2P010

Méthodes Mathematiques 1 : Analyse Vectorielle

TABLE DES MATIERES

4. Gradient d'une fonction scalaire : en cordonnées cartésiennes, en coordonnées curvilignes, opérateur 'nabla' dans le cas des coordonnées cartésiennes; exemples-exercies des calculs du gradient pour plusieurs fonctions scalaires, en coordonnées cartésiennes et en coordonnées sphériques.

4.1. Dérivée dans la direction $\vec{n}$; deux propriété du gradient; exemples des surfaces de niveau et des gradients pour des fonctions différentes.

4.2. Complément : développement limité d'une fonction de plusieurs variables. Application pour la dérivation du potentiel d'un petit dipôle 'a partir de deux potentiels de Coulomb.

5. Divergence d'une fonction vectorielle. Théorème d'Ostrogradski.

Définition d'un flux d'un champ de vecteurs à travers une surface.

Divergence en coordonnées cartésiennes, divergence en coordonnees curvilignes, leur démostrations géométriques à partir de la définition indépendante des coordonnées.

Exemples-exercices de calculs de la divergence pour des champs de vecteurs différents, en coordonnées cartésiennes et en coordonnées sphériques.

Premiere théoreme intégrale : théoreme d'Ostrogradski, sa démonstration géométrique.

5.1 Complément : Exemples des calculs des flux en coordonnees cartesiennes; expressions pour les composantes de $d\vec{r}$ et $d\vec{s}$ en coordonnées differentes; exemples des calculs des flux en coordonnees sphériques; calculs sont faits directement, d'après la definition de flux, et par le théoreme d'Ostrogradski dans le cas des surfaces fermées.

6. Rotationnel d'une fonction vectorielle. Circulation. Théorème de Stokes.

Définition de la circulation d'un champ de vecteurs le long d'un chemin.

Rotationnel d'un champ de vecteur en coordonnnées cartésiennées et en coordonnées curvilignes, leur démonstration géommetrique à partir de la définition du rotationnel indépendante des coordonnées.

Deuxieme théoreme intégrale : théoreme de Stokes et sa démonstration géometrique.

6.1. Complément : Exemples des calculs des circulations en coordonnees cartesiennes; rappel des formules pour les composantes du verteur $d\vec{r}$ en coordonnees differentes; exemple de calcul en coordonnees cylindriques; Les calculs sont faits directement, d'après la définition de la circulation, et par le théoreme de Stokes, dans le cas des chemins fermés.

7. Laplacien, en coordonnées cartésiennes et en coordonnées curvilignes; exemples d"applications : équation d'ondes et equation de Poisson en l'electrostatique.

Exemples-exercices des calculs du laplacien pour des fonctions scalaires différentes : calculs en coordonnées cartesiennes, et ensuite, pour les memes fonctions, en coordonnées sphériques; les expressions simplifiees pour le laplacien en coordonnees spheriques et cylindriques dans les cas des symétries particulières des fonctions.

8. Formules differentielles, et leurs démonstrations, pour $\vec{\mathrm{grad}}(f \cdot g)$, $\mathrm{div}(f \cdot \vec{A})$, $\mathrm{div}\,\vec{\mathrm{rot}}\vec{A} = 0$, $\mathrm{div}(\vec{A} \wedge \vec{B})$, $\vec{\mathrm{rot}}(f \cdot \vec{A})$, $\vec{\mathrm{rot}}\,\vec{\mathrm{grad}} f = 0$, $\vec{\mathrm{rot}}(\vec{\mathrm{rot}}\vec{A})$.

9. Deux exemples d'applications physiques.

9.1. Première application physique : un cas simple d'électrostatique.

9.2. Deuxième application physique : un cas simple de magnétistatique.

10. Équations différentielles d'ordre 1.

10.1. Équations différentielles d'ordre 1 qui sont solubles par la séparation des variables. Méthode de résolution. Rôle des conditions initiales. Exemples, exercices.

10.2. Équations d'ordre 1 linéaires avec des coefficients et second membre variables : équations de la forme $f'(t) + A(t)f(t) = B(t)$. Méthodes de leurs résolution. Rôle des conditions initiales. Exemples, exercices.

11. Equations différentielles d'ordre 2 avec des coefficients constants mais le second membre variable : équations de la forme $f''(t)+Af'(t)+Bf(t) = C(t)$. Méthodes de leurs résolution. Cas particuliers avec des seconds membres particuliers. Rôle des conditions

initiales et des conditions aux limites. Exemples, exercices.

12. Annexe 1. Calcul des dérivées.

13. Annexe 2. Calcul des intégrales par la primitive.

14. Annexe 3. Séries de Taylor. Déleloppement en séries entières des fonctions classiques.

1 Rappel, définitions.

Un point P dans l'espace réel R^3, en 3 dimensions spacialles, sera marqué par un vecteur $\vec{r} = \vec{OP}$, avec des composantes (x, y, z) qui sont les coordonnées cartésiennes de ce point, Fig.1:

$$\vec{OP} \equiv \vec{r} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \tag{1.1}$$

Dans les coordonnées sphériques, ce même point sera présenté par les paramètres (r, Θ, ϕ) où

$$\begin{aligned} r &= \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \\ \Theta &= \arctan \frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{z} = \arcsin \frac{\sqrt{x^2 + y2}}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \\ \phi &= \arctan \frac{y}{x} = \arcsin \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} \end{aligned} \tag{1.2}$$

– Fig.2.

Dans les coordonnées cylindriques, $\vec{r}$ sera présenté par les paramètres (ρ, ϕ, z), où

$$\begin{aligned} \rho &= \sqrt{x^2 + y^2} \\ \phi &= \arctan \frac{x}{y} = \arcsin \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} \\ z &= z \end{aligned} \tag{1.3}$$

– Fig.3.

Dans le cas de l'espace réel R^2, en 2 dimensions spacialles, le point P sera marqué par un vecteur $\vec{\rho}$, avec des composantes (x, y) qui sont les coordonnées cartésiennes de ce point, Fig.4 :

$$\vec{OP} = \vec{\rho} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \tag{1.4}$$

Dans les coordonnées polaires, dans R^2, ce même point sera présenté par les paramètres (ρ, ϕ), où

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$\phi = \arctan \frac{x}{y} = \arcsin \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} \qquad (1.5)$$

– Fiq.5.

Une fonction $f(\vec{r}) \equiv f(x,y,z)$, définie dans R^3, est une règle particulière qui fait correspondre les points de R^3 et les nombres réels (ou complexes). Symboliquement:

$$f(\vec{r}): \quad R^3 \to R \ \ (\text{ou } C) \qquad (1.6)$$

Exemples.

1)

$$f(\vec{r}) \equiv f(x,y,z) = \frac{1}{r} \equiv \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} \qquad (1.7)$$

– pontentiel de Coulomb, en électrostatique ($U(r) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q}{r}$), produit par la charge électrique, ponctuelle, placée à l'origine (nous mettons $1/4\pi\epsilon_0 \to 1$, pour simplifier les formules).

2)

$$g(\vec{r}) = \frac{1}{a^2+r^2} \equiv \frac{1}{a^2+x^2+y^2+z^2} \qquad (1.8)$$

a est un paramètre réel, une constante.

3)

$$h(\vec{r}) = \frac{\vec{p}\cdot\vec{r}}{r^3} \equiv \frac{p_x x + p_y y + p_z z}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}} \qquad (1.9)$$

où $\vec{p} = (p_x, p_y, p_z)$ est un paramètre vectoriel (l'ensemble de 3 paramètres réels que nous notons comme p_x, p_y, p_z);

$h(\vec{r})$ est un potentiel électrique créé par un petit dipôle placé à l'origine; $\vec{p}\cdot\vec{r}$ est un produit scalaire usuel.

Nous allons appeler également $f(\vec{r})$ fonction scalaire pour faire la différence avec des fonctions vectorielles qu'on peut également définir dans l'espace R^3.

Une fonction vectorielle (ou un champ de vecteurs) $\vec{A}(\vec{r}) \equiv \vec{A}(x,y,z)$, définie dans R^3, est une règle particulière qui fait correspondre les points de R^3 et les points d'un autre espace R^3, ou du même espace.

Encore, en plus de details:

$$\vec{A}(\vec{r}) \equiv \vec{A}(x,y,z) \equiv \begin{pmatrix} A_x(x,y,z) \\ A_y(x,y,z) \\ A_z(x,y,z) \end{pmatrix} \tag{1.10}$$

C'est un dire, une fonction vectorielle est un ensemble de 3 fonctions scalaires, marquées comme $A_x(x,y,z)$, $A_y(x,y,z)$, $A_z(x,y,z)$.

<u>Exemples.</u>

1)

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{\vec{r}}{r^3} \tag{1.11}$$

En plus de détails:

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{r^3}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} \frac{x}{r^3} \\ \frac{y}{r^3} \\ \frac{z}{r^3} \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} \frac{x}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}} \\ \frac{y}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}} \\ \frac{z}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}} \end{pmatrix} \tag{1.12}$$

Dans cet exemple $E_x(x,y,z) = x/(x^2+y^2+z^2)^{3/2}$, etc. . $\vec{E}(\vec{r})$ est un champ électrique créé par la charge ponctuelle, placé à l'origine (toujours $1/4\pi\epsilon_0 = 1$).

2)

$$\vec{G}(\vec{r}) = \frac{2\vec{r}}{(a^2+r^2)^2} \tag{1.13}$$

Evidement, que, dans le cas de l'espace bidimensionnel R^2, une fonction vectorielle sera de la forme:

$$\vec{B}(\vec{\rho}) \equiv \vec{B}(x,y) = \begin{pmatrix} B_x(x,y) \\ B_y(x,y) \end{pmatrix} \tag{1.14}$$

– d'un ensemble de 2 fonctions scalaires, dans R^2.

<u>Exemple.</u>

$$\vec{B}(\vec{\rho}) = \frac{\vec{\rho}}{\rho^2} = \frac{1}{\rho^2}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{x}{\rho^2} \\ \frac{y}{\rho^2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{x}{x^2+y^2} \\ \frac{y}{x^2+y^2} \end{pmatrix} \tag{1.15}$$

2 Bases mobiles dans les coordonnées curvilignes.

2.1. Rappel sur la base des coordonnées cartesiennes.

Dans les coordonnées cartesiennes, un vecteur quelconque $\vec{p}$ à des composantes (p_x, p_y, p_z) pourrait être présenté soit comme dans le chapitre précédant, par une colonne:

$$\vec{p} = \begin{pmatrix} p_x \\ p_y \\ p_z \end{pmatrix} \tag{2.1}$$

soit comme une décomposition dans les vecteurs de la base, comme

$$\vec{p} = p_x \cdot \vec{e}_x + p_y \cdot \vec{e}_y + p_z \vec{e}_z \tag{2.2}$$

Les vecteurs $\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z$, montrés dans la Fig.6, forme une base orthonormée des coordonnées cartésiennes, à savoir:

$$\begin{gathered} |\vec{e}_x| = |\vec{e}_y| = |\vec{e}_z| = 1 \\ \vec{e}_x \cdot \vec{e}_y = \vec{e}_y \cdot \vec{e}_z = \vec{e}_z \cdot \vec{e}_x = 0 \end{gathered} \tag{2.3}$$

$|\vec{e}_x|$ représente le module (ou la norme, ou la longueur) du vecteur $\vec{e}_x$:

$$|\vec{e}_x|^2 = \vec{e}_x \cdot \vec{e}_x, \quad |\vec{e}_x| = \sqrt{\vec{e}_x \cdot \vec{e}_x} \tag{2.4}$$

Très souvant, les vecteurs $\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z$ de la base des coordonnées cartésiennes sont notés également comme $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$. c'est à dire:

$$\vec{e}_x \equiv \vec{i}, \quad \vec{e}_y \equiv \vec{j}, \quad \vec{e}_z \equiv \vec{k} \tag{2.5}$$

La forme (13.1) d'un vecteur $\vec{p}$, présenté comme une colonne des composante p_x, p_y, p_z, correspond, implicitement, à la décomposition (13.2) de $\vec{p}$ dans les vecteurs de la base.

2.2 Bases mobiles des coordonnées curvilignes.

Quand la symétrie du problème est appropriée, il est parfois plus facile à faire des calculs dans d'autres coordonnées, dont les coordonnées sphériques et cylindriques sont le plus souvent utilisées, dans le cas de l'espace R^3. Dans l'espace R^2, les coordonnées polaires sont utilisées très souvant.

Dans la suite nous allons définir des bases orthonormées qui servent pour décomposer les vecteurs, pour les exprimés dans ces coordonnées. Autrement dit, nous allons définir des bases qui remplacent la suite des vecteurs $(\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$ des coordonnées cartésiennes.

Nous nous metterons d'abord dans un cadre plus général, des coordonées curvilignes quelconques de l'espace R^3, mais qui sont soumises à la condition que, localement, ces coordonnées sont orthogonalles. Si $(u_1,\ u_2,\ u_3)$ sont ces nouvelles coordonnées, alors l'orthogonalité locale correspond à la condition que les vecteurs

$$\vec{e}_1 = \frac{\partial \vec{r}}{\partial u_1}, \quad \vec{e}_2 = \frac{\partial \vec{r}}{\partial u_2}, \quad \vec{e}_3 = \frac{\partial \vec{r}}{\partial u_3} \tag{2.6}$$

sont orthogonaux entre eux. Dans l'éq.(13.6), $\vec{r}$ est supposé d'être exprimé en fonction des nouvelles coordonnées: $\vec{r} = \vec{r}(u_1,\ u_2,\ u_3) = (x(u_1, u_2, u_3), y(u_1, u_2, u_3), z(u_1, u_2, u_3))$.

Prenons un exemple simple de l'espace bidimensionnel R^2 et des coordonnées polaires. Nous notons $\vec{\rho}$ les vecteurs, qui représentent les points d'espace R^2, au lieu de $\vec{r}$ de R^3. Alors:

$$\vec{\rho} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \rho \cdot \cos\phi \\ \rho \cdot \sin\phi \end{pmatrix} \tag{2.7}$$

ρ et ϕ étant les coordonnées polaires, curvilignes, de l'espace R^2. Les vecteurs $\vec{e}_1$ et $\vec{e}_2$, analogues aux vecteurs éq.(13.6), sont déterminés comme suit:

$$\vec{e}_1 \equiv \vec{e}_\rho = \frac{\partial \vec{\rho}}{\partial \rho} = \frac{\partial}{\partial \rho} \begin{pmatrix} \rho \cdot \cos\phi \\ \rho \cdot \sin\phi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\phi \\ \sin\phi \end{pmatrix} \tag{2.8}$$

$$\vec{e}_2 \equiv \vec{e}_\phi = \frac{\partial \vec{\rho}}{\partial \phi} = \frac{\partial}{\partial \phi} \begin{pmatrix} \rho \cdot \cos\phi \\ \rho \cdot \sin\phi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\rho \cdot \sin\phi \\ \rho \cdot \cos\phi \end{pmatrix} \tag{2.9}$$

Ces vecteurs sont montrés dans la Fig.7. Evidement, ils sont orthogonaux entre eux, en tout point $\vec{\rho}$ d'espace R^2.

Il est également facile de déterminer les vecteurs $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$, $\vec{e}_3$, éq.(13.6), pour des coordonnées sphériques et cylindriques de l'espace R^3.

Pour des coordonnées sphériques, Fig.2 :

$$\vec{e}_1 \equiv \vec{e}_r = \frac{\partial \vec{r}}{\partial r} = \frac{\partial}{\partial r} \begin{pmatrix} r \sin\Theta \cdot \cos\phi \\ r \sin\Theta \cdot \sin\phi \\ r \cdot \cos\Theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sin\Theta \cdot \cos\phi \\ \sin\Theta \cdot \sin\phi \\ \cos\Theta \end{pmatrix} \tag{2.10}$$

$$\vec{e}_2 \equiv \vec{e}_\theta = \frac{\partial \vec{r}}{\partial \Theta} = \frac{\partial}{\partial \Theta} \begin{pmatrix} r \sin\Theta \cdot \cos\phi \\ r \sin\Theta \cdot \sin\phi \\ r \cdot \cos\Theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r \cos\Theta \cdot \cos\phi \\ r \cos\Theta \cdot \sin\phi \\ -r \cdot \sin\Theta \end{pmatrix} \tag{2.11}$$

$$\vec{e}_3 \equiv \vec{e}_\phi = \frac{\partial \vec{r}}{\partial \phi} = \frac{\partial}{\partial \phi} \begin{pmatrix} r \sin\Theta \cdot \cos\phi \\ r \sin\Theta \cdot \sin\phi \\ r \cos\Theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -r \sin\Theta \cdot \sin\phi \\ r \sin\Theta \cdot \cos\phi \\ 0 \end{pmatrix} \tag{2.12}$$

Ces vecteurs sont montrés dans la Fig.8. Il est facile de vérifier qu'ils sont orthogonaux, pour tout $\vec{r}$ (tous r, Θ, ϕ).

Pour des coordonnées cylindriques, Fig.3, on trouve:

$$\vec{e}_1 \equiv \vec{e}_\rho = \frac{\partial \vec{r}}{\partial \rho} = \frac{\partial}{\partial \rho} \begin{pmatrix} \rho \cdot \cos\phi \\ \rho \cdot \sin\phi \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\phi \\ \sin\phi \\ 0 \end{pmatrix} \tag{2.13}$$

$$\vec{e}_2 \equiv \vec{e}_\phi = \frac{\partial \vec{r}}{\partial \phi} = \frac{\partial}{\partial \phi} \begin{pmatrix} \rho \cdot \cos\phi \\ \rho \cdot \sin\phi \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\rho \cdot \sin\phi \\ \rho \cdot \cos\phi \\ 0 \end{pmatrix} \tag{2.14}$$

$$\vec{e}_3 \equiv \vec{e}_z = \frac{\partial \vec{r}}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial z} \begin{pmatrix} \rho \cdot \cos\phi \\ \rho \cdot \sin\phi \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \tag{2.15}$$

– Fig.9. Ces vecteurs sont orthogonaux entre eux.

Retournons dans le cadre générale des coordonnées curvilignes quelconques u_1, u_2, u_3 (localement orthogonales) et les vecteurs $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$, $\vec{e}_3$, éq.(13.6). Ces vecteurs forment une <u>base locale</u>, ou une <u>base mobile</u>, pour un point d'espace donné, Fig.10. Elle sert pour décomposer les vecteurs, pour les exprimés en ces coordonnées. Cette base est supposée d'être orthogonale, mais elle n'est pas nécessairement normée. Autrement dit, en général $|\vec{e}_i| \neq 1$, $i = 1, 2, 3$.

Les échelles le long des axes, de cette base locale, sont définies par les modules (longueurs) des vecteurs $\{\vec{e}_i\}$, que nous allons noter $e_i \equiv |\vec{e}_i|$, $i = 1, 2, 3$. Nous introduisons, en plus, les vecteurs normés de cette base locale:

$$\hat{\vec{e}}_1, \quad \hat{\vec{e}}_2, \quad \hat{\vec{e}}_3 \tag{2.16}$$

$|\hat{\vec{e}}_1| = |\hat{\vec{e}}_2| = |\hat{\vec{e}}_3| = 1$, de la façon que:

$$\begin{gathered} \hat{\vec{e}}_1 = \frac{\vec{e}_1}{e_1}, \quad \hat{\vec{e}}_2 = \frac{\vec{e}_2}{e_2}, \quad \hat{\vec{e}}_3 = \frac{\vec{e}_3}{e_3}, \\ \vec{e}_1 = e_1 \cdot \hat{\vec{e}}_1, \quad \vec{e}_2 = e_2 \cdot \hat{\vec{e}}_2, \quad \vec{e}_3 = e_3 \cdot \hat{\vec{e}}_3 \end{gathered} \tag{2.17}$$

Pour des coordonnées sphériques, on trouve, à partir des éqs.(13.10)-(13.12), les facteurs d'échelle, ou les facteurs géométriques, suivants:

$$e_1 \equiv e_r = 1, \quad e_2 \equiv e_\theta = r, \quad e_3 \equiv e_\phi = r \cdot \sin\Theta \tag{2.18}$$

Pour des coordonnées cylindriques, éqs.(13.13)-(13.15), on obtient:

$$e_1 \equiv e_\rho = 1, \quad e_2 \equiv e_\phi = \rho, \quad e_3 \equiv e_z = 1 \tag{2.19}$$

Observons par ailleurs que le volume élémentaire (mésure d'intégration), dans les intégrales dans l'espace R^3, est égale au produit des facteurs géométriques multpliés par les différentielles des coordonnées. Dans le cas général des coordonnées curvilignes orthogonales:

$$dV \equiv d^3r = e_1 e_2 e_3 du_1 du_2 du_3 \tag{2.20}$$

Dans les coordonnées sphériques:

$$dV \equiv d^3r = e_r e_\theta e_\phi \, dr \, d\Theta \, d\phi = r^2 \sin\Theta \, dr \, d\Theta \, d\phi \tag{2.21}$$

Dans les coordonnées cylindriques:

$$dV \equiv d^3r = e_\rho e_\phi e_z \, d\rho \, d\phi \, dz = \rho \, d\rho \, d\phi \, dz \tag{2.22}$$

En effet, on peut reécrire les équations (13.6), qui définissent les vecteurs $\{\vec{e}_i\}$, de la manière suivante:

$$\delta\vec{r}_{(1)} = \vec{e}_1\delta u_1, \quad \delta\vec{r}_{(2)} = \vec{e}_2\delta u_2, \quad \delta\vec{r}_{(3)} = \vec{e}_3\delta u_3 \tag{2.23}$$

où les petits vecteurs $\delta\vec{r}_{(i)}$, $i = 1, 2, 3$, représentent les petits déplacements, à partir du point $\vec{r}$ dans R^3, qui correspondent à des variations des coordonnées δu_i, $i = 1, 2, 3$. Les trois vecteurs $\delta\vec{r}_{(1)}$, $\delta\vec{r}_{(2)}$, $\delta\vec{r}_{(3)}$ sont orthogonaux entre eux, étant proportionnels aux vecteurs $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$, $\vec{e}_3$ de la base locale. Le volume élémentaire (dans des intégrales) s'obtient par le produit des longueurs des trois vecteurs $\{\delta\vec{r}_{(i)}\}$, éq.(2.23), ce qui nous donne la mesure d'intégration dans l'éq.(13.20).

2.3. Exemples des projections des champs de vecteurs sur des bases mobiles.

Exemple 1.

Soit un champ de vecteur dans R^2

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} -y \\ x \end{pmatrix} \equiv -y \cdot \vec{e}_x + x \cdot \vec{e}_y \tag{2.24}$$

Il est dessiné dans la Fig.11. Ses décompositions dans les bases cartésienne et polaire sont montrées dans les figures 12 et 13.

Exemple 2.

Soit un champ de vecteurs dans R^3

$$\vec{w}(\vec{r}) = z \cdot \vec{e}_z \tag{2.25}$$

Il est dessiné dans la Fig.14. Evidement que, dans la base cartésienne, sa décomposition est de la forme:

$$\vec{w}(\vec{r}) = 0 \cdot \vec{e}_x + 0 \cdot \vec{e}_y + z \cdot \vec{e}_z \equiv \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ z \end{pmatrix} \tag{2.26}$$

Ses décompositions dans les bases mobiles des coordonnées sphériques et cylindriques sont données dans les figures 15-17.

3 Intégrales dans R^2 et R^3. Théorème de Fubini. Exemples des calculs.

3.1. INTÉGRALES DANS R^2.

Soit $f(x,y) \equiv f(\vec{\rho})$ une fonction de 2 variables ($\vec{\rho} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$).

L'intégrale I sur le domaine D dans le plan bidimensionnel, Fig.18, est définie comme la limite de la somme de Darboux correspondante :

$$I = \int_D d^2\rho f(\vec{\rho}) = \lim_{N\to\infty} \sum_{i=1}^{N} ds_i \cdot f(\vec{\rho}_i) \tag{3.1}$$

où

$$d^2\rho = ds = dxdy \tag{3.2}$$

est l'aire d'un élément dans D, <u>"l'aire élémentaire"</u>, ou <u>la mésure d'intégration</u> dans l'intégrale bidimensionnelle, dans les coordonnées cartésiennes, Fig.18.

<u>Théorème de Fubini.</u>

L'intégrale sur D (domaine bidimensionnel) de $f(x,y)$, une fonction de deux variables, est égale à l'intégrale double, sur y d'abord et sur x après, ou inversement. La valeur de l'intégrale ne change pas sous le changement de l'ordre d'intégration :

$$\int_D d^2\rho\, f(\vec{\rho}) \equiv \int_D dx\, dy\, f(x,y) = \int dx \int dy\, f(x,y) = \int dy \int dx\, f(x,y) \tag{3.3}$$

L'idée de la démonstration est simple. L'intégrale double, où on intègre sur y d'abord et sur x après, correspond à la sommation, dans la somme de Darboux (3.1), d'abord sur des petits rectangles appartenant à des colonnes et ensuite on somme les colonnes (les résultats des sommations dans les colonnes), Fig.18.

Inversement, on sommes d'abord les petits rectangles appartenant à des lignes, dans la Fig.18. Et ensuites on additionne les lignes (les résultats de sommation dans les lignes).

Evidement que la somme totale dans (3.1) restera la même, indépendament comment on organise la sommation.

Exemple 1.

Soit

$$f(\vec{\rho}) \equiv f(x,y) = x + y \tag{3.4}$$

et D est un rectangle :

$$D : 0 < x < a, \quad 0 < y < b \tag{3.5}$$

– Fig 19.

Dans le 1er calcul, où on somme sur y d'abord et sur x après, on le poursuit comme suit :

1)

$$I = \int_D d^2\rho\, f(\vec{\rho}) = \int_D dx\, dy\, f(x,y) \tag{3.6}$$

par le théorème de Fubini :

$$= \int_0^a dx \int_0^b dy\, f(x,y) = \int_0^a dx \int_0^b dy\, (x+y) \tag{3.7}$$

dans la première intégrale, quand on intègre sur y, x est considéré comme une constante :

$$= \int_0^a dx(xy + \frac{y^2}{2})|_0^b = \int_0^a dx(xb + \frac{b^2}{2}) \tag{3.8}$$

et ensuite on intègre sur x, le résultat d'intégration sur y

$$= \frac{x^2}{2} b|_0^a + \frac{b^2}{2} x|_0^a = \frac{a^2 b}{2} + \frac{ab^2}{2} = \frac{ab \cdot (a+b)}{2} \tag{3.9}$$

$$I = \frac{ab \cdot (a+b)}{2} \tag{3.10}$$

Dans le 2ème calcul, on somme d'abord sur x et sur y après :

2)

$$I = \int_D dx\, dy\, f(x,y) = \int_0^b dy \int_0^a dx \cdot (x+y) \tag{3.11}$$

Pendant la 1ère intégration, sur x, y est considéré comme une constante :

$$= \int_0^b dy(\frac{x^2}{2} + x \cdot y)|_0^a = \int_0^b dy(\frac{a^2}{2} + ay) \tag{3.12}$$

Ensuite on intègre sur y :

$$\frac{a^2}{2} \cdot y|_0^b + a\frac{y^2}{2}|_0^b = \frac{a^2 b}{2} + \frac{ab^2}{2} = \frac{ab(a+b)}{2} \tag{3.13}$$

On trouve le même résultat, en accord avec la théorème de Fubini.

Exemple 2.

$f(x, y) = x + y$; D est un triangle, Fig.20.

