V**	V	V	V	V	V	V	V	V	F	F	F	F	F	F	F	F
V	**F**	V	V	V	V	F	F	F	F	V	V	V	V	F	F	F	F
F	**V**	V	V	F	F	V	V	F	F	V	V	F	F	V	V	F	F
F	**F**	V	F	V	F	V	F	V	F	V	F	V	F	V	F	V	F

En réalité, toutes ces combinaisons ne sont pas intéressantes. En particulier, on peut

- ignorer celles qui sont toujours vraie et toujours fausse, quelle que soit la valeur de *p* et *q* (colonnes n°1, n°16) ;

- ignorer celles qui sont indifférentes à la valeur de vérité d'une des deux propositions, c'est-à-dire les colonnes identiques à celles de *p* ou *q* ou qui sont leurs exactes opposées (colonnes n°4, n°6, n° 11 et n°13) ;
- ramener celles de la 2e partie du tableau (colonne n°9 à n°15) à celles de la 1ère partie du tableau qui en sont les exactes opposées (c'est-à-dire qu'elles sont obtenues par leur négation.

On obtient donc 5 combinaisons qui permettent de définir 5 **connecteurs binaires**, en plus de la négation.

p	**q**	2	3	5	7	8
V	**V**	V	V	V	V	V
V	**F**	V	V	F	F	F
F	**V**	V	F	V	F	F
F	**F**	F	V	V	V	F

Cette caractérisation par les tables de vérité des connecteurs s'appelle la **définition véricondititionnelle** des connecteurs car elle donne les conditions sous lesquelles la proposition complexe obtenue par la combinaison des propositions simples par le connecteur est vraie (ou fausse).

1.3. Les connecteurs

Reprenons le tableau précédent :

		2	3	5	7	8
p	**q**	$\vee$	$\leftarrow$	$\rightarrow$	$\leftrightarrow$	$\wedge$
V	**V**	V	V	V	V	V
V	**F**	V	V	F	F	F
F	**V**	V	F	V	F	F
F	**F**	F	V	V	V	F

La colonne n°8 est la définition de la **conjonction** : la conjonction $p \wedge q$ est vraie si et seulement si *p* et *q* sont vraies. Si l'une des deux propositions ou les deux sont fausses, alors leur conjonction est fausse.

> *RQ : Il s'agit du sens ordinaire de « et » : la proposition « il est gentil et chauve » est vraie s'il est vrai qu'il est gentil et s'il est vrai qu'il est chauve.*

La colonne n°2 est la définition de la **disjonction** : la disjonction $p \vee q$ est vraie si et seulement si au moins une des deux propositions *p* ou *q* est vraie. Elle est fausse si les deux propositions sont fausses.

> *RQ : C'est le sens commun du « ou » quand il est inclusif (et non exclusif comme dans « fromage ou dessert » qui a le sens de « ou bien ») : la proposition « il est gentil ou chauve » est vraie s'il est gentil, s'il est chauve et s'il est gentil et chauve. Elle est fausse s'il n'est pas gentil et s'il n'est pas chauve.*

La colonne n°5 est la définition de **l'implication** : l'implication $p \rightarrow q$ est vraie dans tous les cas sauf quand la première proposition de l'implication est vraie et que la seconde est fausse.

RQ1 : L'implication est un connecteur conditionnel qui pose : si p, *alors* q. *En d'autres termes, on ne peut pas avoir* p *sans* q. *Il n'y a donc qu'un cas de fausseté dans l'implication : celui d'une antécédente vraie et d'une conséquente fausse. Par exemple, la proposition « si tu es grand, alors tu peux toucher l'étoile » est fausse dans le seul cas où tu es grand et, pourtant, tu ne peux pas toucher l'étoile. La vérité de l'implication ne porte pas sur les propositions mais sur le « si… alors… ».*

RQ2** : On comprend que 1) pour que* tu puisses toucher l'étoile, *il suffit que* tu sois grand = *il* ***suffit *d'avoir* p *pour avoir* q = p *est une* ***condition suffisante*** *de* q *; 2) pour que* tu sois grand, *il faut que* tu puisses toucher l'étoile = tu ne peux pas être grand sans pouvoir toucher l'étoile = *il est* ***nécessaire*** *d'avoir* q *pour avoir* p = *q est une* ***condition nécessaire*** *de p.*

RQ3 : Impliquer n'est pas équivalent à « se déduire de ». Encore une fois, une implication est un type de connexion logique qui ne requiert pas que l'antécédent et le conséquent soient liés l'un à l'autre de manière causale ou déductive.

Enfin, la colonne n°3 est $q \rightarrow p$. La colonne n°7 est l'équivalence qui consiste en la conjonction des deux implications $p \rightarrow q$ et $q \rightarrow p$ = « *p* si et seulement si *q* » = *p* (ou *q*) est une condition nécessaire et suffisante de *p* (ou *p*).