1)

$$I = \int_D d^2\rho\, f(\vec{\rho}) = \int_D dx\, dy\, f(x, y) \tag{3.14}$$

par le théorème de Fubini

$$= \int_0^a dx \int_0^{y(x)} dy\, f(x, y) \tag{3.15}$$

Dans l'intégrale à l'interieur, sur y, avec x fixe quelconque entre 0 et a, on intègre sur y de 0 à $y(x) = \frac{b}{a}x$, une valeur maximale de y qui se trouve sur le bord de D, quand on traverse le domaine D dans le sens vertical. Cette limite superieur dépond de x, elle est différente pour de valeurs de x différentes. C'est à dire, la limite superieure de y n'est pas une constante (comme c'était le cas dans l'exemple 1). Elle est une fonction de x. Cette fonction correspond à l'équation de la ligne qui délimite le domaine D. Dans cet exemple, cette ligne est une droite, de l'équation $y = \frac{b}{a}x$, Fig.20.

La suite du calcul dans (3.15), en y mettant les forme explicites de $y(x)$ et de $f(x+y)$:

$$\begin{aligned}
I &= \int_0^a dx \int_0^{\frac{b}{a}x} dy(x+y) = \int_0^a dx(x \cdot y + \frac{y^2}{2})|_0^{\frac{b}{a}x} \\
&= \int_0^a dx(x \cdot \frac{b}{a}x + \frac{1}{2}(\frac{b}{a}x)^2) = \int_0^a dx(\frac{b}{a}x^2 + \frac{b^2}{2a^2}x^2) \\
&= (\frac{b}{a} + \frac{b^2}{2a^2}) \int_0^a dx\, x^2 = \frac{2ab + b^2}{2a^2} \cdot \frac{x^3}{3}|_0^a \\
&= \frac{2ab + b^2}{2a^2} \cdot \frac{a^3}{3} = \frac{ab \cdot (2a+b)}{6}
\end{aligned}$$

$$I = \frac{ab \cdot (2a+b)}{6} \tag{3.16}$$

2) Il est proposé, en exercice, de réfaire le calcul de cette intégrale en arrangeant les intégrations dans l'intégrale double différemment : en intégrant sur x d'abord, et sur y

après. Le debut du calcul est comme suit :

$$I = \int_0^b dy \int_{x(y)}^a dx\, f(x,y) \tag{3.17}$$

– Fig.21, $x(y) = \frac{a}{b} \cdot y$. Cette fois ci c'est la limite inferieure de x qui une fonction de y. En faisant la suite du calcul on doit trouver le même résultat qu'auparavant, (3.16).

Exemple 3.

L'aire d'un disque, Fig.22. Dans ce cas, où on cherche à déterminer l'aire d'un domaine, on doit mettre $f(x,y) = 1$.

Tout d'abord, due à la symétrie du domaine, Fig.22, il souffit d'intégrer sur 1/4 du disque, Fig.23. Evidement, en intégrant sur le domaine réduit, Fig.23, on trouvera 1/4 de l'aire du disque total, Fig.22.

Même si cette réduction du domaine n'est pas indisponsable, les limites d'intégration, dans l'intégrale double, vont être plus simples pour $\frac{1}{4}$ du disque, par rapport au disque total.

Notons par I l'aire total du disque. Alors

$$\frac{I}{4} = \int_{D'} dx\, dy \cdot 1 = \int_0^R dx \int_0^{y(x)} dy$$

$$= \int_0^R dx \int_0^{\sqrt{R^2-x^2}} dy = \int_0^R dx (y)|_0^{\sqrt{R^2-x^2}} = \int_0^R dx \sqrt{R^2 - x^2} \tag{3.18}$$

Nous avons choisi d'intégrer, dans l'intégrale double, sur y d'abord, sur x après, comme il est indiqué dans la Fig.23.

Il est utile de changer la variable d'intégration, dans (3.18). Mettons

$$x = R \cdot \sin\phi \tag{3.19}$$

Alors

$$dx = R \cdot \cos\phi \cdot d\phi$$

$$\sqrt{R^2 - x^2} = \sqrt{R^2 - R^2 \sin^2\phi} = R\sqrt{1 - \sin^2\phi} = R \cdot \cos\phi \tag{3.20}$$

Pour les limites d'intégration :

$$\text{quand } x \text{ varie de } 0 \text{ à } R$$
$$\phi \text{ doit varier de } 0 \text{ à } \frac{\pi}{2} \tag{3.21}$$

– d'après (3.19) et la courbe de $\sin\phi$.

Pour (3.18), avec les substitutions ci-dessus, on trouve:

$$\int_0^R dx\sqrt{R^2-x^2} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} R\cos\phi\, d\phi \cdot R\cos\phi$$
$$= R^2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2\phi \cdot d\phi = R^2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{2}(1+\cos 2\phi)d\phi$$
$$= \frac{r^2}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\phi + \frac{R^2}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\phi\cdot\cos 2\phi$$
$$= \frac{R^2}{2}\cdot\frac{\pi}{2} + \frac{R^2}{2}\cdot(\frac{1}{2}\sin 2\phi)|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi R^2}{4} \tag{3.22}$$

Nous avons trouver que $I/4 = \pi R^2/4$. Donc :

$$I = \pi R^2 \tag{3.23}$$

– l'aire du disque.

<u>Exemple 3'.</u>

Faisons le calcul de l'aire du disque dans la Fig.22 en utilisant les coordonnées polaires. Cette fois ci, il n'y aura pas des raisons de couper le disque sur 4, les limites d'intégration, avec les coordonnées polaires, vont être aussi simples pour le disque total que pour un quart du disque.

Avec les coordonnées polaires, pour le disque entier, Fig.24, le calcul se fait comme suit ($f(\vec{\rho})$ est toujours égale à 1) :

$$I = \int_D d^2\rho\cdot 1 = \int_D \rho d\rho\, d\phi \tag{3.24}$$

Rappelons que, dans les coordonnées polaires $d^2\rho = \rho d\rho\, d\phi$. On trouve :

$$= \int_0^R \rho d\rho \int_0^{2\pi} d\phi = \left(\frac{\rho^2}{2}\right)|_0^R\cdot(\phi)|_0^{2\pi}$$
$$= \frac{R^2}{2}\cdot 2\pi = \pi R^2$$
$$I = \pi R^2 \tag{3.25}$$

– en accord avec le résultat du calcul en coordonnées cartesiennes, Exemple 3, éq.(3.23).

Observons que l'utilité des coordonnées polaires, pour la géométrie circulaire du domaine D, est dans le fait que les limites d'intégration, sur ρ et sur ϕ, sont constantes : $0 \to R$ pour ρ, $0 \to 2\pi$ pour ϕ, quand on fait "scanner" le disque entier en variant ρ et ϕ, tandis qu'elles sont variable $0 \to y(x)$, pour y, dans les coordonnées cartesiennes, Fig.23. Par contre, dans les coordonnées cartesiennes, les limites d'intégration sont constantes dans l'Exemple 1, pour D rectangulaire.

Exercice.

Il est suggeré, en exercice, de calculer l'aire de l'ellipse, Fig.25, en utilisant les coordonnées cartesiennes.

Similaire au calcul pour le disque, il est plus simple de faire le calcul pour 1/4 de l'ellipse, Fig.26.

Le calcul commence comme suit :

$$\frac{I}{4} = \int_{D'} dx\, dy \cdot 1 = \int_0^a dx \int_0^{b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}} dy$$
$$= \int_0^a dx \cdot b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}} \tag{3.26}$$

Faudra changer la variable d'intégration :

$$x = a \cdot \sin\phi \tag{3.27}$$

et faire la suite du calcul. Finalement, on devera trouver que:

$$I = \pi ab \tag{3.28}$$

Evidement, qu'on devera trouver le même résultat en faisant les integrations avec l'ordre de x, y echangé, en intégrant sur x d'abord et sur y après :

$$\frac{I}{4} = \int_{D'} dx\, dy \cdot 1 = \int_0^b dy \int_0^{x(y)} dx \tag{3.29}$$

Dans ce cas

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \to x(y) = a\sqrt{1-\frac{y^2}{b^2}} \tag{3.30}$$

et en faisant le calcul on devera retrouver $\pi ab/4$.

3.2. INTÉGRALES DANS R^3.

Soit $f(x,y,z) \equiv f(\vec{r})$ une fonction de 3 variables,

$$\vec{r} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \tag{3.31}$$

L'intégrale I sur le domaine D dans l'espace tridimensionnel, Fig.27, est définie comme la limite de la somme de Darboux correspondante :

$$I = \int_D d^3r\, f(\vec{r}) = \lim_{N\to\infty} \sum_{i=1}^{N} dV_i\, f(\vec{r}_i) \tag{3.32}$$

où

$$d^3r = dV = dx\, dy\, dz \tag{3.33}$$

est le volume d'un élément dans D (petit cuboïde) : ”le volume élémentaire”, ou la mésure d'intégrarion dans l'intégrale tridimensionnelle, dans les coordonnées cartésiennes.

Le domaine D est supposé d'être coupé sur N petits cuboïdes, dont un est montré explicitement dans la Fig.27.

Théorème de Fubini.

L'intégrale sur D (domaine tridimensionnel) de $f(x,y,z)$, une fonction de trois variables, est égale à l'intégrale triple, où on intègre successivement sur z, puis sur y, puis sur x, ou dans un autre ordre. La valeur de l'intégrale ne change pas sous les changements de l'ordre d'intégration sur les trois variables, dans l'intégrale triple :

$$\int_D d^3r\, f(\vec{r}) \equiv \int_D dx\, dy\, dz\, f(x,y,z)$$
$$= \int dx \int dy \int dz\, f(x,y,z) = \int dy \int dz \int dx\, f(x,y,z) = ... \tag{3.34}$$

L'idée de la démonstration correspond à la généralisation directe de la démonstration dans le cas bidimensionnel, au debut du chapitre 3.1. Elle s'appuit sur les différentes façons à organiser la sommation dans la somme de Darboux (3.32) sur des petits cuboïdes, sur lesquels le domaine D, Fig.27, est supposé d'être coupé.

Exemple 1.

D est un cuboïde $a \times b \times c$, Fig.28, $f(x, y, z)$ est une fonction quelconque de trois variables. Dans ce cas, l'intégrale de $f(x, y, z)$ sur D prendra la forme :

$$I = \int_D d^3r\, f(x, y, z) = \int_D dx\, dy\, dz\, f(x, y, z) \tag{3.35}$$

par le théorème de Fubini :

$$= \int_0^a dx \int_0^b dy \int_0^c dz\, f(x, y, z) \tag{3.36}$$

où on intègre $f(x, y, z)$ sur z d'abord, pour x, y fixes ; ensuite, le resultat de la 1ère intégration, qui ne dépend que de x, y, on l'intègre sur y, en gardant x fixe ; et finalement on intègre sur x, le résultat de la 2ème intégration.

Observon que, pour la géometrie rectangulaire du domaine D et les coordonnées cartésienues, les limites d'intégration sur x, y, z dans (3.36) sont constantes.

Observons en plus que, si on prend, dans (3.35), (3.36), $f(x, y, z) = 1$, dans ce cas on calcule, par l'intégrale, le volume du D :

$$I = \int_0^a dx \int_0^b dy \int_0^c dz \cdot 1 \tag{3.37}$$

L'integrale se factorise, dans ce cas particulier, sur le produit de 3 intégrales unidimensionnelles : du fait que le résultat d'intégration sur z ne dépend pas de x, y, donc n'intervient pas dans le 2ème intégration, sur y, et de même pour la suite. On trouve :

$$I = x|_0^a x \times y|_0^b \times z|_0^c = abc \tag{3.38}$$

– le volume du cuboïde dans la Fig.28.

Exemple 2.

D est l'intérieur de la sphère, centré en 0 et de rayon R, Fig.29. Nous allons faire le calcul du volume de D ; par conséquence nous prenons $f(x, y, z) = 1$.

Dans les coordonnées cartesiennes, il est plus simple de calculer le volume de 1/8 de l'intérieur de la sphère, du domaine D' dans la Fig.30. Les limites d'intégrations vont être plus simples.

D'après la Fig.30, on trouve :

$$I = \int_{D'} d^3r = \int_{D'} dx\, dy\, dz = \int_0^R dx \int_0^{y(x)} dy \int_0^{z(x,y)} dz \tag{3.39}$$

Géométriquement, quand on intègre sur z dans la première intégrale dans (3.39), on fait sommer, dans la somme de Darboux correspondante, éq.(3.32), les long des colonnes verticales, le chemin l_z dans la Fig.30.

Ensuite, dans le 2ème intégrale de (3.39), on somme les colonnes (les résultats de sommation dans les colonnes) en faisons bouger le pied du colonne l_z le long du chemins l_y, dans le plans (x, y).

Le résultats de deux sommation, sur z et sur y, on peut les associer avec un plan (l_y, l_z), tracé dans l'espace à l'interieur du D', par la colonne l_z quand on la tire, par son pied, le long du chemin l_y.

Finalement, dans la 3ème intégration, sur x, on fait tirer le plan (l_y, l_z) (le résultat de sommation dans le plan) dans la direction x, de $x = 0$ à $x = R$.

De cette manière on établit les limites d'intégration dans l'intégrale (3.39), sur le domaine D', en consultant la Fig.30.

Mettons les fonction $z(x, y)$, $y(x)$, (définies dans la Fig.30) dans l'integrale (3.39). On trouve :

$$I = \int_0^R dx \int_0^{\sqrt{R^2-x^2}} dy \int_0^{\sqrt{R^2-x^2-y^2}} dz \tag{3.40}$$

Après l'intégration sur z on obtient :

$$I = \int_0^R dx \int_0^{\sqrt{R^2-x^2}} dy \sqrt{R^2 - x^2 - y^2} \tag{3.41}$$

Dans l'intégrale sur y, x est fixe. Nous changeons la variable d'intégration :

$$y = \sqrt{R^2 - x^2} \cdot \sin\phi \tag{3.42}$$

Alors

$$\sqrt{R^2 - x^2 - y^2} = \sqrt{R^2 - x^2} \cdot \sqrt{1 - \sin^2\phi} = \sqrt{R^2 - x^2} \cdot \cos\phi \tag{3.43}$$

$$dy = \sqrt{R^2 - x^2} \cdot \cos\phi \cdot d\phi \tag{3.44}$$

Les limites d'intégrations :

$$y = \sqrt{R^2 - x^2} \cdot \sin\phi$$
$$y \,:\, 0 \rightarrow \sqrt{R^2 - x^2}$$
$$\text{correspond à}\, \phi \,:\, 0 \rightarrow \frac{\pi}{2} \tag{3.45}$$

Avec ces changements, l'intégrale (3.41) prend la forme :

$$\begin{aligned} I &= \int_0^R dx \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{R^2 - x^2} \cos\phi \cdot d\phi \times \sqrt{R^2 - x^2} \cdot \cos\phi \\ &= \int_0^R dx (R^2 - x^2) \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\phi \cdot \cos^2\phi \end{aligned} \tag{3.46}$$

L'integrale sur ϕ se fait on observant que $\cos^2\phi = (1 + \cos 2\phi)/2$. On trouve

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\phi \cdot \cos^2\phi = \frac{\pi}{4} \tag{3.47}$$

Retournos à l'éq.(3.46) et la derniere intégration, sur x :

$$\begin{aligned} I &= \int_0^R dx (R^2 - x^2) \times \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4} (R^2 x - \frac{x^3}{3})|_0^R \\ &= \frac{\pi}{4} \cdot (R^3 - \frac{R^3}{3}) = \frac{2\pi R^3}{12} = \frac{\pi R^3}{6} \end{aligned} \tag{3.48}$$

Rappelons que l'intégrale I, éq.(3.39), représente 1/8 du volume de la sphère totale (voir les figures 29, 30). Finalement on trouve :

$$\text{Volume de l'intérieur de la sphère} = 8 \cdot \frac{\pi R^3}{6} = \frac{4\pi R^3}{3} \tag{3.49}$$

<u>exemple 2'.</u>

Nous allons confronter le calcul ci-dessus, quelque peu laborieux, en coordonnées cartesiennes, avec celui en coordonnées sphériques.

En sphériques, le calcul pour la sphère entière, Fig.29, est aussi facile que pour 1/8ème, Fig.30. Alors pour la sphère entiere, Fig.29, on trouve :

$$\begin{aligned} \text{Volume} &= \int_D d^3 r = \int_D r^2 \sin\Theta \, dr \, d\Theta \, d\phi \\ &= \int_0^R r^2 dr \int_0^\pi \sin\Theta \, d\Theta \int_0^{2\pi} d\phi \end{aligned} \tag{3.50}$$

Nous avons utilisé la mésure d'intégration (volume élémentaire) des coordonnées sphériques

$$d^3r = r^2 \sin\Theta \cdot dr\, d\Theta\, d\Phi \tag{3.51}$$

éq.(13.21), chapitre 2. En plus, par la définition des coordonnées sphériques, Fig.2, il est relativement facile à voir que, pour visiter chaque point à l'intérieur de la sphère, de rayon R, Fig.29, il faut faire varier les variables r, Θ, ϕ comme suit :

$$\begin{aligned} r &: 0 \to R \\ \Theta &: 0 \to \pi \\ \phi &: 0 \to 2\pi \end{aligned} \tag{3.52}$$

c'est qui explique les limites d'intégration dans l'intégrale triple (3.50)

La suite du calcul est simple, car les trois intègrations dans (3.50) se factorisent. On trouve:

$$\begin{aligned} \text{Volume} &= \left(\frac{r^3}{3}\right)\Big|_0^r \times (\cos\Theta)\big|_0^\pi \times \phi\,\big|_0^{2\pi} \\ &= \frac{R^3}{3} \times 2 \times 2\pi = \frac{4\pi R^3}{3} \end{aligned} \tag{3.53}$$

en accord avec (3.49), le résultat du calcul, de la même intégrale, mais en coordonnées cartésiennes.

Observons que le calcul ci-dessus, pour la sphère, en coordonnés sphériques est aussi simple, ou presque, que le calcul pour le cuboïde, Fig.28, en coordonnées curtesiennes, exemple 1. On trouve des limites d'intégration constantes et les intégrales triples qui factorisent sur des intégrations unidimensionnelles.

Exercice.

Déterminer le volume du domaine D dans la Fig.31, en calculant l'intégrale

$$\text{Volume} = \int_D d^3r \tag{3.54}$$

exprimée en coordonnées sphériques. D est défimité par le cône de l'angle de demi-ouverture α et par un chapeau sphérique, d'une sphère de rayon R.

$$\text{Réponse : Volume} = \frac{2\pi R^3}{3}(1 - cos\alpha) \tag{3.55}$$

4 Gradient d'une fonction scalaire.

Dans les coordonnées cartésiennes, par définition, le gradient de $f(\vec{r})$, $\vec{\text{grad}} f(\vec{r})$, est un vecteurs avec des composantes $(\partial_x f, \partial_y f, \partial_y f)$:

$$\vec{\text{grad}} f = \partial_x f \cdot \vec{e}_x + \partial_y f \cdot \vec{e}_y + \partial_z f \cdot \vec{e}_z = \begin{pmatrix} \partial_x f \\ \partial_y f \\ \partial_z f \end{pmatrix} \tag{4.1}$$

Nous utilisons les notations suivantes pour les dérivées partielles : $\partial_x f \equiv \frac{\partial f}{\partial x}$, etc. .

La définition du gradient plus générale, indépendante de système des coordonnées, est donnée par l'expression pour la différentielle de la fonction scalaire $f(\vec{r})$:

$$df(\vec{r}) = \vec{\text{grad}}\, f \cdot d\vec{r} \tag{4.2}$$

ou, autrement :

$$f(\vec{r} + d\vec{r}) - f(\vec{r}) \simeq \vec{\text{grad}} f(\vec{r}) \cdot d\vec{r} \tag{4.3}$$

Dans les éqs. (14.2), (14.3), leurs parties droites, figure le produit scalaire usuel entre les deux vecteurs, $\vec{\text{grad}} f$ et $d\vec{r}$.

L'éq.(14.2) doit être vue comme l'équation qui définie $\vec{\text{grad}} f$, dans le sens que, quand on écrit la différentielle df, exprimé en coordonnées quelconques, on la régarde et on prend les coefficients, qui figurent pret des composantes de $d\vec{r}$, comme les composantes du gradient de f.

Avec les coordonnées cartésiennes, pour $\vec{r}$, $f(\vec{r}) = f(x, y, z)$, la differentielle de f est de la forme usuelle, principale :

$$df(x, y, z) = \partial_x f \cdot dx + \partial_y f \cdot dy + \partial_z f \cdot dz \tag{4.4}$$

Dans les coordonnées cartésiennes, toujours,

$$d\vec{r} = \vec{e}_x dx + \vec{e}_y dy + \vec{e}_z dz = \begin{pmatrix} dx \\ dy \\ dz \end{pmatrix} \tag{4.5}$$

En écrivant le produit scalaire dans l'éq.(14.2) plus explicitement, en composantes :

$$df = (\text{grad}\, f)_x \cdot dx + (\text{grad}\, f)_y \cdot dy + (\text{grad}\, f)_x \cdot dx \tag{4.6}$$

(qui est, toujours, juste l'expression qui sert pour introduire, par définition, les composantes du gradient) et en comparant (14.6) avec la forme principale de df, éq.(14.4), on doit conclure que

$$(\mathrm{grad}\, f)_x = \partial_x f, \quad (\mathrm{grad}\, f)_y = \partial_y f, \quad (\mathrm{grad}\, f)_z = \partial_z f \tag{4.7}$$

en accord avec (14.1).

En utilisant la définition du gradient par l'éq.(14.2), il est relativement facile de trouver la forme du $\vec{\mathrm{grad}}\, f$ dans d'autres coordonnées.

Supposons, comme dans le chapitre 2, que $\vec{r}$ est exprimé en fonction de nouvelles coordonnées (u_1, u_2, u_3),

$$\vec{r} = \vec{r}(u_1, u_2, u_3) \tag{4.8}$$

Alors la différentielle de $\vec{r}$, c'est à dire un petit déplacement $d\vec{r}$ dans l'espace, qui est produit par des variations des nouvelles coordonnées, sera de la forme:

$$d\vec{r} = \frac{\partial \vec{r}}{\partial u_1} du_1 + \frac{\partial \vec{r}}{\partial u_2} du_2 + \frac{\partial \vec{r}}{\partial u_3} du_3 \tag{4.9}$$

D'après les définitions (13.6) des vecteurs de la base mobile des coordonnées u_1, u_2, u_3, l'éq.(14.9) pourrait être réecrite comme:

$$d\vec{r} = \vec{e}_1 \cdot du_1 + \vec{e}_2 \cdot du_2 + \vec{e}_3 \cdot du_3 \tag{4.10}$$

Observons que dans cette équation sont mis ensembles les trois variations de $\vec{r}$ dans l'éq.(2.23)

En introduisant la base normée, faites par des vecteurs dans l'éq.(13.17), on trouve :

$$d\vec{r} = \hat{\vec{e}}_1 e_1 du_1 + \hat{\vec{e}}_2 e_2 du_2 + \hat{\vec{e}}_3 e_3 du_3 \tag{4.11}$$

e_1, e_2, e_3, les normes des vecteurs $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$, $\vec{e}_3$, sont les facteurs géométriques des coordonnées u_1, u_2, u_3.

Observons ensuite que $\vec{\mathrm{grad}}\, f$ dans (14.2), écrit dans la nouvelle base $(\hat{\vec{e}}_1, \hat{\vec{e}}_2, \hat{\vec{e}}_3)$, est de la forme générale suivante :

$$\vec{\mathrm{grad}}\, f = (\mathrm{grad}\, f)\hat{\vec{e}}_1 + (\mathrm{grad}\, f)_2 \hat{\vec{e}}_2 + (\mathrm{grad}\, f)_3 \cdot \hat{\vec{e}}_3 \tag{4.12}$$

où les composantes $(\mathrm{grad}\, f)_1$, $(\mathrm{grad}\, f)_2$, $(\mathrm{grad}\, f)_3$ sont à déterminer

En écrivant explicitement, en composantes, le produit scalaire dans (14.2), pour les vecteurs (4.11) et (4.12), on trouve :

$$df = (\mathrm{grad}\, f)_1 \cdot e_1 du_1 + (\mathrm{grad}\, f)_2 \cdot e_2 du_2 + (\mathrm{grad}\, f)_3 \cdot e_3 du_3 \tag{4.13}$$

Cette expression pour df est à comparer avec la forme principale de df, la différentielle de $f(u_1, u_2, u_3)$, une fonction de ses trois variables :

$$df = \frac{\partial f}{\partial u_1} \cdot du_1 + \frac{\partial f}{\partial u_2} \cdot du_2 + \frac{\partial f}{\partial u_3} \cdot du_3 \tag{4.14}$$

En comparant (4.13) et(4.14), on détermine les composantes du gradient de f :

$$\begin{aligned}
(\mathrm{grad})_1 e_1 &= \frac{\partial f}{\partial u_1} \rightarrow (\mathrm{grad}\, f)_1 = \frac{1}{e_1}\frac{\partial f}{\partial u_1} \\
(\mathrm{grad})_2 e_2 &= \frac{\partial f}{\partial u_2} \rightarrow (\mathrm{grad}\, f)_2 = \frac{1}{e_2}\frac{\partial f}{\partial u_2} \\
(\mathrm{grad})_3 e_3 &= \frac{\partial f}{\partial u_3} \rightarrow (\mathrm{grad}\, f)_3 = \frac{1}{e_3}\frac{\partial f}{\partial u_3}
\end{aligned} \tag{4.15}$$

[Dans (4.13), (4.14), les coefficients prêt des du_1, du_2, du_3, qui sont des variations petites mais arbitraires, ces coefficients doivent être égales].

En résumant, on trouve que, dans les coordonnées u_1, u_2, u_3, le gradient de f est de la forme :

$$\begin{aligned}
g\vec{rad}\, f &= \hat{\vec{e}}_1 \cdot \frac{1}{e_1}\frac{\partial f}{\partial u_1} + \hat{\vec{e}}_2 \cdot \frac{1}{e_2}\frac{\partial f}{\partial u_2} + \hat{\vec{e}}_3 \cdot \frac{1}{e_3}\frac{\partial f}{\partial u_3} \\
&= \begin{pmatrix} \frac{1}{e_1}\frac{\partial f}{\partial u_1} \\ \frac{1}{e_2}\frac{\partial f}{\partial u_2} \\ \frac{1}{e_3}\frac{\partial f}{\partial u_3} \end{pmatrix}
\end{aligned} \tag{4.16}$$

Dans les coordonnées sphériques, avec $e_1 = e_r = 1$, $e_2 = e_\Theta = r$, $e_3 = e_\Phi = r \cdot \sin\Theta$, éqs.(13.18), on trouve :

$$\begin{aligned}
g\vec{rad}\, f &= \hat{\vec{e}}_r \cdot \frac{\partial f}{\partial r} + \hat{\vec{e}}_\Theta \cdot \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial f}{\partial \Theta} + \hat{\vec{e}}_\phi \cdot \frac{1}{r \sin\Theta}\frac{\partial f}{\partial \phi} \\
&= \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial r} \\ \frac{1}{r}\frac{\partial f}{\partial \Theta} \\ \frac{1}{r\sin\Theta} \cdot \frac{\partial f}{\partial \phi} \end{pmatrix}
\end{aligned} \tag{4.17}$$

Dans les coordonnées cylindriques ($e_1 = e_\rho = 1$, $e_2 = e_\phi = \rho$, $e_3 = e_z = 1$), le gradient prendra la forme :

$$\begin{aligned} \vec{grad}\, f &= \hat{\vec{e}}_\rho \cdot \frac{\partial f}{\partial \rho} + \hat{\vec{e}}_\phi \cdot \frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial f}{\partial \phi} + \hat{\vec{e}}_z \cdot \frac{\partial f}{\partial z} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial \rho} \\ \frac{1}{\rho}\frac{\partial f}{\partial \phi} \\ \frac{\partial f}{\partial z} \end{pmatrix} \end{aligned} \tag{4.18}$$

Dans les coordonnées polaires, dans l'espace bidimensionnel, $e_1 = e_\rho = 1$, $e_2 = e_\phi = \rho$, le gradient est un vecteur à deux composantes :

$$\begin{aligned} \vec{grad}\, f(\rho, \phi) &= \hat{\vec{e}}_\rho \cdot \frac{\partial f}{\partial \rho} + \hat{\vec{e}}_\phi \cdot \frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial f}{\partial \phi} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial \rho} \\ \frac{1}{\rho}\frac{\partial f}{\partial \Phi} \end{pmatrix} \end{aligned} \tag{4.19}$$

<u>Remarque.</u>

Dans le cas des coordonnées cartésiennes (et seulement pour ces coordonnées) on utilise souvant la notation suivante pour le gradient :

$$\vec{grad}\, f = \vec{\nabla} f \tag{4.20}$$

où l'opérateur différentiel <u>nabla</u> $\vec{\nabla}$, qui figure dans (4.20), est un vecteur avec les composantes :

$$\vec{\nabla} = \begin{pmatrix} \partial_x \\ \partial_y \\ \partial_z \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix} \tag{4.21}$$

de telle façon que :

$$\vec{\nabla} f = \begin{pmatrix} \partial_x \\ \partial_y \\ \partial_z \end{pmatrix} f = \begin{pmatrix} \partial_x f \\ \partial_y f \\ \partial_z f \end{pmatrix} \tag{4.22}$$

– comp. l'éq.(14.1).

L'utilisation de l'opérateur $\vec{\nabla}$ simplifie souvant les équations. Mais il ne faut pas lui généraliser trop, la définition de l'opérateur $\vec{\nabla}$ est limite à des coordonnées cartesiennes.

Exercices.

En faisant les calculs dans les coordonnées cartesiennes, démontrer les résultats suivants :

1)

$$\vec{\nabla} r = \frac{\vec{r}}{r} \tag{4.23}$$

2)

$$-\vec{\nabla}\frac{1}{r} = \frac{\vec{r}}{r^3} \tag{4.24}$$

3)

$$-\vec{\nabla}\frac{1}{a^2+r^2} = \frac{2\vec{r}}{(a^2+r^2)^2} \tag{4.25}$$

4)

$$-\vec{\nabla}\frac{(\vec{p}\cdot\vec{r})}{r^3} = \frac{3(\vec{p}\cdot\vec{r})\vec{r}-r^2\vec{p}}{r^5} \tag{4.26}$$

Les résultats dans 2) et 4) correspondent à un champ électrique $\vec{E}(\vec{r})$ créé, respectivement, par une charge $q = 4\pi$ placée à l'origine et par un petit dipôle électrique $\vec{p}$, placé également à l'origine (à côte de l'origine, plus précisement, voir l'exercice 6 plus loin).

5) Retrouver les résultat dans (4.23) – (4.26) en faisant les calcul dans les coordonnées sphériques. C'est à dire, démontrer que:

$$\vec{grad}\, r = \frac{\vec{r}}{r} \tag{4.27}$$

$$-\vec{grad}\frac{1}{r} = \frac{\vec{r}}{r^3} \tag{4.28}$$

$$-\vec{grad}\frac{1}{a^2+r^2} = \frac{2\vec{r}}{(a^2+r^2)^2} \tag{4.29}$$

$$-\vec{grad}\frac{(\vec{p}\cdot\vec{r})}{r^3} = \frac{3(\vec{p}\cdot\vec{r})\vec{r}-r^2\vec{p}}{r^5} \tag{4.30}$$

en utilisant l'expression pour $\vec{grad}\, f$ dans les coordonnées sphériques, éq.(4.17).

6) Pour justifier la formule (1.9) pour le potentiel électrique d'un dipôle, démontrer le développement limité suivant :

$$\frac{q}{|\vec{r}\pm\frac{\vec{a}}{2}|} = \frac{q}{r} \mp \frac{q(\vec{a}\cdot\vec{r})}{2r^3} + O\left(\frac{1}{r}\left(\frac{a}{r}\right)^2\right) \tag{4.31}$$

qui est utile dans la limite $|\vec{a}| \ll |\vec{r}|$.

Avec le résultat dans (4.31), on trouve :

$$\frac{q}{|\vec{r} - \frac{\vec{a}}{2}|} - \frac{q}{|\vec{r} + \frac{\vec{a}}{2}|} = \frac{q(\vec{a} \cdot \vec{r})}{r^3} + O\left(\frac{q}{r}\left(\frac{a}{r}\right)^2\right) \tag{4.32}$$

et alors, dans la limite de $|\vec{a}| \equiv a$ tout petit par rapport à $|\vec{r}| \equiv r$, on retrouve le potentiel (1.9) avec

$$\vec{p} = q \cdot \vec{a} \tag{4.33}$$

4.1. Dérivée dans la direction $\vec{n}$.

Définition. La dérivée de $f(\vec{r})$ dans la direction $\vec{n}$, où $\vec{n}$ est un vecteur unitaire ($|\vec{n}| = 1$) quelconque, est définie comme suit :

$$\partial_{\vec{n}} f(\vec{r}) = \lim_{\epsilon \to 0^+} \frac{f(\vec{r} + \epsilon\vec{n}) - f(\vec{r})}{\epsilon} \tag{4.34}$$

– Fig.32.

Alors, nous avons le résultat suivant :

Propriété 1 du gradient.

Le produit scalaire de $\vec{grad}\, f(\vec{r})$ avec un vecteur unitaire $\vec{n}$ quelconque est égale à la dérivée de $f(\vec{r})$ dans la direction $\vec{n}$:

$$(\vec{n} \cdot \vec{grad}\, f) = \partial_{\vec{n}} f(\vec{r}) \tag{4.35}$$

où $\partial_{\vec{n}} f$ est définie par l'éq.(4.34) ci-dessus.

Démonstration.

$f(\vec{r}+\epsilon\vec{n})$, qui figure dans la partie droite de l'éq.(4.34), se développe comme suit (par la définition du gradient, éq.(4.2), (4.3)) :

$$f(\vec{r} + \epsilon\vec{n}) \simeq f(\vec{r}) + \epsilon\vec{n} \cdot \vec{grad}\, f \tag{4.36}$$

– pour ϵ petit. Alors, pour la limite dans (4.35) on trouve :

$$\lim_{\epsilon \to 0^+} \frac{f(\vec{r} + \epsilon\vec{n}) - f(\vec{r})}{\epsilon} = \vec{n} \cdot \vec{grad}\, f \tag{4.37}$$

qui signifie que $\partial_{\vec{n}} f = \vec{n} \cdot \vec{grad}\, f$.

Sur cette propriété est basée la deuxième propriété du gradient :

Propriété 2 du gradient.

Le gradient $\vec{grad}\, f(\vec{r})$, considéré comme un vecteur qui est attaché à au point $\vec{r}$, est orthogonal à la surface $S_{\vec{r}}$ des valeurs constantes de $f(\vec{r})$, surface de niveau de $f(\vec{r})$, qui passe par ce même point $\vec{r}$, Fig.33.

Démonstration. Supposons que $\vec{m}(\vec{r})$ est un vecteur qui est également attaché au point $\vec{r}$, tout comme $\vec{grad}\, f(\vec{r})$, et qui est tangent à la surface de niveau $S_{\vec{r}}$, Fig.33. Alors, comme $f(\vec{r})$ ne varie pas le long de cette surface, on doit avoir:

$$\partial_{\vec{m}} f(\vec{r}) = 0 \tag{4.38}$$

Mais alors, par l'éq.(4.35), 1ère propriété du gradient,

$$(\vec{m} \cdot \vec{grad}\, f(\vec{r})) = 0 \tag{4.39}$$

Car $\vec{m}$ est un vecteur arbitraire, qui est tangent à la surface $S_{\vec{r}}$ au point $\vec{r}$, Fig.33, l'équation (4.39) signifie que $\vec{grad}\, f(\vec{r})$ est orthogonale à $S_{\vec{r}}$.

Remarque 1. La surface de niveau $S_{\vec{r}}$ de $f(\vec{r})$ est appelée également surface équipotentielle, dans le cas où $f(\vec{r})$ est un potentiel électrique, $f(\vec{r}) = U(\vec{r})$.

Remarque 2, exemples.

On pourrait facilement vérifier/constanter l'orthogonalité du $\vec{grad}\, f(\vec{r})$ à la surface des valeurs constantes de $f(\vec{r})$, la surface $S_{\vec{r}}$, sur des exemples des fonctions et de leurs gradients dans les exercices 1) - 3), éqs.(4.23) - (4.25). Mais il sera moins facile de la vérifier directement dans le cas du potentiel d'un dipôle, exercice 4), éq.(4.26).

4.2. COMPLEMENT. Développement limité des fonctions de plusieurs variables.

1. Rappel. Fonction d'une variable.

$$f(x) = f(x_0) + (x - x_0)f'(x_0) + \frac{(x - x_0)^2}{2}f''(x_0) + \frac{(x - x_0)^3}{3!}f'''(x_0) + ... \tag{4.40}$$

— série de Taylor.

Une autre forme de ce même développement :

$$f(x) = f(x_0 + (x - x_0)) = \{x - x_0 = b\} = f(x_0 + b) \tag{4.41}$$

Alors (4.40) pourrait être reécrit comme suit :

$$f(x_0 + b) = f(x_0) + bf'(x_0) + \frac{b^2}{2}f''(x_0) + \frac{b^3}{3!}f'''(x_0) + ... \tag{4.42}$$

On peut finalement remplacer $x_0 \to x$ dans (4.42) :

$$f(x + b) = f(x) + bf'(x) + \frac{b^2}{2}f''(x) + \frac{b^3}{3!}f'''(x) + ... \tag{4.43}$$

Remarque - précision : dans (1) on développe autour de x_0, en puissance de $(x - x_0)$. Dans (4.43) on développe autour de x, en puissance de b, déplacement de x dans $f(x+b)$. Sinon (4.40) et (4.43) sont équivalants.

Liste de base de développements des fonctions classiques.

1)

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3!} + ... = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \tag{4.44}$$

2)

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + ... \tag{4.45}$$

3)

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!} - ... \tag{4.46}$$

4)

$$\sinh x = x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + ... \tag{4.47}$$

5)

$$\cosh x = 1 + \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!} + ... \tag{4.48}$$

6)

$$\log(1 + x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + ... = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} \tag{4.49}$$

7)

$$(1 + x)^\gamma = 1 + \gamma \cdot x + \frac{\gamma(\gamma - 1)}{2} x^2 + \frac{\gamma(\gamma - 1)(\gamma - 2)}{3!} x^3 + ... \tag{4.50}$$

8)

$$\frac{1}{1 + x} = 1 - x + x^2 - x^3 + x^4 - ... \tag{4.51}$$

Dans 1) - 8) les fonctions sont développée autour de $x_0 = 0$.

À titre <u>d'exercice</u>, retrouver les développements 1) - 8), en faisant les calculs par la série de Taylor (4.40).

<u>Exemple d'application directe de la liste 1) - 8).</u>

$$\frac{1}{\sqrt{1 + x}} = (1 + x)^{-\frac{1}{2}} = 1 - \frac{1}{2} x + \frac{(-\frac{1}{2})(-\frac{3}{2})}{2} x^2 + ... = 1 - \frac{x}{2} + \frac{3}{8} x^2 + ... \tag{4.52}$$

On peut se servir de la liste 1) - 8) également pour développer d'autres fonctions.

<u>Exemple.</u>

$$\frac{1}{1 + x^2} = 1 - x^2 + x^4 - ... \tag{4.53}$$

Dans ce développement x^2 a été pris comme une nouvelle variable, $u = x^2$. Ensuite la fonction $1/(1 + u)$ a été développée par l'éq. 8), dans la liste 1) - 8), et finalement u, dans la série, a été remplacé par x^2.

Le plus souvent, dans les calculs actuels, on manipule par d'une expression particulière de x comme par une nouvelle variable, sans explicitement la mentionner, sans la noter explicitement. – Comme nous avons le fait dans le développement ci-dessus.

On peut se servir de la liste 1) - 8) pour développer autour d'un autre point que 0.

Exemples

1)

$$f(x) = \frac{1}{1+x}, \tag{4.54}$$

à développer autour de $x_0 = 1$, c'est à dire, en puissance de $x - x_0 = x - 1$.

$$\frac{1}{1+x} = \frac{1}{2+(x-1)} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1+\frac{x-1}{2}} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1+u}$$

$$= \frac{1}{2}(1 - u + u^2 - ...) = \frac{1}{2}(1 - \frac{x-1}{2} + (\frac{x-1}{2})^2 + ...)$$

$$= \frac{1}{2}(1 - \frac{x-1}{2} + \frac{(x-1)^2}{4} + ...) = \frac{1}{2} - \frac{1}{4}(x-1) + \frac{1}{8}(x-1)^2 + ... \tag{4.55}$$

2)

$$e^x, \quad x_0 = 2 \tag{4.56}$$

$$e^x = e^{2+(x-2)} = e^2 \cdot e^{x-2} = e^2(1 + (x-2) + \frac{(x-2)^2}{2} + ...) \tag{4.57}$$

3)

$$\log(1+x), \quad x_0 = 3 \tag{4.58}$$

$$\log(1+x) = \log(4 + (x-3)) = \log(4 \cdot (1 + \frac{x-3}{4})) = \log 4 + \log(1 + \frac{x-3}{4})$$

$$= \log 4 + \frac{x-3}{4} - \frac{1}{2}\left(\frac{x-3}{4}\right)^2 + ... = \log 4 + \frac{1}{4}(x-3) - \frac{1}{32}(x-3)^2 + ... \tag{4.59}$$

2. Fouction de 3 variables, $f(x, y, z)$.

La série de Taylor (4.40) se généralise comme suit :

$$f(x,y,z) = f(x_0, y_0, z_0)$$

$$+(x-x_0)\partial_x f(x_0,y_0,z_0) + (y-y_0)\partial_y f(x_0,y_0,z_0) + (z-z_0)\partial_z f(x_0,y_0,z_0)$$

$$+\frac{(x-x_0)^2}{2}\partial_x^2 f(...) + \frac{(y-y_0)^2}{2}\partial_y^2 f(...) + \frac{(z-z_0)^2}{2}\partial_z^2 f(...)$$

$$+(x-x_0)(y-y_0)\partial_x\partial_y f(...) + (y-y_0)(z-z_0)\partial_y\partial_z f(...)$$

$$+(x-x_0)(z-z_0)\partial_x\partial_z f(...) + ... \tag{4.60}$$

Le développement en série de Taylor dans la forme (4.43) se généralise comme suit :

$$f(x+b_x, y+b_y, z+b_z) = f(x,y,z) + b_x\partial_x f(x,y,z) + b_y\partial_y f(x,y,z) + b_z\partial_z f(x,y,z)$$
$$+\frac{(b_x)^2}{2}\partial_x^2 f(...) + \frac{(b_y)^2}{2}\partial_y^2 f(...) + \frac{(b_z)^2}{2}\partial_z^2 f(...)$$
$$+b_x b_y \partial_x\partial_y f(...) + b_y b_z \partial_y\partial_z f(...) + b_x b_z \partial_x\partial_z f(...) + ... \quad (4.61)$$

Dans la forme plus compacte le développement (4.61) s'écrit comme suit :

$$f(\vec{r}+\vec{b}) = f(\vec{r}) + \sum_{i=1}^{3} b_i\partial_i f(\vec{r}) + \frac{1}{2!}\sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3} b_i b_j \partial_i\partial_j f(\vec{r}) + ... \quad (4.62)$$

Ci-dessus, $b_1 = b_x,\ b_2 = b_y,\ b_3 = b_z,\ \partial_1 f = \partial_x f,\ \partial_2 f = \partial_y f,\ \partial_3 f = \partial_z f.$

Si on se limite, dans (4.62), que par la première correction, alors on trouve:

$$f(\vec{r}+\vec{b}) \simeq f(\vec{r}) + \vec{b}\cdot \vec{grad} f(\vec{r}) \quad (4.63)$$

$$\vec{b} = \begin{pmatrix} b_x \\ b_y \\ b_z \end{pmatrix}, \quad \vec{grad} f = \begin{pmatrix} \partial_x f \\ \partial_y f \\ \partial_z f \end{pmatrix} \quad (4.64)$$

<u>Application. Potentiel d'un petit dipôle.</u>

Utilisons le développement (4.63) pour

$$f(\vec{r}) = \frac{1}{r}, \quad r = |\vec{r}| = \sqrt{x^2+y^2+z^2} \quad (4.65)$$

On trouve :

$$f(\vec{r}+\vec{b}) = \frac{1}{|\vec{r}+\vec{b}|} \simeq \frac{1}{|\vec{r}|} + \vec{b}\cdot\vec{grad}\frac{1}{r} \quad (4.66)$$

Rappel : $\vec{grad}\frac{1}{r} = -\frac{\vec{r}}{r^3}$, l'un des exercices du chapitre sur le gradient.

$$\frac{1}{|r+\vec{b}|} \simeq \frac{1}{r} + \vec{b}\cdot(-\frac{\vec{r}}{r^3}) = \frac{1}{r} - \vec{b}\cdot\frac{\vec{r}}{r^3} \quad (4.67)$$

$$\frac{1}{|\vec{r}+\vec{b}|} \simeq \frac{1}{r} - \vec{b}\cdot\frac{\vec{r}}{r^3} \quad (4.68)$$

Mettons $\vec{b} = \frac{\vec{a}}{2}$:

$$\frac{1}{|\vec{r}+\frac{\vec{a}}{2}|} \simeq \frac{1}{r} - \frac{\vec{a}\cdot\vec{r}}{2r^3} \quad (4.69)$$

Mettons ensuite $b = -\frac{\vec{a}}{2}$:

$$\frac{1}{|\vec{r} - \frac{\vec{a}}{2}|} \simeq \frac{1}{r} + \frac{\vec{a} \cdot \vec{r}}{2r^3} \tag{4.70}$$

Alors pour le potentiel $U(\vec{r})$, créées par des charges q et $-q$, mises à la distanee $\vec{a}$, on trouve :

$$U(\vec{r}) = \frac{q}{|\vec{r} - \frac{\vec{a}}{2}|} - \frac{q}{|\vec{r} + \frac{\vec{a}}{2}|} = q(\frac{1}{|\vec{r} - \frac{\vec{a}}{2}|} - \frac{1}{|\vec{r} + \frac{\vec{a}}{2}|}) \simeq q \cdot \frac{\vec{a} \cdot \vec{r}}{r^3} \tag{4.71}$$

$$U(\vec{r}) \simeq \frac{\vec{p} \cdot \vec{r}}{r^3}, \tag{4.72}$$

où

$$\vec{p} = q \cdot \vec{a} \tag{4.73}$$

Rémarque, une méthode de développement en plus.

Parfois, pour développer une fonction de plusieurs variables, il souffit, à nouveau, d'utiliser la liste 1) - 8), pour des fonctions d'une seule variable.

Exemple.

$f(x, y) = e^{x(1-y)}$, à développer, à l'ordre 2, autour de (0,0), c'est à dire à développer en puissances de x, y, jusque l'ordre 2. Il s'agit d'un exercice dans les sujets de TD, partie C.

Précisons que l'ordre 1 correspond aux termes $\sim x$, $\sim y$, dans le développement autour de $(0, 0)$. Que l'ordre 2 correspond aux termes $\sim x^2$, $\sim y^2$, $\sim xy$. Et etc. pour des ordres plus élevés.

Au lieu de passer par la série de Taylor, pour $f(x, y)$, fonction de deux variables :

$$f(x, y) = f(x_0, y_0) + (x - x_0)\partial_x f(x_0, y_0) + (y - y_0)\partial_y f(x_0, y_0)$$
$$+\frac{(x - x_0)^2}{2}\partial_x^2 f(x_0, y_0) + \frac{(y - y_0)^2}{2}\partial_y^2 f(x_0, y_0) + (x - x_0)(y - y_0)\partial_x\partial_y f(x_0, y_0) + .. \tag{4.74}$$

qui est toujours possible, il est plus simple d'utiliser le développement de l'exponentielle dans 1), de la liste 1) - 8), pour la variable $u = x(1 - y)$. On trouve :

$$f(x, y) = e^{x(1-y)} = e^u = 1 + u + \frac{u^2}{2} + ... = 1 + x(1 - y) + \frac{1}{2}(x(1 - y))^2 + ...$$
$$= 1 + x - xy + \frac{1}{2}x^2 + ... \tag{4.75}$$

Observons que les termes d'ordres plus élevés (ordres 3 et 4) ont été supprimés en passant d'avant dernières au dernières expression dans (36).

On peut vérifier qu'on trouve le même devéloppement en faisant le calcul par la série de Taylor (4.74), pour $x_0 = y_0 = 0$.

5 Divergence d'une fonction vectorielle. Théorème d'Ostrogradski.

Soit $\vec{A}(\vec{r})$ une fonction vectorielle, ou un champ de vecteurs, dans la terminologie d'un physicien. Dans les coordonnées cartésiennes, sa divergence, $\mathrm{div}\vec{A}(\vec{r})$, est définie par l'expression :

$$\mathrm{div}\vec{A}(\vec{r}) =^{\text{déf}} \vec{\nabla} \cdot \vec{A}(\vec{r}) = \partial_x A_x(\vec{r}) + \partial_y A_y(\vec{r}) + \partial_z A_z(\vec{r}) \tag{5.1}$$

Observons que l'expression à droite de cette équation rassemble un produit scalaire entre l'opérateur nabla $\vec{\nabla}$ et le champ des vecteurs $\vec{A}(\vec{r})$.

La signification physique de la divergence est liée à la notion d'un flux d'un champ des vecteurs à travers une surface :

$$F_S[\vec{A}] = \int_S (d\vec{s} \cdot \vec{A}(\vec{r})) \tag{5.2}$$

– Fig.34. Dans cette expression $d\vec{s}$ est un vecteur orienté dans la direction orthogonale à S et avec son module $|d\vec{s}|$ égale à l'aire d'un petite élément de surface qui est montré dans la figure. Dans cette figure est exposé un seul élément de la surface S, mais il faut imaginer que toute la surface est brisée en petits éléments similaires et, en calculant l'intégrale dans (5.2), on fait sommer sur l'ensemble de ces petits éléments, dans la limite où leur nombre tend vers l'infini (le surface S étant brisée en éléments de plus en plus petits). C'est à dire :

$$F_S[A] = \int_S d\vec{s} \cdot \vec{A}(\vec{r}) =^{\text{déf}} \lim_{N\to\infty} \sum_{i=1}^{N} d\vec{s}_i \cdot \vec{A}(\vec{r}_i) \tag{5.3}$$

La partie droite de cette équation est la somme de Darboux qui définit l'intégrale sur une surface S, l'intégrale à gauche dans (5.3). La Fig. 35 donne la définition géométrique plus détaillée de l'intégrale de surface dans (5.2), (5.3). Pour se familiariser avec des intégrales de surface, dans le COMPLEMENT de ce chapitre sont traités des calculs des flux à travers des surfaces, dans des 6 géometries simples.

Il n'est pas trop compliqué à démontrer que la divergence d'un champ $A(\vec{r})$ en un point $\vec{r}$ est proportionnelle à un flux du champ $\vec{A}$ à travers une petite surface fermée qui entoure le point $\vec{r}$, dans la limite où la taille de cette surface (et le volume de l'espace qu'elle entoure) tend vers zero, Fig.36. Le coefficient de proportionalité est le petit volume dV entouré par la surface :

$$dF_S \simeq \mathrm{div}\vec{A} \cdot dV \tag{5.4}$$

Nous avons noté ce flux comme dF_S, au lieu de F_S, pour souligner qu'il est tout petit, comme le volume dV. Sinon, dF_S se calcule par la même formule, celle dans l'éq.(5.2).

L'égalité approchée dans l'éq.(5.4) devient l'égalité dans la limite de $dV \to 0$. Par conséquence $dF_S \to 0$ également, mais leur rapport dF_S/dV reste fini et devient égale à la divergence, $\mathrm{div}\vec{A}(\vec{r})$.

La démonstration de l'éq.(5.4), c'est à dire l'emergence de $\mathrm{div}\vec{A}$ à partir de l'éq.(5.2) pour S fermée et toute petite, cette démonstration pourrait se faire de la manière plus simple en choisissant pour S, la surface qui entoure le point $\vec{r}$, Fig.36, la forme d'un cuboïde, Fig.37. Avec quelques arguments supplémentaires on pourrait se convaincre que le résultat de la limite (quand la taille de S tend vers zero) ne dépend pas de la forme particulière de S. D'autre part, avec S de la forme d'un cuboïde, la démonstration est plus rapide.

Dans la limite où le cuboïde devient tout petit, l'intégrale sur la surface dans l'éq.(5.2) pourrait être remplacée par la somme des flux approximatifs à travers des 6 côtés du cuboïde, $\vec{A}(\vec{r})$ étant choisi, pour sa valeur, au millieu de chaque côté, multiplié par l'aire de la facette Fig.37 (multiplier par le vecteur $d\vec{s}$, plus précisement).

Une remarque supplementaire est que, si $\vec{A}$ est orienté vers l'interieur du cuboïde, pour un côté particulier, alors sa contribution aura un signe négatif, comme résultat du produit scalaire ($d\vec{s} \cdot \vec{A}$) dans l'éq.(5.2): la convention habituelle étant, pour une surface fermée, que $d\vec{s}$ est orienté vers l'exterieur.

Avec ces observations on trouve l'expression suivante, Fig.37:

$$\begin{aligned} dF_S \simeq{}& A_x(\vec{r} + \frac{dx}{2}\vec{e}_x)dydz - A_x(\vec{r} - \frac{dx}{2}\vec{e}_x)dydz \\ &+ A_y(\vec{r} + \frac{dy}{2}\vec{e}_y)dxdz - A_y(\vec{r} - \frac{dy}{2}\vec{e}_y)dxdz \end{aligned}$$

$$+A_z(\vec{r}+\frac{dz}{2}\vec{e}_z)dxdy - A_z(\vec{r}-\frac{dz}{2}\vec{e}_z)dxdy \qquad (5.5)$$

$\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z$ ($|\vec{e}_x| = |\vec{e}_y| = |\vec{e}_z| = 1$) sont les vecteurs de la base, Fig.37. En développant $A_x(\vec{r}+\frac{dx}{2}\vec{e}_x)$ dans $\frac{dx}{2}$, etc., on trouve:

$$dF_S \simeq (\frac{\partial A_x(\vec{r})}{\partial x} + \frac{\partial A_y(\vec{r})}{\partial y} + \frac{\partial A_z(\vec{r})}{dz})dxdydz \qquad (5.6)$$

– en accord avec l'éq.(5.4).