Tout ceci révèle deux aspects. D'une part la logique est de nature **combinatoire** : combinaisons des propositions, combinaisons des valeurs de vérité. Aussi comprend-on spontanément qu'on puisse combiner entre elles les combinaisons : ainsi sont obtenus les énoncés dits moléculaires – pour lesquels un certain nombre de règles de ponctuation doivent être posées et qui peuvent être **évalués**. D'autre part, il reste également à examiner ce que sont les raisonnements qui sont également des combinaisons de propositions, mais non sous la forme d'une association par les connecteurs. De façon plus précise, la logique stoïcienne propose des **formes de raisonnement**, appelées syllogismes, qui n'en sont pourtant pas à strictement parler. Voyons en quoi elles consistent, étant donné que nous maintenons la distinction entre un raisonnement qui peut être *correct ou incorrect* et une proposition, simple ou composée, qui peut être *vraie ou fausse*.

2. Règles du raisonnement et lois du calcul

2.1. Le syllogisme stoïcien

Deux très célèbres **règles du raisonnement** se peuvent trouver chez les Stoïciens. Le premier est le *modus ponens* et le second est le *modus tollens*. Nous connaissons déjà intuitivement le *modus ponens* :

Si le premier alors le second ; or le premier ; donc le second.

$p \rightarrow q$

p

q

Le *modus tollens* est le suivant :

Si le premier alors le second ; or pas le second ; donc pas le premier.

$p \rightarrow q$

$\neg q$

$\sim p$

Le terme de « syllogisme » ne convient à ces raisonnements que de manière imparfaite car, s'ils présentent deux prémisses et une conclusion, en revanche il n'y a pas de moyen terme, ni de majeure ou de mineure. Néanmoins, il s'agit malgré tout **d'autoriser** une inférence, en l'occurrence de pouvoir passer de *p* (ou de *non-q*) à *q* (ou *non-p*).

Ceci correspond donc à l'existence de **règles de l'inférence valide**. Dans le cas précédent du *modus ponens* et du *modus tollens*, il s'agit d'une **règle de détachement**. Par exemple, partout où je rencontre p et $p \to q$, je peux les remplacer par q, dès lors que p et $p \to q$ ont été avérés. En d'autres termes, je peux « détacher » la conclusion de ses prémisses dès que celles-ci sont vraies. De façon analogue, si une équivalence $p \leftrightarrow q$ est avérée, je peux remplacer p et q l'un par l'autre partout où ils se trouvent, sans affecter la vérité de la proposition, c'est-à-dire *salva veritate*. Il s'agit d'une **règle de substitution**. En bref, ces règles sont des *règles pour l'usage des propositions et de leurs transformations* les unes en d'autres, une règle de détachement permettant de raccourcir les propositions, tandis qu'une règle de substitution permet de transformer une proposition en une autre sans en affecter la table de vérité.

Nous remarquons alors que la règle d'inférence suppose que les « prémisses », qui sont des propositions, soient vraies. Ainsi, même si l'on a distingué le raisonnement, en tant que *correct* ou incorrect, et la proposition, en tant que *vraie* ou fausse, il y a néanmoins une *relation entre la bonne règle du raisonnement et la valeur de vérité des propositions*. En l'occurrence, si l'on trouve une proposition composée (par exemple implicative) qui est toujours vraie, indépendamment de la valeur de vérité des propositions qui la composent, alors on peut établir une règle de l'inférence (par détachement). De telles propositions sont appelées **tautologies**.

2.2. Les tautologies

Les tautologiques s'écrivent ainsi : $\vdash A$ et, par convention, on écrit :

- $\vdash (A \to B)$ ou $A \Rightarrow B$: implication tautologique
- $\vdash (A \leftrightarrow B)$ ou $A \Leftrightarrow B$ ou $A \equiv B$: équivalence tautologique

Le signe $\vdash$ marque leur caractère *apodictique* = elles sont vraies indépendamment de la valeur des propositions qui les composent, de façon *nécessaire*. Par exemple :

- la proposition $p \vee \sim p$ est vraie, que *p* soit vraie ou qu'elle soit fausse
- $p \to p$ est vraie, que *p* soit vraie ou qu'elle soit fausse
- $p \leftrightarrow \sim\sim p$ est vraie, que *p* soit vraie ou qu'elle soit fausse
- $p \vee q \leftrightarrow q \vee p$ est vraie, quelles que soient les valeurs de *p* et *q*

Aux côtés des tautologies, se trouvent des propositions qui sont toujours fausses : ce sont les **contradictions**. Par exemple :

- la proposition $p \wedge \sim p$ est fausse, que *p* soit vraie ou qu'elle soit fausse

Dans les deux cas, les propositions sont seulement *formelles* : elles ne donnent aucun renseignement de contenu. À ce titre, elles peuvent être considérées comme *vides*. Mais cela ne signifie pas pour autant qu'elles n'ont pas de *sens*. Elles en ont un en tant qu'elles indiquent qu'une combinaison de propositions est équivalente à une autre, ou qu'elle l'implique ou qu'elle est absolument incompatible avec elle. C'est pour cela que les tautologies donnent les moyens de passer d'une combinaison à une autre, d'une proposition à une autre, d'une « formule » à une autre. Formelles, universelles et nécessaires, elles sont à proprement parler des **lois logiques** qui peuvent servir de fondement aux règles du raisonnement correct.