Exemple. Considerons le cas où $\vec{A}(\vec{r},t)$, qui dépend en plus du temps dans cet exemple, est la densité d'un courant des particules: des molecules d'un gaz en mouvement ou des particules chargées qui constituent un courant électrique. On trouve dans ce cas:

$$\vec{A}(t,\vec{r}) = \rho(t,\vec{r}) \cdot \vec{v}(t,\vec{r}) \qquad (5.7)$$

où $\rho(t,\vec{r})$ est la densité des particules (en un point $\vec{r}$ et au moment t) et $\vec{v}(t,\vec{r})$ est leur vitesse moyenne. La divergence de $\vec{A}$ dans cet exemple correspond à la différence d'un nombre des particules qui sortent et qui rentrent dans le petit volume dans la Fig.36, par l'unité du temps. Si, par exemple, $\mathrm{div}\vec{A}(\vec{r},t)$ est positif, alors le nombre de particules qui sortent sera superieure au nombre des particules qui rentrent et, en conséquence, la densité des particules (en un point $\vec{r}$, au moment t) va diminuer. On aura l'équation:

$$\frac{\partial \rho(t,\vec{r})}{\partial t} = -\mathrm{div}\vec{A}(t,\vec{r}) \qquad (5.8)$$

qui décrit le bilan local des particules en mouvement. Il faut ajouter que l'équation de bilan dans la forme (5.8) correspond au cas où le nombre des particules est conservé : il n'y a pas de sources de production des nouvelles particules dans un milieu et, également, il n'y a pas de disparition des particules.

Exercices.

Calculer la divergence des champs de verteurs suivants

$$1) \quad \vec{A}(\vec{r}) = \vec{r} \qquad (5.9)$$

$$2) \quad \vec{A}(\vec{r}) = \frac{\vec{r}}{r^3}, \quad \text{en } \vec{r} \neq 0 \qquad (5.10)$$

$$3) \quad \vec{A}(\vec{r}) = \frac{\vec{r}}{a^2 + r^2} \tag{5.11}$$

<u>Réponses:</u>

$$1) \quad \mathrm{div}\vec{r} \equiv (\vec{\nabla} \cdot \vec{r}) = 3 \tag{5.12}$$

$$2) \quad \mathrm{div}\frac{\vec{r}}{r^3} \equiv (\vec{\nabla} \cdot \frac{\vec{r}}{r^3}) = (\vec{\nabla} \cdot \vec{r})\frac{1}{r^3} - \frac{3}{r^4}(\vec{r} \cdot \vec{\nabla} r) = 0 \tag{5.13}$$

$$3) \quad \mathrm{div}\frac{\vec{r}}{a^2 + r^2} \equiv (\vec{\nabla} \cdot \frac{\vec{r}}{(a^2 + r^2)}) = ... = \frac{3a^2 + r^2}{(a^2 + r^2)^2} \tag{5.14}$$

Divergence d'un champ $\vec{A}(\vec{r})$ dans les coordonnées curvilignes.

La définition générale de la divergence, $\mathrm{div}\vec{A}$, indépendante des systèmes des coordonnées, est donnée par l'éq.(5.4), de la manière un peu analogue à l'équation (14.2) donnant la définition général du gradient, $\vec{\mathrm{grad}} f(\vec{r})$.

Tout comme dans l'utilisation de l'éq.(14.2) dans le chapitre 4, il nous faudra préciser/exprimer les différents éléments qui rentrent dans l'éq.(5.4), les exprimer en coordonnées curvilignes quelconques, u_1, u_2, u_3.

Imagions que le point $\vec{r} = \vec{r}(u_1, u_2, u_3)$ est entouré, de nouveau, par un petit cuboïde, mais avec ses côtés, cette fois-ci, parallels à des plans (1.2), (13.3), (3.1) de la base mobile des coordonnées u_1, u_2, u_3, au point $\vec{r}$, Fig.38.

Ensuite, le calcul se fait de la même manière comme dans le cas des coordonnées cartésiennes. La différence est que, avec des coordonnées curvilignes, les composantes du champ $\vec{A}$ sont accompagnées par les facteurs géométriques, qui sont, ègalement, les fonctions des coordonnées u_1, u_2, u_3. Par exemple, pour les 2 termes qui sont exposés dans la Fig.38, il faudra développer pas seulement les composantes $A_1(u_1 + \frac{du_1}{2}, u_2, u_3)$, $A_1(u_1 - \frac{du_1}{2}, u_2, u_3)$, mais également les facteurs e_2, e_3 qui leurs accompagnent.

Plus concrétement:

$$A_1(u_1 + \frac{du_1}{2}, u_2 u_3)e_2(u_1 + \frac{du_1}{2}, u_2, u_3)e_3(u_1 + \frac{du_1}{2}, u_2, u_3)$$
$$\simeq A_1(u_1, u_2, u_3)e_2(u_1, u_2, u_3)e_3(u_1, u_2, u_3)$$
$$+\frac{du_1}{2} \cdot \frac{\partial}{\partial u_1}(A_1(u_1, u_2, u_3)e_2(u_1, u_2, u_3)e_3(u_1, u_2, u_3)) \tag{5.15}$$

$$A_1(u_1 - \frac{du_1}{2}, u_2 u_3) e_2(u_1 - \frac{du_1}{2}, u_2, u_3) e_3(u_1 - \frac{du_1}{2}, u_2, u_3)$$

$$\simeq A_1(u_1, u_2, u_3) e_2(u_1, u_2, u_3) e_3(u_1, u_2, u_3)$$

$$-\frac{du_1}{2} \cdot \frac{\partial}{\partial u_1}(A_1(u_1, u_2, u_3) e_2(u_1, u_2, u_3) e_3(u_1, u_2, u_3)) \qquad (5.16)$$

En ajoutant (en soustrant plutôt, Fig.38) ces deux termes, qui sont, en plus, multipliés par $du_2 du_3$, on trouve :

$$\frac{\partial}{\partial u_1}(A_1 e_2 e_3) \cdot du_1 du_2 du_3 \qquad (5.17)$$

En ajoutant les contributions de 4 autres faces du cuboïde dans la Fig.38, on trouve que le flux total, à travers les 6 côtés du cube, est donné par l'expression :

$$dF_S \simeq (\frac{\partial}{\partial u_1}(A_1 e_2 e_3) + \frac{\partial}{\partial u_2}(A_2 e_1 e_3) + \frac{\partial}{\partial u_3}(A_3 e_1 e_2)) du_1 du_2 du_3 \qquad (5.18)$$

Dans l'équation (5.4), l'autre facteur à exprimer en coordonnées curvilignes est dV. Ce facteur est beaucoup plus simple. Par la Fig.38 :

$$dV = e_1 e_2 e_3 du_1 du_2 du_3 \qquad (5.19)$$

(comp., également, l'éq.(13.20)).

Le facteur qui reste dans l'éq.(5.4), div$\vec{A}$, est à déterminé.

De cette manière, à partir de l'éq,(5.4), avec dF_S dans (5.18) et dV donné par l'éq.(5.19), on trouve l'expression pour la divergence du champ $\vec{A}$, en coordonnée curvilignes quelconques, u_1, u_2, u_3 :

$$\text{div}\vec{A}(u_1, u_2, u_3) = \frac{1}{e_1 e_2 e_3}[\frac{\partial}{\partial u_1}(e_2 e_3 A_1) + \frac{\partial}{\partial u_2}(e_1 e_3 A_2) + \frac{\partial}{\partial u_3}(e_1 e_2 A_3)] \qquad (5.20)$$

En coordonnées sphériques, $u_1 = r$, $u_2 = \Theta$, $u_3 = \phi$, $e_1 = e_r = 1$, $e_2 = e_\Theta = r$, $e_3 = e_\phi = r \cdot \sin\Theta$, on trouve :

$$\text{div}\vec{A}(r, \Theta, \phi) = \frac{1}{r^2 \sin\Theta}[\frac{\partial}{\partial r}(r^2 \sin\Theta \cdot A_r) + \frac{\partial}{\partial \Theta}(r \cdot \sin\Theta \cdot A_\Theta) + \frac{\partial}{\partial \phi}(r \cdot A_\phi)] \qquad (5.21)$$

En coordonnées cylindriques, $u_1 = \rho$, $u_2 = \phi$, $u_3 = z$, $e_1 = e_\rho = 1$, $e_2 = e_\Phi = \rho$, $e_3 = e_z = 1$:

$$\text{div}\vec{A}(\rho, \phi, z) = \frac{1}{\rho}[\frac{\partial}{\partial \rho}(\rho A_\rho) + \frac{\partial}{\partial \phi}(A_\phi) + \frac{\partial}{\partial z}(\rho A_z)] \qquad (5.22)$$

En coordonnées polaires, en deux dimensions ($u_1 = \rho$, $u_2 = \Phi$, $e_1 = e_\rho = 1$, $e_2 = e_\Phi = \rho$), on trouvera, avec des méthodes analogues, l'expression suivante :

$$\begin{aligned}\mathrm{div}\vec{A} &= \frac{1}{e_1 e_2}[\frac{\partial}{\partial u_1}(e_2 A_1) + \frac{\partial}{\partial u_2}(e_1 A_2)] \\ &= \frac{1}{\rho}[\frac{\partial}{\partial \rho}(\rho A_\rho) + \frac{\partial}{\partial \Phi}(A_\Phi)] \end{aligned} \tag{5.23}$$

Exercices

4) Recalculer les divergences des champs de vecteurs dans (5.9) - (5.11) en utilisant l'expression pour div$\vec{A}$ en coordonnées sphériques, éq.(5.21). Faudra déterminer d'abord les composantes sphériques, A_r, A_Θ, A_Φ, des champs des vecteurs dans (5.9) - (5.11).

Vérifier que les résultats s'accordent avec les réponses (5.12) - (5.14), obtenues auparavant en faisant les calculs en coordonnées cartesiennes.

Premier théorème intégrale : théorème d'Ostrogradski.

La formule locale (5.4), additionnée, produit la formule intégrale suivante :

$$\oint_S d\vec{s} \cdot \vec{A}(\vec{r}) = \int_{D_S} d^3 r \, \mathrm{div}\vec{A}(\vec{r}) \tag{5.24}$$

Dans cette équation, D_S est un domaine, dans l'espace R^3, entouré par la surface S, Fig.39.

L'équation (5.24), égalité entre la divergence d'un champ $\vec{A}$, intégrée sur un domaine D_S, et le flux de ce champ à travers la surface qui entoure le domaine D_S, cette égalité est appelée le théorème d'Ostrogradski, ou le théorème de divergence.

Au lieu d'une démonstration detaillée, nous allons donner quelques arguments pour montrer que cette formule est bien naturelle est transparente.

Imaginons que nous avons coupé le domaine D_S en petits cuboïdes, qui peuvent être quelque peu déformés, de la façon que l'ensemble de ces cuboïdes remplit parfaitement le domaine D_S. Dans la Fig.40 sont montrés deux cuboïdes de cet ensemble.

Ensuite, l'intégrale à droite dans l'éq.(5.24) pourrait être remplacée par la somme de Darboux correspondante, sur cet ensemble : la contribution de chaque petit cuboïde, dans la somme, étant de la forme:

$$\text{div}\vec{A} \cdot dV \tag{5.25}$$

où dV est un petit volume du cuboïde et div$\vec{A}$ est déterminé, pour sa valeur, au centre de ce petit cuboïde.

Nous pouvons maintenant utiliser l'éq.(5.4), lue dans le sens oposé, pour remplacer div$\vec{A}\cdot dV$ par le flux dF du champ $\vec{A}$ à travers les côtés d'un petit cuboïde. Rappelons que ce flux se calcule par l'intégrale dans l'éq.(5.2) avec $d\vec{s}$ orienté vers l'exterieur du cuboïde en question. Maintenant, si on a fait ce type de transformation pour tous les petits cuboïdes qui partionnent le domaine D_S et on a additionné les résultats, on observe que le flux à travers chaque petit côté d'un cuboïde donné, qui se trouve à l'interieur de D_S, rentre deux fois dans la somme, car chaque côté appartient à deux cuboïdes voisins, Fig.40. En plus, ces contributions sont de signes opposés à cause de l'orientation opposée de $d\vec{s}$ dans l'éq.(5.2) : orientations exterieure - interieure sont opposées pour les deux cuboïdes dans la Fig.40 qui partagent le même côté rectangulaire. Comme résultat final, les flux à travers tous les côtés des cuboïdes qui se trouvent à l'interieur de D_S se compensent, les uns contre les autres. Il restera les flux à travers les petits côtés des cuboïdes qui se trouvent sur le bord de D_S. Cet ensemble des petits flux, additionnés, correspond à l'intégrale sur le bord de D dans l'éq.(5.24) à gauche.

5.1. COMPLEMENT. Exemples des calculs des flux, en coordonnées cartesiennes et en coordonnées sphériques.

Calculs en coordonnées cartesiennes.

Exemple 1.

Le flux d'un champ de vecteurs

$$A(\vec{r}) = \vec{r} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \tag{5.26}$$

à travers la surface S dans Fig.41 : un carré, parallel au plan (x, y), soulevé à la hauteur

a le long de l'axe z :

$$S : -a < x < a, \quad -a < y < a, \quad z = a \tag{5.27}$$

On trouve :

$$\begin{aligned} F_S[\vec{A}] &= \int_S d\vec{s} \cdot \vec{A} = \int_S dx\, dy\, \vec{e}_z \cdot \vec{A} \\ &= \int_S dx\, dy\, A_z = \int_S dx\, dy \cdot z \end{aligned} \tag{5.28}$$

On observe que, sur la surface S, z est constant, $z = a$,

$$= \int_S dx\, dy \cdot a = a \cdot \int_{-a}^{+a} dx \int_{-a}^{+a} dy = a \cdot 2a \cdot 2a = 4a^3 \tag{5.29}$$

Nous avons utilisé le théorème de Fubini pour remplace l'intégrale bidimensionnalle $\int_S dx\, dy$ par l'intégrale double $\int_{-a}^{a} dx \int_{-a}^{a} dy$.

$$F_S[\vec{A}] = 4a^3 \tag{5.30}$$

Exemple 2.

Le flux du champ

$$\vec{B}(\vec{r}) = \begin{pmatrix} y \\ z \\ x \end{pmatrix} \tag{5.31}$$

à travers la même surface, éq.(5.27), Fig.41.

Dans le cas on trouve :

$$\int_S d\vec{s} \cdot \vec{B} = \int_S dx\, dy\, \vec{e}_z \cdot \vec{B}_z \tag{5.32}$$

$B_z = x$, éq.(5.31),

$$\begin{aligned} &= \int_S dx\, dy \cdot x = \int_{-a}^{a} dx \cdot x \cdot \int_{-a}^{a} dy \\ &= \frac{x^2}{2}\Big|_{-a}^{a} \times y\Big|_{-a}^{a} = 0 \times 2a = 0 \end{aligned} \tag{5.33}$$

$$F_S[\vec{B}] = 0 \tag{5.34}$$

Exemple 3.

Le flux du champ $\vec{A}(\vec{r})$, eq.(5.26) à travers la surface S :

$$-a < x < a, \quad -a < z < a, \quad y = a \tag{5.35}$$

– Fig.42.

On trouve dans ce cas :

$$\begin{aligned} F_S[\vec{A}] = \int_S d\vec{s} \cdot \vec{A} = \int_S dx\, dz \cdot \vec{e}_y \cdot \vec{A} \\ = \int_S dx\, dz \cdot A_y = \int_S dx\, dz \cdot y = \int_S dx\, dz \cdot a \\ = a \cdot \int_{-a}^{a} dx \cdot \int_{-a}^{a} dy = a \cdot 2a \cdot 2a = 4a^3 \end{aligned} \tag{5.36}$$

$$F_S[A] = 4a^3 \tag{5.37}$$

Exemple 4.

Le flux du champ $\vec{A}(\vec{r})$, éq.(5.26), à travers la surface d'un cube, Fig.43, du taille $2a \times 2a \times 2a$:

$$-a < x < a, \quad -a < y < a, \quad -a < z < a \tag{5.38}$$

Cette fois-ci, il s'agit d'une surface fermée.

La surface totale, S, est faite de 6 côtés du cube, S_i, $i = 1, 2, 3, 4, 5, 6$. L'intégrale sur S sera égale à la somme des intégrales sur les 6 côtés :

$$\begin{aligned} F_S[\vec{A}] = \oint_S d\vec{s} \cdot \vec{A} = \int_{S_1} d\vec{s}_1 \cdot \vec{A} + \int_{S_2} d\vec{s}_2 \cdot \vec{A} + \int_{S_3} d\vec{s}_3 \cdot \vec{A} \\ + \int_{S_4} ds_4 \cdot \vec{A} + \int_{S_5} d\vec{s}_5 \cdot \vec{A} + \int_{S_6} ds_6 \cdot \vec{A} \end{aligned} \tag{5.39}$$

Dans les exemples 1 et 3 nous avons déjà calculé les intégrales sur les côtés S_1 et S_2, Figs.41, 42. A cause des symétries du champ $\vec{A}(\vec{r}) = \vec{r}$ ($\vec{A}(\vec{r})$ est isotrope) et de la surface S, Fig.43, il est facile à réaliser que les calculs des flux à travers les côtés $S_1, ..., S_6$ donneront, tous, le même résultat, c'est-ce que nous avons vérifié déjà avec des calculs pour S_1 et S_2. Finalement nous trouvons, pour le flux total dans (5.39) :

$$F_S[\vec{A}] = \oint_S d\vec{s} \cdot \vec{A} = 6 \times 4a^3 = 24a^3 \tag{5.40}$$

Observons maintenant que ce même résultat, pour le flux total, nous pouvons le retrouver autrement. Du fait que la surface S, dans le cas actuel, est fermée, nous permet d'appliquer le théorème d'Ostrogradski, éq.(5.24). Par ce théorème, nous pouvons remplacer le calcule du flux $F_S[\vec{A}]$ (pour S fermée) par le calcul de l'intégrale tridimensionnel sur le domane D, borné par S. Il faudra calculer la divergence de $\vec{A}$, div$\vec{A}$, et de l'intégrer sur D.

Pour $\vec{A}(\vec{r}) = \vec{r}$, éq.(5.26), et avec la définition de div$\vec{A}$ dans (5.1) (en coordonnées cartesiennes), on trouve immediatement

$$\mathrm{div}\vec{A} = 3 \tag{5.41}$$

Ensuite :

$$F_S[\vec{A}] = \int_D d^3r \mathrm{div}\vec{A} = \int_D dx\, dy\, dz \cdot 3$$
$$= 3 \times \int_{-a}^{a} dx \times \int_{-a}^{a} dy \times \int_{-a}^{a} dz = 3 \times 2a \times 2a \times 2a = 24a^3 \tag{5.42}$$

– en accord avec le résultat de nos calculs directs de $F_S[A]$, éq.(5.40).

Soulignons encore que cette deuxieme méthode du calcul du flux à travers nue surface s'applique, uniquement, à des surfaces fermées.

Dans le cas des surfaces ouvertes, avec des bords, comme dans les figures 34, 35,41,42, le seule méthode du calcul de flux et la méthode directe. Il n'y a pas des théorèmes, du type de théorème d'Ostrogradski, pour des surface ouvertes.

Observons encore que pour le champ $\vec{B}(\vec{r})$, éq.(5.31), exemple 2,

$$\mathrm{div}\vec{B} = 0 \tag{5.43}$$

Par le théorème d'Ostrogradski, le flux total $F_S[\vec{B}]$, à travers le surface totale du cube, sera égal à 0.

Dans l'exemple 2, nous avons vu que, pour le champ $\vec{B}$, pas seulement le flux total s'annule mais également sont égales à 0 les flux partiels du cube. Dans l'exemple 2 nous avons fait le calcul pour le côté S_1. Encore une fois, par la symetrie du champ $\vec{B}9\vec{r})$ et les symetries du cube, on trouvera le même annulation du flux pour d'autres côtés du cube,$S_2, ..., S_6$.

De nouveau, nous trouvons l'accord avec le calcul du flux total par le théorème d'Ostrogradski :

Quelques formules utiles.

Nous vouderions résumer sur les calculs précedents et donner quelques formules utiles pour la suite.

Observons qu'en coordonnées cartésiennes le vecteur-petit déplacement dans l'espace est de la forme :

$$d\vec{r} = dx\vec{e}_x + dy\vec{e}_y + dz\vec{e}_z = \begin{pmatrix} dx \\ dy \\ dz \end{pmatrix} \tag{5.44}$$

Le vecteur-petit surface (dans les intégrales sur des surfaces, en calculant les flux) est comme suit :

$$d\vec{s} = dy\,dz \cdot \vec{e}_x + dz\,dx \cdot \vec{e}_y + dx\,dy \cdot \vec{e}_z = \begin{pmatrix} dy\,dz \\ dz\,dx \\ dx\,dy \end{pmatrix} \tag{5.45}$$

Nous avons vu l'apparition de différentes composantes de $d\vec{s}$ leur des calcul des flux à travers les differents côtés du cube, Fig.41, 42, 43. C'est l'orientation de surface, sur laquelle on intègre, qui choisit telle ou telle composante du vecteur $d\vec{s}$ dans (5.45).

Nous allons maintenant généraliser les formules (5.44), (5.45) vers des coordonnées curvilignes.

Pour le vecteur-petit deplacement dans l'espace nous avons l'expression suivante :

$$d\vec{r} = e_1 du_1 \cdot \hat{\vec{e}}_1 + e_2 du_2 \cdot \hat{\vec{e}}_2 + e_3 du_3 \cdot \hat{\vec{e}}_3 = \begin{pmatrix} e_1 du_1 \\ e_2 du_2 \\ e_3 du_3 \end{pmatrix} \tag{5.46}$$

– comp. l'éq.(4.11).

Pour le vecteur-petite surface (surface élémentaire dans les intégrales), $d\vec{s}$ et de la forme :

$$d\vec{s} = e_2e_3du_2du_3 \cdot \hat{\vec{e}}_1 + e_3e_1du_3du_1 \cdot \hat{\vec{e}}_2 + e_1e_2du_1du_2 \cdot \hat{\vec{e}}_3$$
$$= \begin{pmatrix} e_2e_3du_2du_3 \\ e_3e_1du_3du_1 \\ e_1e_2du_1du_2 \end{pmatrix} \tag{5.47}$$

Egalement, les différentes composantes du vecteur $d\vec{s}$ dans (5.47) sont apparu déjà dans nos calculs précedants : voir la Fig.38 qui explique, en soi-même, la forme des differentes composantes de $d\vec{s}$.

Rappelons que des facettes du petit cuboïde dans la Fig.38 sont déjà des tailles élémentaires : $dl_2 \times dl_3 = e_2e_3du_2du_3$, etc. .

Nous auront besoin des différentes composantes des vecteurs $d\vec{r}$, (5.46), et de $d\vec{s}$, (5.47), dans des calculs qui vont suivre, en coordonnées curvilignes.

Nous donnons finalement les formes explicites des vecteurs $d\vec{r}$ et $d\vec{s}$ dans les coordonnées sphériques et cylindriques.

En coordonnées sphériques ($e_1 = e_r = 1$, $e_2 = e_\Theta = r$, $e_3 = e_\phi = r \cdot \sin\phi$) :

$$d\vec{r} = dr \cdot \hat{\vec{e}}_r + r \cdot d\Theta \cdot \hat{\vec{e}}_\Theta + r \cdot \sin\Theta \cdot d\phi \cdot \hat{\vec{e}}_\phi$$
$$= \begin{pmatrix} dr \\ rd\Theta \\ r\sin\Theta\, d\phi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} dr \\ dr_\Theta \\ dr_\phi \end{pmatrix} \tag{5.48}$$

$$d\vec{s} = r^2 \sin\Theta\, d\Theta\, d\phi \cdot \hat{\vec{e}}_r + r\sin\Theta\, d\phi\, dr \cdot \hat{\vec{e}}_\Theta + r\, dr\, d\Theta \cdot \hat{\vec{e}}_\phi$$
$$= \begin{pmatrix} r^2\sin\Theta\, d\Theta\, d\phi \\ r\sin\Theta\, d\phi\, dr \\ r\, dr\, d\Theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ds_r \\ ds_\Theta \\ ds_\phi \end{pmatrix} \tag{5.49}$$

En coordonnées cylindriques ($e_1 = e_\rho = 1$, $e_2 = e_\phi = \rho$, $e_3 = e_z = 1$):

$$d\vec{r} = d\rho\hat{\vec{e}}_\rho + \rho d\phi \cdot \hat{\vec{e}}_\phi + dz\hat{\vec{e}}_z$$
$$= \begin{pmatrix} d\rho \\ \rho d\phi \\ dz \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} dr_\rho \\ dr_\phi \\ dr_z \end{pmatrix} \tag{5.50}$$

$$d\vec{s} = \rho\, d\phi\, dz \cdot \hat{\vec{e}}_\rho + dz\, d\rho\, \hat{\vec{e}}_\phi + \rho\, d\rho\, d\phi \cdot \hat{\vec{e}}_z$$
$$= \begin{pmatrix} \rho\, d\phi\, dz \\ dz\, d\rho \\ \rho\, d\rho\, d\phi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ds_\rho \\ ds_\phi \\ ds_z \end{pmatrix} \tag{5.51}$$

Calculs en coordonnées curvilignes.

Exemple 5.

Le flux d'un champ

$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{\vec{r}}{r^2} \tag{5.52}$$

à trouvers la surface d'une sphère de rayon R, centrée à l'origine, Fig.44. Calcul en coordonnées sphériques.

Le champ (5.52) se décompose comme suit, par rapport à la base mobile des coordonnées sphériques :

$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{1}{r}\hat{\vec{e}}_r \tag{5.53}$$

Sinon:

$$\vec{A}(\vec{r}) = \begin{pmatrix} A_r \\ A_\Theta \\ A_\phi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{r} \\ o \\ 0 \end{pmatrix} \tag{5.54}$$

Le flux se calcule par l'intégrale :

$$F_S[\vec{A}] = \oint_S d\vec{s} \cdot \vec{A} \tag{5.55}$$

Observons que, pour la surface de la sphère, Fig.44,

$$d\vec{s} = ds_r \cdot \hat{\vec{e}}_r = r^2 \sin\Theta\, d\Theta \cdot d\phi \tag{5.56}$$

Nous avons utilisé la forme de la composante ds_r donnée dans l'éq.(5.49). Ensuite :

$$\oint_S d\vec{s} \cdot \vec{A} = \int_S ds_r \cdot A_r = \int_S r^2 \sin\Theta \cdot d\Theta \cdot d\phi \cdot \frac{1}{r} = \int_S r \sin\Theta \cdot d\Theta \cdot d\phi \tag{5.57}$$

Sur le surface S, r est fixe, $r = R$, Θ et ϕ varient, doivent être intégres,

$$= \int_S R \sin\Theta \cdot d\Theta\, d\phi = R \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^{\pi} \sin\Theta \cdot d\Theta = R \cdot r\pi \cdot (-\cos\Theta)|_0^{\pi} = 2\pi R \cdot 2 = 4\pi R \tag{5.58}$$

$$F_S[\vec{A}] = 4\pi R \tag{5.59}$$

Ce résultat se rétrouve avec le théorème d'Ostrogradski (S étant fermée) :

$$\text{div}\vec{A} = \frac{1}{r^2 \sin\Theta} \frac{\partial}{\partial r}(r^2 \sin\Theta \cdot A_r) \tag{5.60}$$

– éq.(5.21), pour div$\vec{A}$ en sphériques, étant donné que A_Θ, $A_\phi = 0$

$$\text{div}\vec{A} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r}(r^2 \cdot A_r) = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r}(r^2 \cdot \frac{1}{r} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} r = \frac{1}{r^2} \tag{5.61}$$

Par le théorème d'Ostrogradski :

$$\begin{aligned}
F_S[\vec{A}] &= \oint_S d\vec{s} \cdot \vec{A} = \int_{D_S} d^3r \text{div}\vec{A} = \int_{D_S} d^3r \cdot \frac{1}{r^2} \\
\int_{D_S} r^2 dr \sin\Theta \, d\Theta \, d\Phi \frac{1}{r^2} &= \int_{D_3} dr \cdot \sin\Theta \, d\Theta \cdot \phi \\
\int_0^R dr \int_0^\pi \sin\Theta \, d\Theta \int_0^{2\pi} d\phi &= R \times 2 \times 2\pi = 4\pi R
\end{aligned} \tag{5.62}$$

<u>Exemple 6.</u>

Le flux du champ de vecteurs

$$\vec{W}(\vec{r}) = z \cdot \vec{e}_z \tag{5.63}$$

à travers la surface de demi-sphère, de rayon R, $0 < \Theta < \frac{\pi}{2}$, Fig.45.