2.3. Les lois logiques

Les lois élémentaires, portant sur une seule proposition :

- le principe d'identité : $p \equiv p$ et $p \Rightarrow p$
- le principe du tiers-exclu : $\vdash (p \vee \sim p)$
- le principe de non-contradiction : $\vdash (\sim(p \wedge \sim p))$
- le principe de double négation : $p \equiv \sim\sim p$
- l'idempotence : $p \vee p \vee \ldots \vee p \equiv p$ et $p \wedge p \wedge \ldots \wedge p \equiv p$

Les lois de la commutativité, de l'associativité et de la transitivité :

- commutativité (= symétrie des connecteurs) : $p \vee q \equiv q \vee p$ et $p \wedge q \equiv q \wedge p$
- associativité (inutilité des parenthèses) : $(p \vee q) \vee r \equiv p \vee q \vee r \equiv p \vee (q \vee r)$ (idem pour la conjonction)
- distributivité : $p \vee (q \wedge r) \equiv (p \vee q) \wedge (p \vee r)$ et $p \wedge (q \vee r) \equiv (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$

Les lois de Morgan (lois de dualité) : $\sim(p \wedge q) \equiv \sim p \vee \sim q$ et $\sim(p \vee q) \equiv \sim p \wedge \sim q$

Quelques lois de l'implication :

- la contraposition : $p \rightarrow q \equiv \sim q \rightarrow \sim p$
- la transitivité : $(p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow r) \Rightarrow p \rightarrow r$
- la loi de Clavius (*consequentia mirabilis*) : $(\sim p \rightarrow p) \Rightarrow p$
- les lois du syllogisme : $(p \rightarrow q) \wedge p \Rightarrow q$ (*modus ponens*) et $(p \rightarrow q) \wedge \sim q \Rightarrow \sim p$ (*modus tollens*)
- *Verum sequitur ad quodlibet* (le vrai est impliqué par tout) : $q \Rightarrow (p \rightarrow q)$
- *Ex falso sequitur quodlibet* (du faux tout est impliqué) : $\sim p \Rightarrow (p \rightarrow q)$

Ces lois correspondent bien à des propositions qui valent quelles que soient les valeurs de vérité des propositions engagées. Faisons quelques tables de vérité pour nous en convaincre, et notamment pour celles qui sont sans doute les plus surprenantes : la loi de Clavius, la loi *verum sequitur ad quodlibet* (*VSAQ*) et la loi *ex falso sequitur quodlibet* (*EXSQ*)

					Clavius	*VSAQ*	*EXQS*
p	**q**	$\sim p$	$p \rightarrow q$	$\sim p \rightarrow p$	$(\sim p \rightarrow p) \rightarrow p$	$q \rightarrow (p \rightarrow q)$	$\sim p \rightarrow (p \rightarrow q)$
V	**V**	F	V	V	V	V	V
V	**F**	F	F	V	V	V	V
F	**V**	V	V	F	V	V	V
F	**F**	V	V	F	V	V	V

2.4. Règles de l'inférence

Les lois logiques autorisent un acte d'inférence et, de ce fait, elles correspondent à une règle de l'inférence. Ainsi, pour quelques exemples, nous pouvons faire un tableau :

Lois logiques	**Règles d'inférence**
Loi du tiers-exclu	Soit une proposition et soit sa négation, si l'une est vraie alors il est légitime d'inférer que l'autre est fausse (et réciproquement).
Loi de la double négation	Il est permis de supprimer les doubles négations.
Loi de la commutativité	Il est permis de permuter les propositions liées entre elles par conjonction ou par disjonction.
Loi de contraposition (*modus tollens*)	Il est permis de nier la proposition antécédente d'une implication vraie quand la proposition conséquente est fausse.
Loi du *modus ponens*	Il est permis de poser la proposition conséquente d'une implication vraie quand l'antécédente est vraie.

2.5. Les formes normales

Il est également possible d'établir des équivalences tautologiques entre les connecteurs logiques et une proposition moléculaire dans laquelle n'interviennent que la conjonction, la disjonction et la négation : ce sont les *formes normales*. Leur avantage est de montrer l'équivalence de propositions complexes sans avoir recours aux tables de vérité. Elles sont de 2 sortes : la *forme normale conjonctive* et la *forme normale disjonctive*.

– la FNC = conjonction de disjonctions : $(p_1 \vee p_2) \wedge (p_3 \vee p_4) \wedge \ldots$

– la FND = disjonction de conjonctions : $(p_1 \wedge p_2) \vee (p_3 \wedge p_4) \vee \ldots$

NB : On peut notamment passer de l'une à l'autre par les lois de Morgan.

Pour le conditionnel $p \rightarrow q$, qui signifie : « On ne peut avoir p sans q, mais on peut avoir q sans p, de même que l'on peut n'avoir ni q ni p. » Cela donne :

– FNC : $\sim p \vee q$

– FND : $(\sim p \wedge \sim q) \vee (\sim p \wedge q) \vee (p \wedge q)$

3. Conclusion. Vers la logique des prédicats

Ce que nous venons de voir doit, enfin, nous permettre d'introduire deux distinctions qui doivent être maîtrisées si l'on veut appréhender ce qu'est la logique.

D'une part, ce qui vient d'être exposé dans ce chapitre relève de la distinction entre la **syntaxe** et la **sémantique**. Ces termes ont, dans leur acception logique, une signification très proche de celle qu'ils ont en linguistique, où on les emploie communément. La *syntaxe* fait référence à la manière de combiner entre eux des signes. En l'occurrence, la syntaxe de la logique des propositions qui vient d'être présentée est celle des propositions atomiques, notées par des petites lettres *p*, *q*, *r*, etc., que l'on combine les unes avec les autres grâce aux différentes connecteurs ~, ∧, ∨, →, etc., et que l'on écrit selon certains règles de ponctuation. La syntaxe est donc étroitement liée au **symbolisme** et à la manière de combiner les **symboles** en **formules** et les formules entre elles. Ce à quoi les propositions se réfèrent et, même, leur valeur de vérité n'ont aucune importance. Elles peuvent donc être considérées comme des **variables** – que l'on peut remplacer par ce que l'on veut mais aussi qui peuvent prendre n'importe quelle valeur. Par exemple, dans $p \rightarrow q$, je peux considérer *p* et *q* comme une proposition simple quelconque, une proposition composée quelconque, l'expression d'un événement réel, l'expression d'une formule mathématique, mais aussi comme dotée de telle ou telle valeur de vérité.

La *sémantique* en logique se porte alors, tout entière, sur le sens des propositions. Ainsi, une proposition, en logique bivalente, pouvant être dite soit vraie, soit fausse, elle ne peut prendre que deux valeurs : V et F, ou 1 et 0. C'est ce que nous appelons la **logique booléenne** pour laquelle l'ensemble des valeurs de vérité a seulement deux éléments. Tel est le sens de la tautologie (ou de la contradiction), entièrement pris dans l'absolu de sa vérité qui est indépendante de la valeur des propositions qu'elle met en œuvre. En d'autres termes, la sémantique logique consiste à considérer que la signification d'une formule dépend de la valeur de vérité de ses variables. Néanmoins, on devine que quand la formule est très composée, il peut être malaisé de déterminer sa valeur de vérité.

La seconde distinction vient de la différence entre la logique stoïcienne et la logique aristotélicienne que l'on peut extrapoler en tant que distinction entre une **logique des propositions** et une logique des concepts, encore appelée **logique des prédicats**. En l'occurrence, dans la logique des propositions, les variables sont les propositions elles-mêmes et il n'y a aucun quantificateur : ni « tout, ni « aucun », ni « quelque ». En revanche, dans la logique des concepts, les termes peuvent être quantifiés : les variables ne sont plus les propositions mais les termes eux-mêmes. Ainsi, par exemple, on peut énoncer le raisonnement suivant : « Si tous les hommes sont mortels et si tous les philosophes sont mortels, alors tous les philosophes sont mortels » en *si tout g est h et si tout f est g, alors tout f est h*, où *f*, *g*, *h* sont des variables conceptuelles. On peut encore énoncer « Si tous les hommes sont mortels et si Socrate est un homme, alors Socrate est mortel » en *si tout f est g et si x est f, alors x est g*, où *f* et *g* sont des variables conceptuelles et *x* une variable individuelle.

Une telle logique se peut alors dotée de variables *x*, de prédicats, *f*, *g*, de connecteurs et de quantificateurs, $\exists$ et $\forall$. L'usage de ces différents symboles constitue le cœur de la **logique dite du premier ordre**. La quantification porte sur les variables individuelles. Ainsi « tout homme est mortel » s'écrit comme suit : $\forall x\ (Mx)$, où *M* désigne le prédicat « être mortel ». Dans la **logique du second ordre**, les prédicats pourront aussi être quantifiés. La logique des propositions est une espèce de la logique des prédicats, dans laquelle il n'y a pas de quantification.