Calcul en coordonnées sphériques. D'abord, il faut décomposer $W(\vec{r})$ dans la base mobile des coordonnées sphériques. Par la Fig.46 on trouve :

$$\vec{W}(\vec{r}) = z \cdot \vec{e}_z = z \cdot \cos\Theta \cdot \hat{\vec{e}}_r - z \cdot \sin\Theta \cdot \vec{e}_\Theta \tag{5.64}$$

Il reste à exprimer z en fonction des coordonnées sphériques : $z = r \cdot \cos\Theta$. Alors :

$$\vec{W}(\vec{r}) = r \cdot \cos^2\Theta \cdot \hat{\vec{e}}_r - r \cdot \cos\Theta \cdot \sin\Theta \cdot \hat{\vec{e}}_\Theta \tag{5.65}$$

Sinon :

$$\vec{W}(\vec{r}) = \begin{pmatrix} W_r \\ W_\Theta \\ W_\phi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r\cos^2\Theta \\ -r\cos\Theta\sin\Theta \\ 0 \end{pmatrix} \tag{5.66}$$

Ensuite :

$$
\begin{aligned}
F_S[\vec{W}] &= \int_S d\vec{s} \cdot \vec{W} \\
&= \int_S ds_r \cdot \hat{\vec{e}}_r \cdot (W_r \cdot \hat{\vec{e}}_r + W_\Theta \cdot \hat{\vec{e}}_\Theta) \\
= \int_S ds_r \cdot W_r &= \int_S r^2 \sin\Theta \, d\Theta \, d\phi \cdot r \cdot \cos^2\Theta \\
&= \int_S r^3 \sin\Theta \cdot \cos^2\Theta \, d\Theta \cdot d\phi \qquad (5.67)
\end{aligned}
$$

Sur S, demi-sphère, r est fixe, $r = R$. Θ, ϕ varies, doivent être intègrées dans des limites qui correspondent à la demi-sphère. On trouve :

$$
\begin{aligned}
&\int_S r^3 \sin\Theta \cos^2\Theta \, d\Theta \cdot d\phi \\
= \int R^3 \sin\Theta \cos^2\Theta \, d\Theta \cdot d\phi = R^3 \int_0^{\pi/2} &\sin\Theta \cdot \cos^2\Theta \cdot \ d\Theta x \int_0^{2\pi} d\phi \\
= -R^3 \int_0^{\pi/2} \cos^2\Theta \cdot d\cos\Theta x \int_0^{2\pi} d\phi &= -R^3 \frac{\cos^3\Theta}{3}|_0^{\frac{\pi}{2}} \times \phi|_0^{2\pi} \\
&= +R^3 \frac{1}{3} \times 2\pi = \frac{2\pi}{3} R^3 \qquad (5.68)
\end{aligned}
$$

$$
F_S[\vec{W}] = \frac{2\pi}{3} R^3 \qquad (5.69)
$$

Observons que, formelement, on ne peut pas applique dans ce cas le théorème d'Ostrogradski, la surface S étant ouvert, avec un bord, le cercle de rayon R dans le plan x, y, Fig.45. Mais, si on ajoute le disque de rayon R dans le plan x, y, l'ensemble (S plus disque) fait une surface fermée. Car $\vec{W}(\vec{r})$ s'annule sur la surface du disque (où $z = 0$), le flux de $\vec{W}$ à travers le disque sera égale à zéro et le résultat (5.69) restera le même pour la surface fermée, complétée par le disque. Alors, en effet, on peut appliquer le théorème d'Ostrogradski, pour vérifier/retrouver le résultat du calcul direct, éq.(5.69).

On trouve d'abord que

$$
\text{div}\vec{W}(\vec{r}) = 1 \qquad (5.70)
$$

Il est facile de calculer $\text{div}\vec{W}(\vec{r})$ en coordonnées cartésiennes, voyant la forme de $\vec{W}(\vec{r})$ en cartesiennes :

$$
\vec{W}(\vec{r}) = z \cdot \vec{e}_z = \begin{pmatrix} W_x \\ W_y \\ W_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ z \end{pmatrix} \qquad (5.71)
$$

On trouve :

$$\mathrm{div}\vec{W} = \partial_x W_x + \partial_y W_y + \partial_z W_z = \partial_z z = 1 \tag{5.72}$$

– le résultat annoncé dans (5.70).

Une fois $\mathrm{div}\vec{W}$ est déterminé, en cartesiennes cette fois-ci, on peut l'utiliser, dans la suite, pour des calculs dans d'autres coordonnées, en occurance en coordonnées sphériques.

Par le théorème d'Ostrogradski :

$$\begin{aligned} \oint_S d\vec{s} \cdot \vec{W} = \int_{D_S} d^3r \cdot \mathrm{div}\vec{W} = \int_{D_S} d^3r \cdot 1 = \\ = \text{Volume de demi-sphère} \\ = \frac{1}{2} \cdot \frac{4\pi R^3}{3} = \frac{2\pi R^3}{3} \end{aligned} \tag{5.73}$$

– en accord avec l'éq.(5.69).

<u>Exemple 7.</u>

Le flux du champ $\vec{W}(\vec{r})$, éq.(5.63), à travers la surface S, fermée, constituée de deux parties :

$$S = S_1 + S_2 \tag{5.74}$$

(S = <u>l'ensemble</u> de S_1 et S_2). S_1 et la surface du cône, d'ouverture α, et S_2 est un chapeau sphérique, de la sphère du rayon R, Fig.47.

Le flux total sera fait de deux parties : le flux à travers S_1 et le flux à travers S_2 :

$$F_S[\vec{W}] = \oint_S d\vec{s} \cdot \vec{W} = \int_{S_!} d\vec{s} \cdot \vec{W} + \int_{S_2} ds \cdot \vec{W} \tag{5.75}$$

<u>Le flux à travers la surface S_1, Figs.47,48.</u>

$$F_{S_1} = \int_{S_1} d\vec{s} \cdot \vec{W} = \int_{S_1} ds_\Theta \cdot W_\Theta \tag{5.76}$$

La décomposition du champ $\vec{W}(\vec{r}) = z \cdot \vec{e}_z$ dans la base mobile des coordonnées sphériques à été déterminée auparavant, dans l'exemple 6, éqs.(5.65), (5.66). D'oú :

$$W_\Theta = -r \cdot \cos\Theta \cdot \sin\Theta \tag{5.77}$$

Alors:

$$F_{S_1} = \int_{S_1} ds_\Theta W_\Theta = \int_{S_1} r \sin\Theta \, dr \, d\phi \times (-r \cdot \cos\Theta \cdot \sin\Theta)$$
$$= -\int_{S_1} r^2 dr \cdot \cos\Theta \cdot \sin^2\Theta \cdot d\phi \tag{5.78}$$

Nous avons utilisé la forme de la composante ds_Θ donnée dans l'eq.(5.49).

Sur la surface S_1, Θ est fixe, $\Theta = \alpha$, r est ϕ varient :

$$r \,:\, 0 \to R$$
$$\phi \,:\, 0 \to 2\pi \tag{5.79}$$

On obtient :

$$F_{S_1} = -\cos\alpha \cdot \sin^2\alpha \int_0^R r^2 dr \int_0^{2\pi} d\phi$$
$$= -\cos\alpha \cdot \sin^2\alpha \cdot \frac{R^3}{3} \cdot 2\pi \tag{5.80}$$

$$F_{S_1}[\vec{W}] = -\frac{2\pi R^3}{3} \cos\alpha \cdot \sin^2\alpha \tag{5.81}$$

Le flux à travers la surface S_2, Figs.47,49.

$$F_{S_2} = \int_{S_2} d\vec{s} \cdot \vec{W} = \int_{S_2} ds_r \cdot W_r \tag{5.82}$$

Par l'éq.(5.66),

$$W_r = r \cos^2\Theta \tag{5.83}$$

On trouve :

$$F_{S_2} \int_{S_2} ds_r \cdot W_r = \int_{S_2} r^2 \sin\Theta \cdot d\Theta \cdot d\phi \times r \cdot \cos^2\Theta$$
$$= \int_{S_2} r^3 \sin\Theta \cdot \cos^2\Theta \cdot d\Theta \cdot d\phi \tag{5.84}$$

Sur la surface S_2, r est fixe, $r = R$, Θ et ϕ varient :

$$\Theta \,:\, 0 \to \alpha$$
$$\phi \,:\, 0 \to 2\pi \tag{5.85}$$

Alors :

$$\begin{aligned}
F_{S_2} &= R^3 \int_0^\alpha \sin\Theta \cdot \cos^2\Theta \cdot d\Theta \int_0^{2\pi} d\phi \\
&= -R^3 \int_0^\alpha \cos^2\Theta \cdot d(\cos\Theta) \int_0^{2\pi} d\phi \\
&= -R^3 \frac{\cos^3\Theta}{3}|_0^\alpha \times \phi|_0^{2\pi} \\
&= +R^3 \cdot \frac{1}{3}(1-\cos^3\alpha)\cdot 2\pi \\
&= \frac{2\pi R^3}{3}(1-\cos^3\alpha) \qquad (5.86)
\end{aligned}$$

$$F_{S_2}[\vec{W}] = \frac{2\pi R^3}{3}\cdot(1-\cos^3\alpha) \qquad (5.87)$$

Calculons maintenant le flux total. Par l'éq.(5.75) :

$$\begin{aligned}
F_S[\vec{W}] &= F_{S_1}[\vec{W}] + F_{S_2}[\vec{W}] \\
&= -\frac{2\pi R^3}{3}\cos\alpha\cdot\sin^2\alpha + \frac{2\pi R^3}{3}(1-\cos^3\alpha) \\
&= \frac{2\pi R^3}{3}\times(1-cos^3\alpha - \cos\alpha\cdot\sin^2\alpha) \\
&= \frac{2\pi R^3}{3}\times(1-\cos\alpha\cdot(\cos^2\alpha+\sin^2\alpha)) \\
&= \frac{2\pi R^3}{3}\times(1-\cos\alpha) \qquad (5.88)
\end{aligned}$$

$$F_S[\vec{W}] = \frac{2\pi R^3}{3}(1-\cos\alpha) \qquad (5.89)$$

Finalement, retrouvons ce résultat avec le théorème d''Ostrogradski :

$$F_S[\vec{W}] = \oint_S d\vec{s}\cdot\vec{W} = \int_{D_S} d^3r\,\mathrm{div}\vec{W} \qquad (5.90)$$

Nous avons trouvé auparavant, dans l'exemple 6, que $\mathrm{div}\vec{W} = 1$, éq.(5.72). Alors on obtient :

$$F_S[\vec{W}] = \int_{D_S} d^3r\mathrm{div}\vec{W} = \int_{D_S} d^3r\cdot 1 = \text{Volume de}\, D_S \qquad (5.91)$$

Rappelons que nous avons déjà calculé le volume du solide dans la Fig.47 (volume limité par S_1 et S_2). Dans le chapitre 3, exercice à la fin, nous avons trouvé :

$$\text{Volume de}\, D_S = \frac{2\pi R^3}{3}\cdot(1-\cos\alpha) \qquad (5.92)$$

– l'éq.(3.55).

Nous trouvons finalement, par (5.91), (5.92), que

$$F_S[\vec{W}] = \frac{2\pi R^3}{3} \cdot (1 - \cos\alpha) \tag{5.93}$$

– en accord avec le résultat du calcul direct, éq.(5.89).

6 Rotationnel d'une fonction vectorielle. Circulation. Théorème de Stokes.

Définition 1. Dans les coordonnées cartesiennes, le rotationnel d'un champ de vecteurs $\vec{A}(\vec{r})$ est défini par l'expression :

$$\begin{aligned} \mathrm{r\vec{o}t}\vec{A}(\vec{r}) &= (\partial_y A_z - \partial_z A_y)\vec{e}_x + (\partial_z A_x - \partial_x A_z)\vec{e}_y \\ &+(\partial_x A_y - \partial_y A_x)\vec{e}_z = \begin{pmatrix} \partial_y A_z - \partial_z A_y \\ \partial_z A_x - \partial_x A_z \\ \partial_x A_y - \partial_y A_x \end{pmatrix} \end{aligned} \tag{6.1}$$

Dans les coordonnées cartesiennes, et uniquement dans ces coordonnées, le $\mathrm{r\vec{o}t}\vec{A}$ pourrait être présenté à l'aide de l'opérateur nabla $\vec{\nabla}$ de la manière suivante :

$$\mathrm{r\vec{o}t}\vec{A} = \vec{\nabla} \wedge \vec{A} \tag{6.2}$$

Le symbol $\vec{A}\wedge\vec{B}$ signifit le produit exterieur de deux vecteurs, $\vec{A}$ et $\vec{B}$, appelé également produit vectoriel :

$$\begin{aligned} \vec{A} \wedge \vec{B} &= (A_y B_z - A_z B_y)\vec{e}_x + (A_z B_x - B_x A_z)\vec{e}_y \\ &+(A_x B_y - A_y B_x)\vec{e}_z = \begin{pmatrix} A_y B_z - A_z B_y \\ A_z B_x - A_x B_z \\ A_x B_y - A_y B_x \end{pmatrix} \end{aligned} \tag{6.3}$$

Dans le cas particulier de $\vec{\nabla} \wedge \vec{A}$, où $\vec{\nabla}$ est un opérateur différentiel,

$$\vec{\nabla} = \begin{pmatrix} \partial_x \\ \partial_y \\ \partial_z \end{pmatrix} \tag{6.4}$$

le symbol $\vec{\nabla} \wedge \vec{A}$, donc le rotationnel, est appelé également dérivée exterieure du champ $\vec{A}(\vec{r})$.

Définition 2. Circulation d'un champ $\vec{A}(\vec{r})$ le long d'un contour C est définie par l'intégrale :

$$\mathrm{Cir}_C[\vec{A}] = \int_C d\vec{r} \cdot \vec{A}(\vec{r}) \tag{6.5}$$

L'intégrale de chemin ci-dessus est définie par sa somme de Darbeaux dans la Fig.50.

Pour se familiariser avec ce type d'intégrales, à la fin de ce chapitre, dans le Complément, sont présentés quelques exemples des calculs des circulations, des intégrales du type (6.5).

D'une maniere similaire comme pour le rapport entre le flux à travers une petite surface fermée et la divergence, éq.(5.4), on peut démontrer que la circulation d'un champ $\vec{A}(\vec{r})$ le long d'un petit contour fermé C est égale (dans la limite d'un tout petit contour) à $\vec{\mathrm{rot}}\vec{A} \cdot d\vec{s}$, où $d\vec{s}$ est une petite surface bornée par le contour C :

$$\oint_C d\vec{r} \cdot \vec{A}(\vec{r}) \simeq d\vec{s} \cdot \vec{\mathrm{rot}}\vec{A} \tag{6.6}$$

– Fig.51.

Nous rappelons que, par définition, $d\vec{s}$ est un vecteur qui est orthogonal à la surface, avec son module (longueur) $|d\vec{s}|$ égale à l'aire; raccordement de l'orientation du contour et de la direction de $d\vec{s}$ (le choix entre les deux directions possibles) est montré dans la figure.

Pour donner l'idée sur la démonstration de la formule (6.6), nous prennons le cas le plus simple où le petit contour C, à gauche de l'éq. (6.6), est un petit rectangle, dont les deux côtés sont parallels aux axes x et y, Fig.52. Dans ce cas, et dans la limite de tout petit rectangle (la taille des côtés $dx, dy \to 0$), l'intégrale à gauche dans l'éq. (6.6) pourrait être remplacée par la somme:

$$\begin{aligned} A_y(\vec{r} + \frac{dx}{2}\vec{e}_x)dy - A_x(\vec{r} + \frac{dy}{2}\vec{e}_y)dx \\ -A_y(\vec{r} - \frac{dx}{2}\vec{e}_x)dy + A_x(\vec{r} - \frac{dy}{2}\vec{e}_y)dx \end{aligned} \tag{6.7}$$

qui représente la circulation discrète du champ $\vec{A}$ le long du rectangle. En développant ensuite les composantes du champ $\vec{A}$ dans $\frac{dx}{2}$, $\frac{dy}{2}$, on trouve, comme le terme principal:

$$(\partial_x A_y - \partial_y A_x) dx\, dy \tag{6.8}$$

Le premier facteur correspond à la composante z du $\vec{\mathrm{rot}}\vec{A}(\vec{r})$ et le deuxième correspond à $|d\vec{s}|$, l'aire de la petite surface qui est bornée par le rectangle. On peut constater que tout est en accord avec l'expression à droite dans l'éq.(6.6). En effet, pour l'orientation du rectangle dans la Fig.52, le vecteur $d\vec{s}$ sera orienté le long de l'axe z, direction positive. Ce vecteur, en fasant le produit scalaire avec $\vec{\text{rot}}\vec{A}$ (partie droite de l'éq.(6.6)), va selectionner la composante z du rotationnel, en accord avec l'expression dans l'éq.(6.8).

Dans le cas général, des autres formes du chemin C et d'autres orientations, la démonstration pourrait être rendu proche à la démonstration ci-dessus, pour le cas special. La formule limite (6.6), de tout petit chemin C, reste toujours valable.

Exercice 1. Soit $f(\vec{r})$ une fonction scalaire et $\vec{\nabla}f(\vec{r})$ son gradient. Démontrer que le rotationnel d'un gradient est égale à 0:

$$\vec{\text{rot}}\vec{\nabla}f(\vec{r}) \equiv \vec{\nabla} \wedge \vec{\nabla}f = 0 \tag{6.9}$$

– à condition que $f(\vec{r})$ est une fonction différentiable, c'est à dire qu'elle vérifie la condition $\partial_j\partial_k f = \partial_k\partial_j f$).

Exemple.

Un simple exemple d'un champ vectoriel, avec son rotationnel non-nul, présente le champ de vitesses $\vec{v}(\vec{r})$ des points d'un solide qui tourne, autour d'un axe fixe quelconque, avec la vitesse de rotation $\vec{\omega}$ constante. Dans ce cas:

$$\vec{v}(\vec{r}) = \vec{\omega} \wedge \vec{r} \tag{6.10}$$

– à condition que l'axe de rotation (l'axe de $\vec{\omega}$) passe par l'origine de coordonnées de $\vec{r}$ (des points de solide), Fig.53.

Exercice 2. Calculer $\vec{\text{rot}}\,\vec{v}(\vec{r})$.

Réponse : $\vec{\text{rot}}\,\vec{v}(\vec{r}) = 2\vec{\omega}$

Rotationnel d'un champ $\vec{A}(\vec{r})$ dans les coordonnées curuilignes.

La définition générale du rotationnel, indépendante des systèmes des coordonnées, est donnée par l'éq.(6.6).

Pour déterminer l'expression de $\vec{\text{rot}}\vec{A}(\vec{r})$ dans les coordonnées (u_1, u_2, u_3) quelconques, nous allons suivre la démonstration de l'éq.(6.6), donnée ci-dessus en coordonnées cartesiennes.

Observons que cette démonstration pourait être vue comme la dérivation de l'expression pour $\vec{\text{rot}}\vec{A}(\vec{r})$ en coordonnées cartesiennes, si elle n'avait pas été donnée auparavant par définition, par l'éq.(6.1).

D'une maniére similaire, nous allons choisir, pour un petit chemin fermé C dans l'éq.(6.6), un petit rectangle avec ses côtés parallels à des axes 1 et 2 de la base mobile des coordonnées u_1, u_2, u_3, au point $\vec{r}$ (u_1, u_2, u_3), Fig.54. Avec ce choix nous allons déterminer la composante 3 du rotationnel, tout comme dans le cas des coordonnées cartésiennes.

Avec quelques calculs détaillés dans la Fig.54, on trouve :

$$\text{Cir}_C[\vec{A}] = \oint_C d\vec{r} \cdot \vec{A}(\vec{r}) \simeq du_1 du_2 \left(\frac{\partial}{\partial u_1}(e_2 A_2) - \frac{\partial}{\partial u_2}(e_1 A_1) \right) \tag{6.11}$$

A droite, dans l'éq.(6.6) :

$$d\vec{s} = \hat{\vec{e}}_3 \cdot dl_1 dl_2 = \hat{\vec{e}}_3 \cdot e_1 e_2 du_1 du_2 \tag{6.12}$$

– toujours d'après la Fig.54.

Alors, par l'éq.(6.6), et les equations (6.11), (6.12), on obtient l'équation qui détermine la 3ème composante du rotationnel :

$$\begin{aligned} du_1 du_2 & \left(\frac{\partial}{\partial u_1}(e_2 A_2) - \frac{\partial}{\partial u_2}(e_1 A_1) \right) \\ & \simeq du_1 du_2 \cdot e_1 e_2 \cdot (\vec{\text{rot}}\vec{A})_3 \end{aligned} \tag{6.13}$$

d'où :

$$(\vec{\text{rot}}\vec{A})_3 = \frac{1}{e_1 e_2} \left[\frac{\partial}{\partial u_1}(e_2 A_2) - \frac{\partial}{\partial u_2}(e_1 A_1) \right] \tag{6.14}$$

Evidement, avec d'autres orientations du contour C on déterminera, de la même manière, les composantes 1 et 2 du rotationnel.

En résumant, dans les coordonnées curvilignes, le rotationnel du champ de vecteurs $\vec{A}$ prend la forme suivante :

$$\vec{\text{rot}}\vec{A} = \frac{1}{e_2 e_3} \left[\frac{\partial}{\partial u_2}(e_3 A_3) - \frac{\partial}{\partial u_3}(e_2 A_2) \right] \cdot \hat{\vec{e}}_1$$

$$
\begin{aligned}
&+\frac{1}{e_3e_1}\left[\frac{\partial}{\partial u_3}(e_1A_1)-\frac{\partial}{\partial u_1}(e_3A_3)\right]\cdot\hat{\vec{e}}_2\\
&+\frac{1}{e_1e_2}\left[\frac{\partial}{\partial u_1}(e_2A_2)-\frac{\partial}{\partial u_2}(e_1A_1)\right]\cdot\hat{\vec{e}}_3
\end{aligned}
\tag{6.15}
$$

Dans les coordonnées sphériques ($e_r = 1$, $e_\Theta = r$, $e_\phi = r\cdot\sin\Theta$) :

$$
\begin{aligned}
\vec{\mathrm{rot}}\vec{A} = &\frac{1}{r^2\sin\Theta}\left[\frac{\partial}{\partial\Theta}(r\cdot\sin\Theta\cdot A_\phi)-\frac{\partial}{\partial\phi}(r\cdot A_\Theta)\right]\cdot\hat{\vec{e}}_r\\
&+\frac{1}{r\cdot\sin\Theta}\left[\frac{\partial}{\partial\phi}(A_r)-\frac{\partial}{\partial r}(r\cdot\sin\Theta\cdot A_\phi)\right]\cdot\hat{\vec{e}}_\Theta\\
&+\frac{1}{r}\left[\frac{\partial}{\partial r}(r\cdot A_\Theta)-\frac{\partial}{\partial\Theta}(A_r)\right]\cdot\hat{\vec{e}}_\phi
\end{aligned}
\tag{6.16}
$$

Dans les coordonnées cylindriques ($e_\rho = 1$, $e_\phi = \rho$, $e_z = 1$) :

$$
\begin{aligned}
\vec{\mathrm{rot}}\vec{A} = &\frac{1}{\rho}\left[\frac{\partial}{\partial\phi}(A_z)-\frac{\partial}{\partial z}(\rho A_\phi)\right]\cdot\hat{\vec{e}}_\rho\\
&+\left[\frac{\partial}{\partial z}(A_\rho)-\frac{\partial}{\partial\rho}(A_z)\right]\cdot\hat{\vec{e}}_\phi\\
&+\frac{1}{\rho}\left[\frac{\partial}{\partial\rho}(\rho A_\phi)-\frac{\partial}{\partial\phi}(A_\rho)\right]\cdot\hat{\vec{e}}_z
\end{aligned}
\tag{6.17}
$$

Deuxiéme théorème intégrale : théorème de Stokes.

L'équation locale (6.6), valable pour un petit contour fermé C autour d'un point, pourrait être traduite dans l'équation intégrale, pour un grand chemin C :

$$\oint_C d\vec{r}\cdot\vec{A}(\vec{r}) = \int_{S_C} d\vec{s}\cdot\vec{\mathrm{rot}}\vec{A}(\vec{r}) \tag{6.18}$$

Dans cette équation C est un (grand) contour, fermé, et S_C est une surface, arbitraire, mais bornée par le chemin C, Fig.55. L'équation intégrale (6.18) est appelée théorème de Stokes.

Pour démontrer l'éq. intégrale (6.18), il faut partitionner la surface S_C sur des petits rectangles, qui peuvent être déformés, pour qu'ils remplicent correctement la surface,

Fig.56. Ensuite, l'intégrale à droite dans l'éq.(6.18) est remplacée par la somme correspondante :

$$\int_{S_C} d\vec{s} \cdot \vec{\text{rot}} A(\vec{r}) \simeq \sum_{i=1}^{N} d\vec{s}_i \cdot \vec{\text{rot}} \vec{A}(\vec{r}_i) \tag{6.19}$$

Pour chaque petit rectangle, c'est à dire pour chaque terme correspondant de la somme dans (6.19) il faudra utiliser la formule locale, éq.(6.6), lue de droite à gauche. On trouvera la somme des petites circulations :

$$\sum_{i=1}^{\infty} d\vec{s}_i \cdot \vec{\text{rot}} \vec{A}(\vec{r}_i) \simeq \sum_{i=1}^{N} \oint_{C_i} d\vec{r} \cdot \vec{A} \tag{6.20}$$

sur des petits rectangles $\{C_i\}$, Fig.56. Finalement, en analysant la somme des petites circulations, les long des côtés des petits rectangles, on trouvera que cette somme se réduit à l'intégrale sur le bord de la surface S_C, l'intégrale à gauche dans l'éq.(6.18).

Effectivement, les contributions des circulations qui correspondent à des lien en commun, entre les deux rectangles voisins, Fig.56, ces contributions s'annulent l'un contre l'autre. Car chaque lien en commun est parcouru dans les sens opposés, en produisant les termes (les produit scalaires $d\vec{r}_i \cdot \vec{A}(\vec{r}_i)$), égales en valeur absolue mair des signes opposés.

Il resteront non-componsées les contributions des lien qui se trouvent sur les bord de la surface S_C. La somme ce ces termes represente la somme de Dorbeaux de l'intégrale de chemin à gauche dans l'éq.(6.18).

6.1. COMPLEMENT. Exemples des calculs des circulations, en coordonnées cartésiennes et en coordonnées cylindriques.

Calculs en coordonnées cartésiennes.

<u>Exemple 1.</u>

Circulation d'un champ de vecteurs:

$$\vec{B}(\vec{r}) = \begin{pmatrix} y \\ z \\ x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} B_x \\ B_y \\ B_z \end{pmatrix} \tag{6.21}$$

le long d'un chemin fermée C, le bord d'un carré, du taille $2a \times 2a$, souvelé à la hauteur h le long de l'axe z, Fig.57.

<u>Calcul direct.</u>

On trouve:

$$\mathrm{Cir}_C[\vec{B}] = \oint_C d\vec{r} \cdot \vec{B} = \int_{l_1} d\vec{r} \cdot \vec{B} + \int_{l_2} d\vec{r} \cdot \vec{B} + \int_{l_3} d\vec{r} \cdot \vec{B} + \int_{l_4} d\vec{r} \cdot \vec{B} \tag{6.22}$$

$$\int_{l_1} d\vec{r} \cdot \vec{B}(\vec{r}) = \int_{+a}^{-a} \vec{e}_x dx \cdot \vec{B}(\vec{r}) = \int_{+a}^{-a} dx \cdot B_x(\vec{r}) = \int_{a}^{-a} dx \cdot y \tag{6.23}$$

$y = a$, fixe, sur l_1,

$$= \int_{a}^{-a} dx \cdot a = a \cdot \int_{a}^{-a} dx = a \cdot x|_a^{-a} = a \cdot (-2a) = -2a^2 \tag{6.24}$$

$$\int_{l_1} d\vec{r} \cdot \vec{B} = -2a^2 \tag{6.25}$$

$$\int_{l_2} d\vec{r} \cdot \vec{B}(\vec{r}) = \int_{a}^{-a} \vec{e}_y \cdot dy \cdot \vec{B}(\vec{r}) = \int_{a}^{-a} dy \cdot B_y(\vec{r}) = \int_{a}^{-a} dy \cdot z \tag{6.26}$$

$z = h$, fixe, sur l_2,

$$= \int_{a}^{-a} dy \cdot h = h \cdot \int_{a}^{-a} dy = h \cdot (-2a) = -2ah \tag{6.27}$$

$$\int_{l_2} d\vec{r} \cdot \vec{B} = -2ah \tag{6.28}$$

De la même manière on trouvera

$$\int_{l_3} d\vec{r} \cdot \vec{B}(\vec{r}) = -2a^2 \tag{6.29}$$

$$\int_{l_4} d\vec{r} \cdot \vec{B}(\vec{r}) = 2ha \tag{6.30}$$

En additionnant (6.25), (6.28), (6.29), (6.30), d'après l'éq.(6.22), on trouve:

$$\mathrm{Cir}_C[B] = \sum_{i=1}^{4} \int_{l_i} d\vec{r} \cdot \vec{B}(\vec{r}) = -4a^2 \tag{6.31}$$

<u>Calcul indirect.</u>

Comme le chemin C dans la Fig.57 est fermé, nous pouvons également calculer la circulation sur ce chemin, du champ $\vec{B}(\vec{r})$, en utilisant le théorèm de Stokes, éq.(6.18) :

$$\oint_C d\vec{r} \cdot \vec{B}(\vec{r}) = \int_{S_C} d\vec{s} \cdot \mathrm{r\vec{o}t}\vec{B}(\vec{r}) \tag{6.32}$$

S_C est le carré borné par le chemin C, Figs.57, 58. A droite figure le flux du $\vec{\text{rot}}\vec{B}(\vec{r})$ à travers la surface S_C.

D'après la définition du rotationnel, èq.(6.1),

$$\vec{\text{rot}}\vec{B} = \begin{pmatrix} \partial_y B_z - \partial_z B_y \\ \partial_z B_x - \partial_x B_z \\ \partial_x B_y - \partial_y B_x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \partial_y(x) - \partial_z(z) \\ \partial_z(y) - \partial_x(x) \\ \partial_x(z) - \partial_y(y) \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (\vec{\text{rot}}\vec{B})_x \\ (\vec{\text{rot}}\vec{B})_y \\ (\vec{\text{rot}}\vec{B})_z \end{pmatrix} \tag{6.33}$$

On reprend le calcul dans l'éq.(6.32) :

$$\int_{S_C} d\vec{s} \cdot \vec{\text{rot}}\vec{B}(\vec{r}) = \int_{S_C} dxdy \cdot \vec{e}_z \cdot \vec{\text{rot}}\vec{B}(\vec{r})$$

$$\int_{S_C} dxdy \cdot (\vec{\text{rot}}\vec{B}(\vec{r}))_z = \int_{S_C} dxdy \cdot (-1)$$

$$= (-1) \cdot \int_{S_C} dxdy = (-1) \int_{-a}^{a} dx \int_{-a}^{a} dy = (-1) \cdot 2a \cdot 2a = -4a^2 \tag{6.34}$$

$$\oint_C d\vec{r} \cdot \vec{B}(\vec{r}) = \int_{S_C} d\vec{s} \cdot \vec{\text{rot}}\vec{B}(\vec{r}) = -4a^2 \tag{6.35}$$

en accord avec le résultat du calcul direct, éq.(6.31).

<u>Exemple 2.</u>

Circulation du champ $\vec{B}(\vec{r})$ dans l'éq.(6.21) sur le bord d'un triangle placé dans le plan (x, y), Fig.59.

<u>Calcul direct.</u>

On trouve:

$$\oint_C d\vec{r} \cdot \vec{B} = \int_{l_1} d\vec{r} \cdot \vec{B} + \int_{l_2} d\vec{r} \cdot \vec{B} + \int_{l_3} d\vec{r} \cdot \vec{B} \tag{6.36}$$

Sur l_1:

$$d\vec{r} = \vec{e}_x \cdot dx, \quad dx \text{ positif} \tag{6.37}$$

– Fig.59.

Sur l_3 :

$$d\vec{r} = \vec{e}_y \cdot dy, \quad dy \text{ négatif} \tag{6.38}$$

Pour trouver la forme de $d\vec{r}$ sur l_2 il faut utiliser l'équation de la doite, dont l_2 est un segment. Cette équation est comme suit :

$$x + y = a \tag{6.39}$$

Alors, en calculant la différentielle de cette équation (c'est à dire, en se déplaçant le long de l_2) on trouve :

$$dx + dy = 0 \tag{6.40}$$

Cette équation nous dit que, quand on se deplace le long du segment l_2, les variations des coordonnées d'un point (x, y), (qui se déplace le long de l_2) sont liées entre eux :

$$dy = -dx \tag{6.41}$$

Autrement :

$$\begin{aligned} d\vec{r} &= \begin{pmatrix} dx \\ dy \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} dx \\ -dx \end{pmatrix} \\ &= \vec{e}_x \cdot dx - \vec{e}_y \cdot dx = (\vec{e}_x - \vec{e}_y)dx \end{aligned} \tag{6.42}$$

En utilisant les formes de $d\vec{r}$ sur l_1, l_2, l_3, éqs.(6.37), (6.38), (6.42), on calcule les intégrales de chemins dans (6.36).

$$\int_{l_1} d\vec{r} \cdot \vec{B} = \int_{)}^{a} dx \cdot \vec{e}_x \vec{B}(\vec{r}) = \int_0^a dx \cdot B_x(\vec{r}) = \int_0^a dx \cdot y \tag{6.43}$$

Sur l_1, $y = 0$, fixe,

$$\int_{l_1} d\vec{r} \cdot \vec{B} = 0 \tag{6.44}$$

$$\int_{l_3} d\vec{r} \cdot \vec{B} = \int_a^0 dy \cdot \vec{e}_y \cdot \vec{B}(\vec{r}) = \int_a^0 dy B_y(\vec{r}) = \int_a^0 dy \cdot z \tag{6.45}$$

Sur l_2, $z = 0$, fixe, (Fig.59),

$$\int_{l_3} d\vec{r} \cdot \vec{B} = 0 \tag{6.46}$$

$$\int_{l_2} d\vec{r} \cdot \vec{B} = \int_a^0 dx (\vec{e}_x - \vec{e}_y) \cdot \vec{B}(\vec{r}) \tag{6.47}$$

– quand on monte le chemin l_2, Fig.59 à droite, coordonnée x, du point qui monte, varie de a à 0,

$$= \int_a^0 dx \cdot (B_x(\vec{r}) - B_y(\vec{r})) = \int_a^0 dx \cdot (y - z) \tag{6.48}$$

$z = 0$ sur l_2, fixe,

$$= \int_a^0 dx \cdot y \tag{6.49}$$

– quand on monte l_2, y varie en fonction de x ; à ce point du calcul il faudra utiliser l'équation de la droite l_2 encore une fois ; par l'éq.(6.39), $y = a - x$,

$$= \int_a^0 dx \cdot (a - x) = a \cdot x|_a^0 - \frac{x^2}{2}|_a^0$$

$$= -a^2 + \frac{a^2}{2} = -\frac{a^2}{2} \tag{6.50}$$

$$\int_{l_2} d\vec{r} \cdot \vec{B} = -\frac{a^2}{2} \tag{6.51}$$

En ajoutant (6.44), (6.46), (6.51), d'après l'éq.(6.36), on trouve :

$$\oint_C d\vec{r} \cdot \vec{B} = -\frac{a^2}{2} \tag{6.52}$$

Calcul indirect.

Le chemin C dans la Fig.59 étant fermé, nous pouvons utiliser le théorème de Stokes :

$$\oint_C d\vec{r} \cdot \vec{B} = \int_{S_C} d\vec{s} \cdot \vec{\mathrm{rot}}\vec{B} \tag{6.53}$$

$d\vec{s}$ et la surface S_C, du triangle, sont indiqués dans la Fig.60 ; $\vec{\mathrm{rot}}\vec{B}$ a été calculé auparavant, éq.(6.33) ; on obtient :

$$\int_{S_C} d\vec{r} \cdot \vec{\mathrm{rot}}\vec{B} = \int_{S_C} dx\, dy \vec{e}_z \cdot \vec{\mathrm{rot}}\vec{B}$$

$$= \int_{S_C} dx\, dy (\vec{\mathrm{rot}}\vec{B})_z = \int_{S_C} dx\, dy \cdot (-1) = (-1) \int_0^a dx \int_0^{y(x)} dy \tag{6.54}$$

$y(x) = a - x$ correspond toujour à l'équation du bord l_2 du triangle, Figs.59,60, éq.(6.39);

$$= (-1) \int_0^a dx \int_0^{a-x} dy = (-1) \int_0^a dx \cdot (a - x)$$

$$= (-1) \cdot (ax - \frac{x^2}{2})|_0^a = (-1) \cdot (a^2 - \frac{a^2}{2} \tag{6.55}$$

$$\oint_C d\vec{r} \cdot \vec{B} = \int_{S_C} d\vec{s} \cdot \vec{\mathrm{rot}}\vec{B} = -\frac{a^2}{2} \tag{6.56}$$

– en accord avec le résultat du calcul direct, éq.(6.52).

Calcul en coordonnées cylindriques.

Exemple 3 – exercice.

Soit un champ de vecteurs

$$\vec{v}(\vec{r}) = \vec{\omega} \wedge \vec{r} \tag{6.57}$$

où $\vec{\omega}$ est un vecteur constant de la forme :

$$\vec{\omega} = \omega \cdot \vec{e}_z \tag{6.58}$$

ω est une constante. Dans la suite nous allons utiliser les coordonnées cylindriques et la base mobile de ces coordonnées, au point $\vec{r}$, Fig.61.

1. Verifier que, par rapport à la base mobile des coordonnées cylindriques, les vecteurs $\vec{\omega}$ et $\vec{r}$ ont les composantes :

$$\vec{\omega} = \begin{pmatrix} \omega_\rho \\ \omega_\phi \\ \omega_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \omega \end{pmatrix} \tag{6.59}$$

$$\vec{r} = \begin{pmatrix} r_\rho \\ r_\phi \\ r_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \rho \\ 0 \\ z \end{pmatrix} \tag{6.60}$$

Vérifier ensuite que le vecteur $\vec{v}(\vec{r})$, éq.(6.57), dans cette même base, et de la forme :

$$v(\vec{r}) = \vec{\omega} \wedge \vec{r} = \begin{pmatrix} 0 \\ \rho\omega \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_\rho \\ v_\phi \\ v_z \end{pmatrix} \tag{6.61}$$

Rappelons que

$$\vec{\omega} \wedge \vec{r} = \begin{pmatrix} \omega_2 r_3 - \omega_3 r_2 \\ \omega_3 r_1 - \omega_1 r_3 \\ \omega_1 r_2 - \omega_2 r_3 \end{pmatrix} \tag{6.62}$$

avec $1 \sim \rho$, $2 \sim \phi$, $3 \sim z$ en coordonnées cylindriques.

2. Avec le calcul direct, calculer les circulations :

$$\mathrm{Cir}_{C_1}[\vec{v}] = \oint_{C_1} d\vec{r} \cdot \vec{v}(\vec{r}) \tag{6.63}$$

$$\mathrm{Cir}_{C_2}[\vec{v}] = \oint_{C_2} d\vec{r} \cdot \vec{v}(\vec{r}) \tag{6.64}$$

sur les chemins C_1, C_2 qui sont les cercles de rayon R, dans les Figs.63,64.

Indications :

$$\oint_C d\vec{r} \cdot \vec{v} = \oint_C dr_\phi \hat{\vec{e}}_\phi \cdot \vec{v} = \oint_C dr_\phi \cdot v_\phi = ... \tag{6.65}$$

Les composantes de $d\vec{r}$ dans la base mobile des coordonnées cylindriques sont données par l'éq.(5.51).

3. Calculer $\mathrm{Cir}_{C_1}[\vec{v}]$ et $\mathrm{Cir}_{C_2}[\vec{v}]$ par le calcul indirect, en utilisant le théorème de Stokes.

Indications :

$$\oint_C d\vec{r} \cdot \vec{v} = \int_{S_C} d\vec{s} \cdot \mathrm{r\vec{o}t}\vec{v}$$
$$= \int_{S_C} ds_z \cdot \hat{\vec{e}}_z \cdot \mathrm{r\vec{o}t}\vec{v} = \int_{S_C} ds_z (\mathrm{r\vec{o}t}\vec{v})_z = ... \tag{6.66}$$

ds_z est donné par l'éq.(5.52) ; $\mathrm{r\vec{o}t}\vec{v}$ se calcule par l'expression du rotationnel en cylindriques, eq.(6.17), pour $\vec{v}(\vec{r})$ dans (6.61).

Réponses :

$$\mathrm{Cir}_{C_1}[v] = \mathrm{Cir}_{C_2}[v] = 2\pi R^2 \omega \tag{6.67}$$

7 Laplacien.

Définition. Opérateur différentiel laplacien est défini, dans les coordonnées cartisiennes, par l'expression:

$$\Delta \stackrel{\text{déf}}{=} \vec{\nabla}^2 \equiv (\vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla}) = \partial_x^2 + \partial_y^2 + \partial_z^2 \tag{7.1}$$

Cet opérateur pourrait être appliqué à une fonction scalaire $f(\vec{r})$, tout comme à une fonction vectorielle $\vec{A}(\vec{r})$. Dans le cas d'une fonction vectorielle, opérateur Δ s'applique à chaqueune des composantes de $\vec{A}(\vec{r})$ comme à une fonction scalaire :

$$\Delta\vec{A}(\vec{r}) = \begin{pmatrix} \Delta A_x(\vec{r}) \\ \Delta A_y(\vec{r}) \\ \Delta A_z(\vec{r}) \end{pmatrix} \tag{7.2}$$

En soi-même, laplacien est un opérateur différentiel scalaire, en comparaison avec l'opérateur nabla, $\vec{\nabla}$, qui est un opérateur vectoriel.

Opérateur laplacien apparait dans l'analyse et la déscription d'énormement des problèmes physiques. On peut citer deux exemples:

1) Propogation des ondes, soit acoustiques, soit électromagnétiques; dans le cas de propogation des ondes acoustiques, le laplacien est appliqué à un champ vectoriel, disons $\vec{A}(\vec{r})$, qui décrit les déplacements des points d'un milieu élastique de leurs positions d'équilibre.

L'équation de propogation des ondes est de la forme:

$$\frac{1}{u^2}\partial_t^2\vec{A}(t,\vec{r}) = \Delta\vec{A}(t,\vec{r}) \tag{7.3}$$

u est la vitesse de propogation des ondes dans un milieu. Ce processus est dynamique. En conséquence, le champ $\vec{A}$ dépend du temps, t, en plus des coordonnées $\vec{r}$ des points du milieu.

2) Potentiel électrique $U(\vec{r})$, dans le cas d'électrostatique; $U(\vec{r})$ est une fonction scalaire de $\vec{r}$ qui vérifie l'équation:

$$\Delta U(\vec{r}) = -\frac{\rho(\vec{r})}{\epsilon_0} \tag{7.4}$$

ϵ_0 est une constante physique; $\rho(\vec{r})$ est la densité de charge électrique qui est répandue dans un milieu.

Exercices.

Calculer les applications de l'operateur laplacien dans les cas suivants:

$$1) \quad \Delta r \tag{7.5}$$

$$2) \quad \Delta r^2 \tag{7.6}$$

$$3) \quad \Delta \frac{1}{r}, \quad \text{pour} \quad r \neq 0 \tag{7.7}$$

$$4)^* \quad \Delta \frac{(\vec{p} \cdot \vec{r})}{r^3}, \quad \text{pour} \quad r \neq 0 \tag{7.8}$$

Indications.

$$\Delta r = (\vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla}) r = (\vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla} r) = (\vec{\nabla} \cdot \frac{\vec{r}}{r}) = (\vec{\nabla} \cdot \vec{r}) \frac{1}{r} + (\vec{r} \cdot \vec{\nabla} \frac{1}{r}) = ... \tag{7.9}$$

Une étoile sur l'exercice 4) signifie que le calcul sera relativement compliqué; en général, les exercices avec une étoile ne sont pas obligatoires. Par contre, pourriez vous deviner la réponse, sans calcul, en fasant appel à la signification physique de ce cas particulier?

Opérateur laplacien dans les coordonnées curviliques.

L'opérateur laplacien, éq.(7.1), appliqué a une fonction scalaire $f(\vec{r})$ pourrait être vu comme la suite de deux opérations :

$$\Delta f(\vec{r}) = (\vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla}) f(\vec{r}) = \vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} f(\vec{r})) \tag{7.10}$$

– d'abord on calcule le gradient de $f(\vec{r})$, $\vec{\text{grad}} f(\vec{r})$, et ensuite on calcule la divergence du champ vectoriel, qui est, cette fois-ci, $\vec{\text{grad}} f(\vec{r})$:

$$\Delta f(\vec{r}) = \text{div}\, \vec{\text{grad}} f(\vec{r}) \tag{7.11}$$

C'est cette dernière interpretation du laplacien, éq.(7.11), qui est considérée comme sa définition générale, indépendante du système de coordonnées.

Alors, en coordonnées curvilignes, pour écrire le laplacien de $f(\vec{r})$, il faut juste y mettre le $\vec{\text{grad}} f(u_1,\, u_2,\, u_3)$, en curviligues, éq.(4.16), et ensuite écrire la divergence de $\vec{\text{grad}} f$, toujours en curvilignes, éq.(5.20), avec $\vec{A}(u_1,\, u_2,\, u_3) = \vec{\text{grad}} f(u_1,\, u_2,\, u_3)$. De cette manière on obtient l'expression suivante, pour le laplacien d'une fonction scalaire $f(u_1,\, u_2,\, u_3)$, en coordonnées curvilignes :

$$\Delta f = \text{div } \vec{\text{grad}} f = \frac{1}{e_1 e_2 e_3}\left[\frac{\partial}{\partial u_1}\left(\frac{e_2 e_3}{e_1}\frac{\partial f}{\partial u_1}\right) + \frac{\partial}{\partial u_2}\left(\frac{e_3 e_1}{e_2}\frac{\partial f}{\partial u_2}\right) + \frac{\partial}{\partial u_3}\left(\frac{e_1 e_2}{e_3}\frac{\partial f}{\partial u_3}\right)\right] \tag{7.12}$$

Dans les coordonnées sphériques ($e_1 = e_r = 1$, $e_2 = e_\Theta = r$, $e_3 = r \cdot \sin\Theta$) :

$$\Delta f = \frac{1}{r^2 \sin\Theta}\left[\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2 \sin\Theta \frac{\partial f}{\partial r}\right) + \frac{\partial}{\partial \Theta}\left(\sin\Theta \frac{\partial f}{\partial \Theta}\right) + \frac{\partial}{\partial \phi}\left(\frac{1}{\sin\Theta}\frac{\partial f}{\partial \phi}\right)\right] \tag{7.13}$$

En coordonnées cylindriques ($e_1 = e_\rho = 1$, $e_2 = e_\phi = \rho$, $e_3 = e_z = 1$) :

$$\Delta f = \frac{1}{\rho}\left[\frac{\partial}{\partial \rho}\left(\rho \frac{\partial f}{\partial \rho}\right) + \frac{\partial}{\partial \phi}\left(\frac{1}{\rho}\frac{\partial f}{\partial \phi}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\rho \frac{\partial f}{\partial z}\right)\right] \tag{7.14}$$

<u>Exercices.</u>

5) Soit $f(\vec{r}) = f(r)$ une une fonction radiale : fonction sphérique symétrique, c'est à dire, une fonction dépendante de $r = |\vec{r}|$ mais indépendante de Θ et ϕ.

A partir de l'éq.(7.13), démontrer que dans ce cas.

$$\Delta f(r) = \frac{1}{r^2}\partial_r(r^2 \partial_r f) = \frac{\partial^2 f}{\partial r^2} + \frac{2}{r}\frac{\partial f}{\partial r} \tag{7.15}$$

6) En utilisant la forme simplifiée (7.15) du laplacien en coordonnées sphériques dans le cas des fonctions radiales, récalculer les exercices 1) – 3), éqs (7.5)-(7.7). Comparer les résultats obtenus avec ceux des calculs en coordonnées cartesiennes.

7) Soit $f(\vec{r}) = f(\rho, z)$ axiale-symétrique : une fonction indépendante de ϕ, dans les coordonnées cylindriques. Démontrer, dans ce cas, la forme simplifiée suivante, du laplacien en coordonnées cylindriques :

$$\begin{aligned}\Delta f(\rho, z) &= \frac{1}{\rho}\partial_\rho(\rho \partial_\rho f) + \partial_z^2 f \\ &= \frac{\partial^2}{\partial \rho^2} f + \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial \rho} f + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}\end{aligned} \tag{7.16}$$

8 Formules différentielles.

Dans ce chapitre nous allons présenter quelques propriétés des opérateurs différentiels $\vec{\text{grad}}$, div, $\vec{\text{rot}}$, Δ.

1)

$$\vec{\text{grad}}(f \cdot g) = \vec{\text{grad}} f \cdot g + f \cdot \vec{\text{grad}}\, g \tag{8.1}$$

$f = f(\vec{r})$, $g = g(\vec{r})$ sont deux fonctions scalaires.

En coordonnées cartesiennes, en utilisant l'opérateur nabla, $\vec{\nabla}$, l'équation (8.1) s'écrit comme suit :

$$\vec{\nabla}(f \cdot g) = \vec{\nabla} f \cdot g + f \cdot \vec{\nabla} g \tag{8.2}$$

Remarque 1.

La règle de dérivation qui est similaire à la règle correspondante pour un produit des fonctions d'une seule variable, $f(x)$ et $g(x)$:

$$\frac{d}{dx}(f(x)g(x)) = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x) \tag{8.3}$$

Remarque 2.

Nous allons donner la démonstration de l'éq.(8.1), tout comme des équations qui vont suivre, dans leur versions cartésiennes : l'éq(8.2) dans le cas de la propriété première, éq.(8.1). La raison est que, pour des équations de ce chapitre, une fois une propriété est démontrée dans des coordonnées particulières, cette propriété reste vraie dans tous les autres coordonnées. On dit que nos équations sont invariantes par rapport aux changements des coordonnées. Tandis que les démonstrations formelles sont plus simples en coordonnées cartésiennes.

Démonstration.

Pour $\vec{\nabla}(f \cdot g)$, à gauche dans l'éq.(8.2), on trouve :

$$\begin{pmatrix} \partial_x(fg) \\ \partial_y(fg) \\ \partial_z(fg) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \partial_x f \cdot g + f \cdot \partial_x g \\ \partial_y f \cdot g + f \cdot \partial_y g \\ \partial_z f \cdot g + f \cdot \partial_z g \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \partial_x f \cdot g \\ \partial_y f \cdot g \\ \partial_z f \cdot g \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} f \cdot \partial_x g \\ f \cdot \partial_y g \\ f \cdot \partial_z g \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \partial_x f \\ \partial_y f \\ \partial_z f \end{pmatrix} g + f \begin{pmatrix} \partial_x g \\ \partial_y g \\ \partial_z g \end{pmatrix} = \vec{\nabla} f \cdot g + f \cdot \vec{\nabla} g \tag{8.4}$$

2)

$$\mathrm{div}(f \cdot \vec{A}) = \vec{\mathrm{grad}} f \cdot \vec{A} + f \cdot \mathrm{div}\vec{A} \tag{8.5}$$

$f = f(\vec{r})$ est une fonction scalaire et $\vec{A} = \vec{A}(\vec{r})$ est une fonction vectorielle. En coordonnées cartésiennes :

$$\vec{\nabla} \cdot (f \cdot \vec{A}) = \vec{\nabla} f \cdot \vec{A} + f \cdot (\vec{\nabla} \cdot \vec{A}) \tag{8.6}$$

<u>Démonstration.</u>

$$\begin{aligned} \vec{\nabla} \cdot (f \cdot \vec{A}) &= \partial_x (f A_x) + \partial_y (f A_y) + \partial_z (f A_z) \\ &= \partial_x f \cdot A_x + f \cdot \partial_x A_x + \partial_y f \cdot A_y + f \cdot \partial_y A_y + \partial_z f \cdot A_z + f \cdot \partial_z A_z \\ &= \partial_x f \cdot A_x + \partial_y f \cdot A_y + \partial_z f \cdot A_z \\ &\quad + f \cdot (\partial_x A_x + \partial_y A_y + \partial_z A_z) \\ &= \vec{\nabla} f \cdot \vec{A} + f \cdot \mathrm{div}\vec{A} \end{aligned} \tag{8.7}$$

3)

$$\mathrm{div}\, \vec{\mathrm{rot}} \vec{A} = 0 \tag{8.8}$$

$\vec{A} = \vec{A}(\vec{r})$ est une fonction vectorielle (un champ de vecteurs). L'appication de $\mathrm{div}\, \vec{\mathrm{rot}}$ donne zéro pour toute $\vec{A}(\vec{r})$. En cartésiennes :

$$\vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} \wedge \vec{A}) = 0 \tag{8.9}$$

<u>Démonstration.</u>

$$\mathrm{div}\,\vec{\mathrm{rot}}\vec{A} = \partial_x(\vec{\mathrm{rot}}\vec{A})_x + \partial_y(\vec{\mathrm{rot}}\vec{A})_y + \partial_z(\vec{\mathrm{rot}}\vec{A})_z$$

$$= \partial_x(\partial_y A_z - \partial_z A_y) + \partial_y(\partial_z A_x - \partial_x A_z) + \partial_z(\partial_x A_y - \partial_y A_x)$$

$$= \partial_x\partial_y A_z - \partial_x\partial_z A_y + \partial_y\partial_z A_x - \partial_y\partial_x A_z + \partial_z\partial_x A_y - \partial_z\partial_y A_x = 0 \tag{8.10}$$

4)

$$\mathrm{div}(\vec{A} \wedge \vec{B}) = \vec{\mathrm{rot}}\vec{A} \cdot \vec{B} - \vec{A} \cdot \vec{\mathrm{rot}}\vec{B} \tag{8.11}$$

$\vec{A} = \vec{A}(\vec{r})$, $\vec{B} = \vec{B}(\vec{r})$ sont deux champs de vecteurs et $\vec{A} \wedge \vec{B}$ est leur produit exterieur (vectoriel). En cartésiennes :

$$\vec{\nabla} \cdot (\vec{A} \wedge \vec{B}) = (\vec{\nabla} \wedge \vec{A}) \cdot \vec{B} - \vec{A} \cdot (\vec{\nabla} \wedge \vec{B}) \tag{8.12}$$

<u>Démonstration.</u>

$$\vec{\nabla} \cdot (\vec{A} \wedge \vec{B}) = \partial_x(\vec{A} \wedge \vec{B})_x + \partial_y(\vec{A} \wedge \vec{B})_y + \partial_z(\vec{A} \wedge \vec{B})_z$$

$$= \partial_x(A_y B_z - A_z B_y) + \partial_y(A_z B_x - A_x B_z) + \partial_z(A_x B_y - A_y B_x)$$

$$= \partial_x A_y \cdot B_z + A_y \cdot \partial_x B_z - \partial_x A_z \cdot B_y - A_z \cdot \partial_x B_y$$

$$+\partial_y A_z \cdot B_x + A_z \cdot \partial_y B_x - \partial_y A_x \cdot B_z - A_x \cdot \partial_y B_z$$

$$+\partial_z A_x \cdot B_y + A_x \cdot \partial_z B_y - \partial_z A_y \cdot B_x - A_y \cdot \partial_z B_x$$

$$= (\partial_x A_y - \partial_y A_x)B_z + (\partial_z A_x - \partial_x A_z)B_y + (\partial_y A_z - \partial_z A_y)B_x$$

$$-A_x(\partial_y B_z - \partial_z B_y) - A_y(\partial_z B_x - \partial_x B_z) - A_z(\partial_x B_y - \partial_y B_x)$$

$$= (\vec{\nabla} \wedge \vec{A}) \cdot \vec{B} - \vec{A} \cdot (\vec{\nabla} \wedge \vec{B}) \tag{8.13}$$

5)

$$\vec{\mathrm{rot}}(f \cdot \vec{A}) = \vec{\mathrm{grad}} f \wedge \vec{A} + f \cdot \vec{\mathrm{rot}}\vec{A} \tag{8.14}$$

En coordonnées cartésiennes :

$$\vec{\nabla} \wedge (f\vec{A}) = \vec{\nabla} f \wedge \vec{A} + f(\vec{\nabla} \wedge \vec{A}) \tag{8.15}$$

Démonstration.

$$\vec{\text{rot}}(f\vec{A}) = \begin{pmatrix} \partial_y(fA_z) - \partial_z(fA_y) \\ \partial_z(fA_x) - \partial_x(fA_z) \\ \partial_x(fA_y) - \partial_y(fA_x) \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} \partial_y f \cdot A_z - \partial_z f \cdot A_y + f \cdot (\partial_y A_z - \partial_z A_y) \\ \partial_z f \cdot A_x - \partial_x f \cdot A_z + f \cdot (\partial_z A_x - \partial_x A_z) \\ \partial_x f \cdot A_y - \partial_y f \cdot A_x + f \cdot (\partial_x A_y - \partial_y A_x) \end{pmatrix}$$
$$= \vec{\text{grad}} f \wedge \vec{A} + f \cdot \vec{\text{rot}}\vec{A} \tag{8.16}$$

6)

$$\vec{\text{rot}}\, \vec{\text{grad}} f = 0 \tag{8.17}$$

En cartesiennes :

$$\vec{\nabla} \wedge \vec{\nabla} f = 0 \tag{8.18}$$

– application de $\vec{\text{rot}}\, \vec{\text{grad}}$ à toute fonction scalaire $f(\vec{r})$ donne zéro.

Démonstration de cette propriété a été suggerée en exercice dans le chapitre 6, éq.(6.9).

7)

$$\vec{\text{rot}}(\vec{\text{rot}}\vec{A}) = \vec{\text{grad}}(\text{div}\vec{A}) - \Delta\vec{A} \tag{8.19}$$

En cortesiennes :

$$\vec{\nabla} \wedge (\vec{\nabla} \wedge \vec{A}) = \vec{\nabla}(\vec{\nabla} \cdot \vec{A}) - \vec{\nabla}^2 \vec{A} \tag{8.20}$$

Démonstration.

$$\vec{\text{rot}}(\vec{\text{rot}}\vec{A}) = \begin{pmatrix} \partial_y(\vec{\text{rot}}\vec{A})_z - \partial_z(\vec{\text{rot}}\vec{A})_y \\ \partial_z(\vec{\text{rot}}\vec{A})_x - \partial_x(\vec{\text{rot}}\vec{A})_z \\ \partial_x(\vec{\text{rot}}\vec{A})_y - \partial_y(\vec{\text{rot}}\vec{A})_x \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} \partial_y(\partial_x A_y - \partial_y A_x) - \partial_z(\partial_z A_x - \partial_x A_z) \\ \partial_z(\partial_y A_z - \partial_z A_y) - \partial_x(\partial_x A_y - \partial_y A_x) \\ \partial_x(\partial_z A_x - \partial_x A_z) - \partial_y(\partial_y A_z - \partial_z A_y) \end{pmatrix}$$

$$
\begin{aligned}
&= \begin{pmatrix} \partial_x(\partial_y A_y) + \partial_x(\partial_z A_z) - \partial_y^2 A_x - \partial_z^2 A_x \\ \partial_y(\partial_z A_z) + \partial_y(\partial_x A_x) - \partial_z^2 A_y - \partial_x^2 A_y \\ \partial_z(\partial_x A_x) + \partial_z(\partial_y A_y) - \partial_x^2 A_z - \partial_y^2 A_z \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \partial_x(\partial_x A_x + \partial_y A_y + \partial_z A_z) - (\partial_x^2 + \partial_y^2 + \partial_z^2) A_x \\ \partial_y(\partial_x A_x + \partial_y A_y + \partial_z A_z) - (\partial_x^2 + \partial_y^2 + \partial_z^2) A_y \\ \partial_z(\partial_x A_x + \partial_y A_y + \partial_z A_z) - (\partial_x^2 + \partial_y^2 + \partial_z^2) A_z \end{pmatrix} \\
&= \vec{\mathrm{grad}}\, \mathrm{div} \vec{A} - \Delta \vec{A}
\end{aligned} \tag{8.21}
$$

9 Deux examples d'applications physiques.

9.1. Première application physique : un cas simple d'électrostatique.

Dans le cas d'électrostatique, les équations d'électromagnétisme, les équations de Maxwell, se réduisent à des équations :

$$div\vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} \tag{9.1}$$

$$r\vec{o}t\vec{E} = 0 \tag{9.2}$$

où $\rho = \rho(\vec{r})$ est la densité de charges distribuées dans l'espace; ϵ_0 est la constante physique; $\vec{E}(\vec{r})$ est le champ électrique.

Eq.(9.2) permet de présenter $\vec{E}$ comme un gradient d'une fonction scalaire $V(\vec{r})$

$$\vec{E} = -gr\vec{a}dV \tag{9.3}$$

$V(\vec{r})$ est appelé potentiel scalaire, ou potentiel électrique. Avec $\vec{E}$ exprimé par (9.3), l'éq.(9.2) est vérifiée automatiquement, car $r\vec{o}tgr\vec{a}d = \vec{0}$.

Alors, en terme du potentiel, l'éq.(9.1) prend la forme

$$-divgr\vec{a}dV = \frac{\rho}{\epsilon_0} \tag{9.4}$$

c'est-ce qui est

$$-\Delta U(\vec{r}) = \frac{\rho}{\epsilon_0} \tag{9.5}$$

Nous avons utilisé le fait que

$$divgr\vec{a}dV = \Delta V \tag{9.6}$$

En résumant, les équations d'électrostatique prennent la forme :

$$-\Delta U(\vec{r}) = \frac{\rho(\vec{r})}{\epsilon_0} \tag{9.7}$$

$$\vec{E} = -gr\vec{a}dV \tag{9.8}$$

Eq.(9.7) est appelée également l'équation de Poisson.

Dans la suite nous allons chercher la solution de l'éq.(9.7), le potentiel électrique $V(\vec{r})$, créé par une boule de rayon a uniformement chargée, c'est un dire, par la distribution de charges, $\rho(\vec{r})$, de la forme :

$$\rho(\vec{r}) = \rho(r)$$

$$\rho(r) = \rho_0, \quad r < a$$

$$\rho(r) = 0, \quad r > a \tag{9.9}$$

Dans ce cas particulier l'éq. de Poisson (9.7) prend la forme :

$$\Delta V = -\frac{\rho_0}{\epsilon_0}, \quad r < a \tag{9.10}$$

$$\Delta V = 0, \quad r > a \tag{9.11}$$

La distribution de charges $\rho(r)$ dans (9.9) est une fonction discontinue en $r = a$. Pour des raisons physiques, et des raisons purement mathématiques également, $V(r)$ et $\partial_r V(r)$ doivent être continues à $r = a$. (En intégrant l'éq. (9.10)-(9.11) sur r de $a - \epsilon$ à $a + \epsilon$, on trouvera 0, à droite, dans la limite $\epsilon \to 0$, et on trouvera le résultat non nul, à gauche, si $\partial_r V(r)$ est discontinue).

Nous allons chercher, dans la suite, la solutien des éq.(10), (11), avec ces conditions de continuité en plus.

Comme $\rho(\vec{r})$ est une fonction radicale, éq.(9.9), nous allons cherche $V(\vec{r})$, solution des éq. (9.10)-(9.11), également dans la forme d'une fonction radiale, fonction de r uniquement.

On se rappelle qu'en cas d'une fonction radiale, $f(\vec{r}) = f(r)$, le laplacien de cette fonction prend une forme relativement simple, en coordonnées sphériques :

$$\Delta f(r) = \frac{1}{r^2}\partial_r(r^2 \partial_r f(r)) \tag{9.12}$$

Alors les équations (9.10), (9.11) prennent les formes :

$$\frac{1}{r^2}\partial_r(r^2 \partial_r V(r)) = -\frac{\rho_0}{\epsilon_0}, \quad r < a \tag{9.13}$$

$$\frac{1}{r^2}\partial_r(r^2\partial_r V(r)) = 0, \quad r > a \tag{9.14}$$

Nous allons intégrer ces équations, une aprés l'autre.

<u>$r < a$</u>, éq.(9.13).

$$\partial_r(r^2\partial_r V(r)) = -\frac{\rho_0}{\epsilon_0} \cdot r^2 \tag{9.15}$$

$$r^2\partial_r V(r) = -\frac{\rho_0}{\sigma_0} \cdot \frac{r^3}{3} + C_1 \tag{9.16}$$

$$\partial_r V(r) = -\frac{\rho_0}{\epsilon_0} \cdot \frac{r}{3} + \frac{C_1}{r^2} \tag{9.17}$$

C_1 dans (9.16), (9.17) est une constante d'intégration. Sa valeur on peut choisir. Pour des raisons physiques nous allons choisir $C_1 = 0$.

En effet, si $C_1 \neq 0$ alors $\partial_r V(r)$ et $V(r)$ auront la singularité en $r = 0$, une divergence. C'est à dire $\partial V(r)$, $V(r) \to \infty$ quand $r \to 0$, si $C_1 \neq 0$. Comme $\rho(r)$ est régulier en $r = 0$, il n'y a pas des raisons pour la singularité dans $V(r)$. Autrement dit, la solution (9.17) avec $C_1 \neq 0$ est bien une solution mathématique, mais pas une solution physique de notre problème. La solution pour $\partial_r V(r)$ que nous allons rétenir est de la forme :

$$\partial_r V(r) = -\frac{\rho_0}{\epsilon_0} \cdot \frac{r}{3} \tag{9.18}$$

En intégrant cette équation on trouve :

$$V(r) = -\frac{\rho_0}{\epsilon_0} \cdot \frac{r^2}{6} + C_2 \tag{9.19}$$

C_2 est une autre constante d'intégration. Il n'y a pas des raisons de lui écarter. Nous allons déterminer sa valeur plus bas avec des conditions de continuité à $r = a$.

<u>$r > a$</u>, éq.(9.14).

$$\partial_r(r^2\partial_r V(r)) = 0 \tag{9.20}$$

$$r^2\partial_r V(r) = C_3 \tag{9.21}$$

$$\partial_r V(r) = \frac{C_3}{r^2} \tag{9.22}$$

C_3 est une autre encore constante d'integration. Il n'y a pas des contraintes sur C_3 de côtè de $r \to 0$, car nous sommes à l'intervalle $r > a$.

En intégrant (9.22) on trouve :

$$V(r) = (r) = -\frac{C_3}{r} + C_4 \tag{9.23}$$

C_4 est le 4éme constante d'intégration. Toujours il n'y a pas des contraintes pour le moment sur C_3, mais la valeur de C_4, nous pouvons la choisir. En effet, car $\vec{E}(r) = -\vec{grad}V(r)$, où l'opérateur $\vec{grad}$ s'exprime par la dérivée, nous nouvons ajouter ou rétirer une constante de $V(r)$, ça ne changera pas la valeur de $\vec{E}(r)$. Autrement dit, $V(r)$ est défini à une constante prèt. Nous allons utiliser cette liberté dans la définition de $V(r)$ pour choisir (mais cette fois-ci c'est notre choix) que

$$V(r) \to 0, \quad \text{quand} \quad r \to \infty \tag{9.24}$$

Avec cette condition en plus, nous allons mettre $C_4 = 0$ dans (9.23). Dans la région $r > a$, $V(r)$ prendra la forme :

$$V(r) = -\frac{C_3}{r} \tag{9.25}$$

En résumant nous calculs jusque présent :

$r < a.$

$$\partial_r V(r) = -\frac{\rho_0}{\epsilon_0} \cdot \frac{r}{3} \tag{9.26}$$

$$V(r) = -\frac{\rho_0}{\epsilon_0} \cdot \frac{r^2}{6} + C_2 \tag{9.27}$$

$r > a.$

$$\partial_r V(r) = \frac{C_3}{r^2} \tag{9.28}$$

$$V(r) = -\frac{C_3}{r} \tag{9.29}$$

Ensuite, nous appliquerons les conditions de continuité à $r = a$.

Continuité de $\partial_r V(r)$ à $r = a$.

Par (9.26),

$$\partial_r V(r)|_{r=a} = -\frac{\rho_0}{\epsilon_0} \cdot \frac{a}{3} \tag{9.30}$$

Par (9.28),

$$\partial_r V(r)|_{r=a} = \frac{C_3}{a^2} \tag{9.31}$$

En égalisant, on trouve

$$\frac{C_3}{a^2} = -\frac{\rho_0}{\epsilon_0}\frac{a}{3} \tag{9.32}$$

$$C_3 = -\frac{\rho_0}{\epsilon_0} \cdot \frac{a^3}{3} \tag{9.33}$$

Une constante est déterminée.

Continuité de $V(r)$ à $r = a$.

Par l'éq.(9.27),

$$V(r)|_{r=a} = -\frac{\rho_0}{\epsilon_0} \cdot \frac{a^2}{6} + C_2 \tag{9.34}$$

Par l'éq.(9.29),

$$V(r)|_{r=a} = -\frac{C_3}{a} \tag{9.35}$$

En égalisant, on trouve :

$$-\frac{\rho_0}{\epsilon_0} \cdot \frac{a^2}{6} + C_2 = -\frac{C_3}{a} \tag{9.36}$$

Méttons la valeur de C_3, éq.(9.33),

$$-\frac{\rho_0}{\epsilon_0} \cdot \frac{a^2}{6} + C_2 = \frac{\rho_0}{\epsilon_0} \cdot \frac{a^2}{3} \tag{9.37}$$

$$C_2 = \frac{\rho_0}{\epsilon_0} \cdot \frac{a^2}{2} \tag{9.38}$$

La deuxième constante est determinée.

En mettant les valeurs des constantes C_3, éq.(9.33), et C_2, éq.(9.38), dans les équations (9.27) et (9.29), on trouve finalement le potentiel $V(r)$, étant donné par les expressions :

$$r < a, \;\; V(r) = -\frac{\rho_0}{\epsilon_0} \cdot \frac{r^2}{6} + \frac{\rho_0}{\epsilon_0}\frac{a^2}{2} = \frac{\rho_0}{\epsilon_0}(\frac{a^2}{2} - \frac{r^2}{6}) \tag{9.39}$$

$$r > a, \;\; V(r) = \frac{\rho_0 a^3}{3\epsilon_0} \cdot \frac{1}{r} \tag{9.40}$$

La dernière expression, de $V(r)$ pour $r > a$, pourrait également être exprimée en terme de la charge totale q de la boule. Évidemment que

$$q = \rho_0 \cdot \frac{4\pi a^3}{3} \tag{9.41}$$

Alors, $V(r)$ dans (9.40) pourrait être exprimé comme :

$$r > a, \quad V(r) = \rho_0 \frac{4\pi a^3}{3} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{1}{r} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{1}{r} \tag{9.42}$$

– on trouve le potentiel de Coulomb créé par la charge q.

Le profil du potentiel, $V(r)$ en fonction de r, est présenté dans la Fig.65.

Le champ électrique.

$$\vec{E}(\vec{r}) = -\vec{grad}V(r) = -\partial_r V(r) \cdot \vec{e}_r \tag{9.43}$$

Nous avons utilisé l'expression de $\vec{grad}$ en coordonnées sphériques et le fait que $V(r)$ ne dépend pas de θ et ϕ, que $V(r)$ est une fonction radiale. On trouve que $\vec{E}(\vec{r})$ est également un champ de vecteurs radial :

$$\vec{E}(\vec{r}) = E(r) \cdot \vec{e}_r \tag{9.44}$$

$$E(r) = -\partial_r V(r) \tag{9.45}$$

Avec les expressions (9.39),(9.40), (9.42) pour $V(r)$ on trouve :

$$r < a, \;\; E(r) = \frac{\rho_0}{\epsilon_0} \cdot \frac{r}{3} \tag{9.46}$$

$$r > a, \;\; E(r) = \frac{\rho_0 a^3}{3\epsilon_0} \cdot \frac{1}{r^2} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{1}{r^2} \tag{9.47}$$

Le champ électrique $\vec{E}(\vec{r})$, en grand complet, est de la forme :

$$r < a, \;\; \vec{E}(\vec{r}) = \frac{\rho_0}{3\epsilon_0} \cdot \vec{r} \tag{9.48}$$

$$r > a, \;\; \vec{E}(\vec{r}) = \frac{\rho_0 a^3}{3\epsilon_0} \cdot \frac{\vec{r}}{r^3} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{\vec{r}}{r^3} \tag{9.49}$$

Nous avons utilisé les formules simples pour $\vec{e_r}$:

$$r \cdot \vec{e}_r = \vec{r}, \quad \vec{e}_r = \frac{\vec{r}}{r} \tag{9.50}$$

Le profil de $E(r)$, qui est le module, ou la norme, $|\vec{E}(\vec{r})|$ de $\vec{E}(\vec{r})$, est présenté dans la Fig.66.

Remarque 1.

Observons que le champ électrique $\vec{E}(\vec{r})$, créé par la distribution de charges $\rho(r)$, éq.(9.9), pourrait être déterminé directement de l'équation (9.1), sans passer par le potentiel $V(r)$.

Intégrons l'éq.(9.1), partie gauche et partie droite, sur une boule B_R de rayon $R > a$, une boule plus grande que la boule initiale, chargée, de rayon a, Fig.67. La boule B_R, nous la introduisons de la maniére artifitielle, comme un moyen de calcul, qui va suivre et qui nous permetera à déterminer le champ électrique en fonction de R, rayon de notre boule artifitielle

En intégrant l'éq.(9.1), on trouve :

$$\int_{B_R} dV div\vec{E}(\vec{r}) = \int_{B_R} dV \frac{\rho(r)}{\epsilon_0} \tag{9.51}$$

À droite on obtient, à un coefficient $1/\epsilon_0$ près, la charge totale de la boule chargée, car la boule chargée se trouve à l'interieur de B_R :

$$\int_{B_R} dV \frac{\rho(r)}{\epsilon_0} = \frac{1}{\epsilon_0} \int_{B_R} dV \rho(r) = \frac{1}{\epsilon_0} \cdot q \tag{9.52}$$

À gauche de (9.51) nous exprimons l'intégrale, par le théorème d'Ostogradski, comme l'intégrale sur la surface de B_R, la sphère S_R, Fig.67 :

$$\int_{B_R} dV div\vec{E}(\vec{r}) = \int_{S_R} d\vec{s} \cdot \vec{E}(\vec{r}) \tag{9.53}$$

Comme $\rho(r)$ est radiale, nous allons cherche $\vec{E}(\vec{r})$ dans la forme radiale également. Pour un champ de vecteurs ça signific que $\vec{E}(\vec{r})$ est de la forme :

$$\vec{E}(\vec{r}) = E(r) \cdot \vec{e}_r \tag{9.54}$$

où $E(r)$, module de $\vec{E}(\vec{r})$, est une fonction (scalaire) de r uniquement.

$d\vec{s}$, dans l'intégrale (9.53) est de la forme

$$d\vec{s} = ds_r \cdot \vec{e}_r = d\theta d\phi r^2 \sin\theta \cdot \vec{e}_r \tag{9.55}$$

Si on prend en comple (9.54), (9.55), alors l'intégrale de surface (9.53) prend la forme :

$$\int_{S_R} d\vec{s} \cdot \vec{E} = \int_{S_R} ds_r \cdot E(r) \tag{9.56}$$

Sur S_R, $r = R$, constant. Alors $E(r) = E(R)$ et on peut le sortir de l'intégrale. On trouve :

$$\int_{S_R} ds_r E(r) = \int_{S_R} ds_r \cdot E(R) = E(R) \int_{S_R} ds_r = E(R) \cdot 4\pi R^2 \tag{9.57}$$

Nous avons remplace $\int_{S_R} ds_r$ par la surface de la sphère S_R.

Finalement, pour l'intégrale à gauche dans (9.51), après avoir utilise le théorème d'Ostrogradski, nous obtenons le résultat suivant :

$$\int_{B_R} dV \cdot div\vec{E} = E(R) \cdot 4\pi R^2 \tag{9.58}$$

Égalisons ensuite les résultats (9.52) et (9.58), pour les parties droite et gauche de l'éq.(9.51), nous trouvons l'égalité :

$$E(R) \cdot 4\pi R^2 = \frac{1}{\epsilon_0} q \tag{9.59}$$

D'ici on trouve

$$E(R) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{1}{R^2} \tag{9.60}$$

Comme R, rayon de notre boule B_R artifitielle, est arbitraire, sauf que $R > a$, on trouve, en effet E eu fonction de r (on peut remplacer R dans (9.60) par r) :

$$E(r) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{1}{r^2} \tag{9.61}$$

Donc on trouve le même résultat que dans le calcul avec le potentiel $V(r)$, éq.(9.47).

Exercice.

En utilisant la même méthode, mais en intégrant l'éq.(9.1) sur une boule artifitielle B_R qui est plus petite que la boule chargée, $R < a$, Fig.(68), rétrouver l'expression (9.46), pour $E(r)$, $r < a$.

Remarque 2.

Nous allons considérer la limite où $a \to 0$, $\rho_0 \to \infty$, mais la charge totale q de notre boule changée

$$q = \frac{4\pi}{3} a^3 \cdot \rho_0 \tag{9.62}$$

reste constant, fini.

Dans cette limite on trouve la change q concentrée sur un point, on trouve une charge ponctuelle q placée à l'origine.

L'évolution de la taille de notre boule chargée et de la densité ρ_0, de la charge à l'interieur, sont marquées dans la Fig.69.

Dans la limite on trouve $\rho(\vec{r})$ telle que

$$\rho(\vec{r}) = \begin{cases} \infty, & \vec{r} = \vec{0} \\ 0, & \vec{r} \neq \vec{0} \end{cases} \tag{9.63}$$

mais

$$\int dV \rho(\vec{r}) = q, \quad \text{fixe, finie} \tag{9.64}$$

Pour présenter la densité de charge créée par des particules ponctuels, comme électron par exemple, Paul Dirac à introduit une fonction singulière $\delta(\vec{r})$ qui est appelée <u>fonction δ de Dirac</u>. Elle est définie par ses propriété :

$$\delta^{(3)}(\vec{r}) = \begin{cases} \infty, & \vec{r} = \vec{0} \\ 0, & \vec{r} \neq \vec{0} \end{cases} \tag{9.65}$$

et

$$\int dV \delta^{(3)}(\vec{r}) = 1 \tag{9.66}$$

Dans (9.65), (9.66) $\delta^{(3)}(\vec{r})$ porte l'indice 3 pour marquer δ de Dirac en $D = 3$ dimensions. On peut definir δ de Dirac dans une dimension, dans deux, dans n dimensions, elles sont différentes. Dans un sens on peut présenter $\delta^{(3)}(\vec{r})$ comme suit :

$$\delta^{(3)}(\vec{r}) = \delta(x)\delta(y)\delta(z) \tag{9.67}$$

où $\delta(x)$ etc. sont des δ de Dirac définies dans une dimension :

$$\delta(x) = \begin{cases} \infty, & x = 0 \\ 0, & x \neq 0 \end{cases} \tag{9.68}$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} dx \delta(x) = 1 \tag{9.69}$$

En termes de $\delta^{(3)}(\vec{r})$, la densité limite de notre boule chargéé pourrait être présenté comme suit :

$$\rho(\vec{r}) = q \cdot \delta^{(3)}(\vec{r}) \tag{9.70}$$

En particulier, ou a bien

$$\int dV \rho(\vec{r}) = \int dV q\delta^{(3)}(\vec{r}) = q \int dV \delta^{(3)}(\vec{r}) = q \tag{9.71}$$

– la charge totale de la boule. Pour prendre l'intégrale dans (9.71) nous avons utilisé la propriété (9.66) de $\delta^{(3)}(\vec{r})$.

Faisons le calcul du champ électrique $\vec{E}(\vec{r})$ créé par $\rho(\vec{r})$ dans (9.70), c'est à dire, par une particule ponctuelle de charge q placée à l'origine.

Nous allons utiliser la méthode du Remarque 1, en intégrant l'équation

$$div\vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{\epsilon_0}\rho(\vec{r}) \tag{9.72}$$

sur une boule B_R artifitielle de rayon R, centrée à l'origine. On trouve :

$$\int_{B_R} dV div\vec{E}(\vec{r}) = \int_{B_R} dV \frac{1}{\epsilon_0} q\delta^{(3)}(\vec{r}) \tag{9.73}$$

À droite on trouve, en intégrant,

$$\frac{1}{\epsilon_0} q \tag{9.74}$$

À gauche, en passant par le théorème d'Ostrogradski et en faisant le calcul de l'intégrale de surface comme dans la Remarque 1, on trouve

$$4\pi R^2 \cdot E(R) \tag{9.75}$$

Tout comme dans la Remarque 1, nous avons supposé, par des bonnes raisons, que $\vec{E}(\vec{r})$ doit être cherché dans la forme radiale :

$$\vec{E}(\vec{r}) = E(r)\vec{e}_r \tag{9.76}$$

En égalisant (9.74) et (9.75) on obtient

$$E(R) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} q \cdot \frac{1}{R^2} \tag{9.77}$$

Comme R est arbitraire, rayon de la boule artificielle, on peut remplacer R par r et déclarer que la charge q ponctuelle, place à l'origine, produit un champ électrique de la forme ;

$$\vec{E}(\vec{r}) = E(r) \cdot \vec{e}_r = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{1}{r^2}\vec{e}_r \tag{9.78}$$

où

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{\vec{r}}{r^3} \tag{9.79}$$

valable, cette fois-ci, pour tout $\vec{r} \neq \vec{0}$. Il n'y a pas de l'interieur d'une particule ponctuelle chargée, car elle est de taille zéro, comme un electron, ou une autre particule fondamentale, comme muon, quark.

Nous pouvons également en déduire le potentiel correspondant. Nous avons vu dans nos exercice des chapitres précédents que

$$\frac{\vec{r}}{r^3} = -gr\vec{a}d\frac{1}{r} \tag{9.80}$$

Alors

$$\begin{aligned} \vec{E}(\vec{r}) &= \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\frac{\vec{r}}{r^3} \\ &= -\frac{q}{4\pi\epsilon_0} \cdot gr\vec{a}d\frac{1}{r} \\ &= -gr\vec{a}d\frac{q}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{1}{r} \end{aligned} \tag{9.81}$$

Par la définition du potentiel, $\vec{E}(\vec{r}) = -gr\vec{a}dV(\vec{r})$ et on trouve que dans ce cas

$$V(\vec{r}) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{1}{r} \tag{9.82}$$

qui est le potentiel de Coulomb, valable cette fois-ci, pour tout $\vec{r} \neq \vec{0}$.

Remarque 3.

C'est une remarque mathématique cette fois-ci, mais toujours pour mettre en valeur la fonction δ de Dirac.

D'une part, nous avons vu, dans nos exercices des chapitres précédants, que

$$div\frac{\vec{r}}{r^3} = 0, \quad \vec{r} \neq \vec{0} \tag{9.83}$$

D'autre part, intégrons $div\frac{\vec{r}}{r^3}$ sur une boule, centre à l'origine, de rayon R quelconque. La valeur de R n'est pas importante, souffit que $R \neq 0$. On trouve :

$$I = \int_{B_R} dV div\frac{\vec{r}}{r^3} \tag{9.84}$$

Si on prend en compte (9.83), on a une tendance à dire qu'on trouvera zéro, évidement, pour l'intégrale dans (9.84). Mais quelqu'un qui est moins rapide que les autres, avec ses jugements, décide de calculer l'intégrale (9.84) en passant par le théorème d'Ostrogradski. Il trouve :

$$I = \int_{B_R} dV div\frac{\vec{r}}{r^3} = \oint_{S_R} d\vec{s} \cdot \frac{\vec{r}}{r^3} \tag{9.85}$$

À droite on intègre sur la sphère S_R, de rayon R, la surface de B_R. Sur la sphère

$$d\vec{s} = ds_r \cdot \vec{e}_r = d\phi d\theta \cdot r^2 \sin\theta \cdot \vec{e}_r \tag{9.86}$$

et $\frac{\vec{r}}{r^3}$ pourrait être remis dans la forme :

$$\frac{\vec{r}}{r^3} = \frac{1}{r^2}\vec{e}_r \tag{9.87}$$

Mettons (9.86) et (9.87) dans (9.85) et calculons l'intégrale :

$$\begin{aligned} I &= \int_{B_R} dV div\frac{\vec{r}}{r^3} = \oint_{S_R} ds_r \cdot \frac{1}{r^2} = \int_{S_R} d\phi d\theta \cdot r^2 \sin\theta \cdot \frac{1}{r^2} \\ &= \int_{S_R} d\phi d\theta \sin\theta = \int_0^{2\pi} d\phi \cdot \int_0^{\pi} d\theta \cdot \sin\theta = 2\pi \cdot 2 = 4\pi \end{aligned} \tag{9.88}$$

On s'aperçois que quelqu'un, qui est plus curieux que les autres, avait bien la raison de s'en douter, de la singularité possible à $\vec{r} = \vec{0}$, la singularité qui pourrait rendre l'intégrale non-nulle, malgre le résultat (9.83).

En comparant (9.83) et (9.88), on doit conclure, par les propriétés de δ de Dirac (9.65), (9.66), qu'en effet

$$div\frac{\vec{r}}{r^3} = 4\pi\delta^{(3)}(\vec{r}) \tag{9.89}$$

– une équation qui est largement utilisée en physique.

Deuxième équation, largement utilisée, on obtient en remplaçant $\frac{\vec{r}}{r^3}$ par $-\vec{grad}\frac{1}{r}$, qui sont égalent,

$$div(-\vec{grad}\frac{1}{r}) = 4\pi\delta^{(3)}(\vec{r}) \tag{9.90}$$

On trouve que

$$\Delta\frac{1}{r} = -4\pi\delta^{(3)}(\vec{r}) \tag{9.91}$$

Nous avons utilisé le fait que $div\vec{grad} = \Delta$.

Remarque 4.

Equipé par l'éq.(9.91), nous somme en mésure maintenant de démontrer que la solution générale de l'équation de Poisson

$$\Delta V(\vec{r}) = -\frac{1}{\epsilon_0}\rho(\vec{r}) \tag{9.92}$$

où, cette fois-ci, $\rho(\vec{r})$ est une fonction quelconque, générale, est donnée par l'intégrale :

$$V(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int d^3r' \frac{\rho(\vec{r'})}{|\vec{r} - \vec{r'}|} \tag{9.93}$$

On intègre dans (9.93) sur tout espace. Nous avons remplacé dV' par d^3r' (juste un changement de notation pour la mésure d'intégration sur l'espace tridimensionnel) pour mettre en évidance qu'on intègre sur $\vec{r'}$, dans (9.93), et pas sur $\vec{r}$.

Démontrons que $V(\vec{r})$ dans (9.93) vérifie l'éq.(9.92). Nous appliquerons Δ à $V(\vec{r})$ dans (9.93), avec le but à demontrer qu'on trouve finalement $-\frac{1}{\epsilon_0}\rho(\vec{r})$, la partie droite le l'éq.(9.92).

Faisons le calcul.

$$\Delta_{\vec{r}}V(\vec{r}) = \Delta_{\vec{r}}[\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int d^3r' \frac{\rho(\vec{r'})}{|\vec{r} - \vec{r'}|}] \tag{9.94}$$

Nous avons marque Δ, qui agit sur $V(\vec{r})$, comme $\Delta_{\vec{r}}$ pour mettre en évidence que ce laplacien agit sur la variable $\vec{r}$, et pas sur $\vec{r'}$, variable d'intégration dans (9.94).

L'intégration sur $\vec{r'}$, dans $\int d^3r'(...)$, et dérivation sur $\vec{r}$, par le laplacien $\Delta_{\vec{r}}$, ces deux opérations commutent entre elles, car il s'agit des variables différentes. Alors

$$\begin{aligned} &\Delta_{\vec{r}}[\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int d^3r' \frac{\rho(\vec{r'})}{|\vec{r} - \vec{r'}|}] \\ &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int d^3r' \rho(\vec{r'})\Delta_{\vec{r}}\frac{1}{|\vec{r} - \vec{r'}|} \end{aligned} \tag{9.95}$$

$\Delta_{\vec{r}}$ commute également avec $\rho(\vec{r'})$ car, pour les dérivées par rapport à $\vec{r}$, $\vec{r'}$ est une constante. À l'interieur de l'intégrale, $\Delta_{\vec{r}}$ agit que sur le facteur $1/|\vec{r}-\vec{r'}|$, qui, le seul, contient la variable $\vec{r}$.

Par l'éq.(9.91), translatée un peu vers l'équation plus générale :

$$\Delta_{\vec{r}}\frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}_0|} = -4\pi\delta^3(\vec{r}-\vec{r}_0) \tag{9.96}$$

on trouve

$$\Delta_{\vec{r}}\frac{1}{|\vec{r}-\vec{r'}|} = -4\pi\delta^{(3)}(\vec{r}-\vec{r'}) \tag{9.97}$$

Mettons (9.97) dans (9.95) :

$$\begin{aligned} &\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int d^3r'\rho(\vec{r'})\Delta_{\vec{r}}\frac{1}{|\vec{r}-\vec{r'}|} \\ &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int d^3r'\rho(\vec{r'})(-4\pi)\delta^{(3)}(\vec{r}-\vec{r'}) \\ &= -\frac{1}{\epsilon_0}\int d^3r'\rho(\vec{r'})\delta^{(3)}(\vec{r}-\vec{r'}) = -\frac{1}{\epsilon_0}\rho(\vec{r}) \end{aligned} \tag{9.98}$$

L'équation (9.92) est vérifiée, par $V(\vec{r})$ dans (9.93).

Quelques rémarques justificatives, a la fin.

Nous avons utilisé dans (9.98) le fait que

$$\int d^3r'\rho(\vec{r'})\delta^{(3)}(\vec{r}-\vec{r'}) = \rho(\vec{r}) \tag{9.99}$$

Ce résultat, pour l'intégrale avec δ et une autre fonction, suit des propriété de δ. Dans l'intégrale (95), quand on intègre sur $\vec{r'}$ et $\vec{r}$ reste immobile, comme un paramètre, $\delta^{(3)}(\vec{r}-\vec{r'})$ est piquée là où $\vec{r}-\vec{r'}=0$ c'est à dire $\delta^{(3)}(\vec{r}-\vec{r'})$, est piquée en $\vec{r'}=\vec{r}$. Ailleurs $\delta(\vec{r}-\vec{r'})$ est égale à zéro. Par conséquence, on peut remplacer $\vec{r'}$, dans $\rho(\vec{r'})$, par $\vec{r}$:

$$\rho(\vec{r'}) \to \rho(\vec{r}) \tag{9.100}$$

car d'autres valeurs de $\rho(\vec{r'})$, pour $\vec{r'} \neq \vec{r}$, ne contribuent pas dans l'intégration sur $\vec{r'}$, à cause de $\delta^{(3)}(\vec{r}-\vec{r'})$ à côté.

Une fois $\rho(\vec{r'})$ est remplacée par $\rho(\vec{r})$, on peut le sortir de l'intégrale. Ensuite on intègre que $\delta(\vec{r}-\vec{r'})$, c'est qui donne 1, par la propriété (9.66) généralisée :

$$\int d^3r'\delta^{(3)}(\vec{r'}-\vec{r}_0) = 1 \tag{9.101}$$

Nous avons assumé en plus, en effet, que δ est une fonction paire :

$$\delta^{(3)}(-\vec{r}) = \delta^{(3)}(\vec{r}) \tag{9.102}$$

$$\delta^{(3)}(\vec{r} - \vec{r'}) = \delta(\vec{r'} - \vec{r}) \tag{9.103}$$

– pour traiter l'intégrale qui reste par la propriété (9.101).

Un peu plus des détails pour l'intégration dans (9.99) :

$$\begin{aligned} &\int d^3r' \rho(\vec{r'}) \delta^3(\vec{r} - \vec{r'}) \\ &= \int d^3r' \rho(\vec{r}) \delta^{(3)}(\vec{r} - \vec{r'}) \\ &= \rho(\vec{r}) \int d^3r' \delta^{(3)}(\vec{r} - \vec{r'}) \\ = \rho(\vec{r}) \cdot &\int d^3r' \delta^{(3)}(\vec{r'} - \vec{r}) = \rho(\vec{r} \cdot 1 = \rho(\vec{r}) \end{aligned} \tag{9.104}$$

Le fait que $\delta^{(3)}(\vec{r})$ est une fonction paire pourrait être justifié avec des formes limite de δ. Une de forme limite nous avons traité dans la remarque 2, avec la limite pour une boule et $\rho(\vec{r})$ correspondant.

La propriété (9.99) pour des intégrales avec δ, est visible plus facilement dans le cas d'une dimension.

Dans une dimension, de variable x toute seule, $\delta(x)$ est définie par :

$$\delta(x) = \begin{cases} \infty, & x = 0 \\ 0, & x \neq 0 \end{cases} \tag{9.105}$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} dx \delta(x) = 1 \tag{9.106}$$

Plus généralement :

$$\delta(x - x_0) = \begin{cases} \infty, & x = x_0 \\ o, & x \neq x_0 \end{cases} \tag{9.107}$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} dx \delta(x - x_0) = 1 \tag{9.108}$$

Alors pour l'integrale :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} dx f(x) \delta(x - x_0) \tag{9.109}$$

où $f(x)$ est une fonction régulière, usuelle, qui varie lontement par rapport à δ, on fait les calculs comme suit :

$$\begin{aligned}
&\int_{-\infty}^{+\infty} dx f(x)\delta(x-x_0) \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} dx f(x_0)\delta(x-x_0) \\
&= f(x_0)\int_{-\infty}^{+\infty} dx\delta(x-x_0) = f(x_0)
\end{aligned} \tag{9.110}$$

Ces étapes sont plus évidantes si on régarde les courbes de $f(x)$ et $\delta(x-x_0)$, sur le même plan, dessinées, en gros, dans la Fig.70.

Pour conclure, il est utile à remarquer que la fonction δ de Dirac est utilisée bien plus largement, en physique, qu'uniquement pour présenter la densité de charge des particules élementaires. Trois exemples :

1. fonction δ est utilisé dans la mécanique quantique, comme une approximation, ou un modèle, pour un potentiel qui est très piqué ;

2. plus généralement, comme une approximation, dans les intégrales par exemple, ou ailleurs, pour des fonctions qui ne sont pas $\delta's$, mais qui sont très piquées ;

3. dans la définition de la fonction-réponse (fonction de Green) d'un système dynamique, en mécanique, en électronique, en théorie de champs, ailleurs.

9.2. Deuxième application physique : un cas simple de magnétistatique.

Dans le cas de magnétostatique il reste, des équations de Maxwell d'électromagnétisme

$$div\vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} \tag{9.111}$$

$$div\vec{B} = 0 \tag{9.112}$$

$$r\vec{o}t\vec{E} = -\frac{\partial\vec{B}}{\partial t} \tag{9.113}$$

$$r\vec{o}t\vec{B} = \mu_0(\vec{j} + \epsilon_0\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}) \tag{9.114}$$

les équations suivantes :

$$div\vec{B} = 0 \tag{9.115}$$

$$r\vec{o}t\vec{B} = \mu_0\vec{j} \tag{9.116}$$

$\vec{B}(\vec{r})$ est un champ magnétique; $\vec{j}(\vec{r})$ est la densité de courants (courant volumique); μ_0 est une constante physique.

Du fait que $d\vec{i}v\vec{B} = 0$, éq.(9.115), on peut exprimer $\vec{B}(\vec{r})$ comme un rotationnel d'un autre champ de vecteurs :

$$\vec{B}(\vec{r}) = r\vec{o}t\vec{A}(\vec{r}) \tag{9.117}$$

$\vec{A}(\vec{r})$ est appelé <u>potentiel vecteur</u>.

Si $\vec{B}(\vec{r})$ est mis dans cette forme, alors l'éq.(9.115) sera vérifiée automatiquement, car $divr\vec{o}t = 0$. Il restera une équation à résoudre, l'éq.(9.116), au lieu de deux.

Mettons (9.117) dans (9.116). On trouve :

$$r\vec{o}tr\vec{o}t\vec{A}(\vec{r}) = \mu_0 \cdot \vec{j}(\vec{r}) \tag{9.118}$$

Par la formule 7 du chapitre 8, sur les formules différentielles

$$r\vec{o}tr\vec{o}t\vec{A}(\vec{r}) = gr\vec{a}ddiv\vec{A} - \Delta\vec{A} \tag{9.119}$$

– en toute généralité. Observons ensuite que dans la définition du potentiel vecteur $\vec{A}(\vec{r})$ il y a une liberté. On peut remplacer $\vec{A}(\vec{r})$ par $\vec{A}'(\vec{r})$:

$$\vec{A}(\vec{r}) \to \vec{A}'(\vec{r}) = \vec{A}(\vec{r}) + gr\vec{a}d\lambda(\vec{r}) \tag{9.120}$$

où $\lambda(\vec{r})$ est une fonction scalaire quelconque. Sous le transformation de $\vec{A}(\vec{r})$ vers $\vec{A}'(\vec{r})$, le champ magnétique $\vec{B}(\vec{r})$ reste inchangé.

En effet en remplaçant $\vec{A}(\vec{r})$ par $\vec{A}'(\vec{r})$ dans l'éq.(9.117), on trouve :

$$\vec{B}' = r\vec{o}t\vec{A}' = r\vec{o}t(\vec{A} + gr\vec{a}d\lambda) = r\vec{o}t\vec{A} + r\vec{o}tgr\vec{a}d\lambda = r\vec{o}t\vec{A} = \vec{B} \tag{9.121}$$

car

$$r\vec{o}tgr\vec{a}d = \vec{0} \tag{9.122}$$

On trouve, par (9.121), que le champ magnétique $\vec{B}'$ défini par $\vec{A}'$ reste égale à un champ magnétique $\vec{B}$, défini par le potentiel $\vec{A}$ inititial.

Transformation (9.120) de $\vec{A}(\vec{r})$ est appelée <u>transformation de jauge</u> de $\vec{A}(\vec{r})$. L'invariance de $\vec{B}(\vec{r})$ par rapport à la transformation de $\vec{A}(\vec{r})$, éq.(9.120), est appelée <u>invariance de jauge.</u>

On peut démontrer qu'en utilisant la liberté (9.120) dans le choix du potentiel, on peut toujours trouver la fonction $\lambda(\vec{r})$ telle que, qu'après la transformation de jauge (9.120), le potentiel $\vec{A}(\vec{r})$ vérifiera la condition

$$div\vec{A} = 0 \tag{9.123}$$

La contrainte (9.123) sur le choix du potentiel $\vec{A}(\vec{r})$ est appelée la contrainte du jauge de Lorentz, où simplement <u>jauge de Lorentz.</u> Autrement on dit que $\vec{A}(\vec{r})$ est pris dans le jauge de Lorentz, si on suppose que (9.123) est vérifié par $\vec{A}(\vec{r})$. Avec la condition (9.123), les équation sur $\vec{A}(\vec{r})$ se simplifient, comme nous allons le constater, c'est-ce qui est le but du jauge de Loventz.

<u>Rémarque à part.</u> La contrainte du jauge de Lorentz est de la forme (9.123) pour des phenomènes magnétostatiques uniquement. Dans le cas de phenomènes dynamiques, de l'électromagnétisme, la contrainte du jauge de Lorentz est de la forme :

$$div\vec{A}(t,\vec{r}) + \frac{1}{c^2}\partial_t V(t,\vec{r}) = 0 \tag{9.124}$$

qui implique en plus le potentiel scalaire $V(t,\vec{r})$. c dans (9.124) est la vitesse de la lumière; en particulier $1/c^2 = \mu_0\epsilon_0$. Le but de la contrainte (9.124) est, toujours, de simplifier les équations sur les potentiels, $A(t,\vec{r})$, $V(A,\vec{r})$.

Après ces rémarques d'ordre général, retournons à notre problème de magnétostatique, retournons à l'équation (9.119). Nous allons supposer que $\vec{A}(\vec{r})$ est pris dans le jauge de Lorentz, c'est à dire, qu'il vérifie l'éq.(9.123). Dans ce cas l'éq.(9.119) se simplifie :

$$r\vec{o}tr\vec{o}t\vec{A}(\vec{r}) = -\Delta\vec{A}(\vec{r}) \tag{9.125}$$

Mettons (9.125) dans (9.118). On trouve :

$$-\Delta\vec{A}(\vec{r}) = \mu_0\vec{j}(\vec{r}) \tag{9.126}$$

On trouve à nouveau l'équation de Poisson, comp. l'éq.(9.7), pour des vecteurs cette fois-ci $\vec{A}(\vec{r})$, $\vec{j}(\vec{r})$, au lieu des scalaires $V(\vec{r})$ et $\rho(\vec{r})$ dans l'éq.(9.7) d'électrostatique.

Résumé.

Après cette partie introductive, nous pouvons résumer que, en terme du potentiel $\vec{A}(\vec{r})$, la magnétostatique est décrite par les équations

$$\Delta\vec{A}(\vec{r}) = -\mu_0\vec{j}(\vec{r}) \tag{9.127}$$

$$\vec{B}(\vec{r}) = r\vec{o}t\vec{A}(\vec{r}) \tag{9.128}$$

qui est notre point de départ.

Nous allons chercher, dans la suite, les champs $\vec{A}(\vec{r})$ et $\vec{B}(\vec{r})$ créés par un courant, homogène, de la densité

$$\vec{j} = j_0 \cdot \vec{e}_z \tag{9.129}$$

dans un fil métallique de la forme d'un cylindre infini, de rayon a, centré sur l'axe z.

Nous allons employer les coordonnées cylindriques, ρ, ϕ, z. Comme la seule composante de $\vec{j}$, qui est non-nule, est la composante z, éq.(9.129),

$$j_z = j_0, \quad \rho < a \tag{9.130}$$

nous allons chercher $\vec{A}$, solution de l'éq.(9.127), dans la forme :

$$\vec{A} = A \cdot \vec{e}_z \tag{9.131}$$

Par la symétrie cylindrique du problème, $A = A_z$, la seule composante non-nulle de $\vec{A}$, doit être une fonction de ρ uniquement, indépendante de ϕ et de z.

Précisons encore une fois que, dans notre problème, la distribution des courants est comme suit :

$$\vec{j} = \vec{j}(\rho) = \begin{cases} j_0 \cdot \vec{e}_z, & \rho < a \\ \vec{0}, & \rho > a \end{cases} \tag{9.132}$$

et que nous allons chercher le potentiel vecteur $\vec{A}(\vec{r})$ dans la forme (9.131), avec $A_z = A = A(\rho)$, une fonction de ρ à déterminer.

L'éq.(9.127), pour la composante z, prend la forme :

$$\Delta A(\rho) = -\mu_0 j_0, \quad \rho < a \tag{9.133}$$

$$\Delta A(\rho) = 0, \quad \rho > a \tag{9.134}$$

Le laplacien, dans les coordonnées cylindriques et pour une fonction qui ne dépend que de ρ, prend la forme :

$$\Delta A(\rho) = \frac{1}{\rho}\partial_\rho(\rho\partial_\rho A(\rho)) \tag{9.135}$$

– voir le chapitre 7. Alors, par (9.133), (9.134), nous avons deux équations à résoudre :

$$\frac{1}{\rho}\partial_\rho(\rho\partial_\rho A(\rho)) = -\mu_0 j_0, \quad \rho < a \tag{9.136}$$

$$\frac{1}{\rho}\partial_\rho(\rho\partial_\rho A(\rho)) = 0, \quad \rho > a \tag{9.137}$$

$\underline{\rho < a.}$

Intégrons l'éq.(9.136) :

$$\partial_\rho(\rho\partial_\rho A(\rho)) = -\mu_0 j_0 \cdot \rho \tag{9.138}$$

$$\rho\partial_\rho A(\rho) = -\mu_0 j_0 \cdot \frac{\rho^2}{2} + C_1 \tag{9.139}$$

D'ici

$$\partial_\rho A(\rho) = -\mu_0 j_0 \cdot \frac{\rho}{2} + \frac{C_1}{\rho} \tag{9.140}$$

Nous allons mettre la constante d'intégration $C_1 = 0$, car la divergence de $\partial_\rho A(\rho)$, et de $A(\rho)$ en conséquence, dans la limite $\rho \to 0$, n'est pas justifiée du point de vue de la physique du problème : $\vec{j}(\rho)$ n'a pas de singularité dans la limite $\rho \to 0$. Donc,

$$\partial_\rho A(\rho) = -\mu_0 j_0 \cdot \frac{\rho}{2} \tag{9.141}$$

Intégrons cette équation :

$$A(\rho) = -\mu_0 j_0 \cdot \frac{\rho^2}{4} + C_2 \tag{9.142}$$

La constante d'intégration C_2 sera déterminée plus bas, par la condition de continuité à $\rho = a$ de $\partial_\rho A(\rho)$ et de $A(\rho)$.

$\underline{\rho > a.}$

Intégrons l'éq.(9.137) :

$$\partial_\rho(\rho \partial_\rho A(\rho)) = 0 \tag{9.143}$$

$$\rho \partial_\rho A(\rho) = C_3 \tag{9.144}$$

$$\partial_\rho A(\rho) = \frac{C_3}{\rho} \tag{9.145}$$

Intégrons cette dernière équation :

$$A(\rho) = C_3 \log \rho + C_4 \tag{9.146}$$

La constante C_4, on peut la choisir, car les potentiels sont définis à une constante près, tout comme dans le cas d'électrostatique, le chapitre précédent. Mais, au contraire avec l'électrostatique et le potentiel $V(r)$, dans le cas actuel on ne peut pas demander que $A(\rho)$, dans (9.146), tend vers 0 quand $\rho \to \infty$, parce que $\log \rho$ diverge quand $\rho \to \infty$.

Nous allons demander que $A(\rho) = 0$ à $\rho = a$, sur le bord du cylindre. C'est notre choix, avec une seule raison d'obtenir l'expression de $A(\rho)$ qui serait plus simple.

Alors il faudra que

$$C_4 = -C_3 \log a \tag{9.147}$$

Avec ce choix, $A(\rho)$ dans (9.146) prend la forme :

$$A(\rho) = C_3 \log \frac{\rho}{a} \tag{9.148}$$

<u>En résumant les calculs jusque présent</u> :

$\underline{\rho < a}$,

$$\partial_\rho A(\rho) = -\mu_0 j_0 \cdot \frac{\rho}{2} \tag{9.149}$$

$$A(\rho) = -\mu_0 j_0 \cdot \frac{\rho^2}{4} + C_2 \tag{9.150}$$

$\underline{\rho > a}$,

$$\partial_\rho A(\rho) = \frac{C_3}{\rho} \tag{9.151}$$

$$A(\rho) = C_3 \log \frac{\rho}{a} \tag{9.152}$$

Appliquons ensuite les conditions de continuité à $\rho = a$.

Par (9.149) :

$$\partial_\rho A(\rho)|_{\rho=a} = -\mu_0 j_0 \frac{a}{2} \tag{9.153}$$

Par (9.151) :

$$\partial_\rho A(\rho)|_{\rho=a} = \frac{C_3}{a} \tag{9.154}$$

En égalisant, on trouve :

$$\frac{C_3}{a} = -\mu_0 j_0 \frac{a}{2} \tag{9.155}$$

$$C_3 = -\mu_0 j_0 \cdot \frac{a^2}{2} \tag{9.156}$$

Une constante est déterminée.

Ensuite, par (9.152) :

$$A(\rho)|_{\rho=a} = 0 \tag{9.157}$$

Par(9.150) :

$$A(\rho)|_{\rho=a} = -\mu_0 j_0 \cdot \frac{a^2}{4} + C_2 \tag{9.158}$$

En égalisant, on trouve

$$-\mu_0 j_0 \frac{a^2}{4} + C_2 = 0 \tag{9.159}$$

$$C_2 = \mu_0 j_0 \frac{a^2}{4} \tag{9.160}$$

La 2ème constante est déterminée. En mettant les valeurs de C_3, C_2 dans (9.150), (9.152) on trouve la fonction $A(\rho)$:

$$\rho < a, \quad A(\rho) = \frac{\mu_0 j_0}{4}(a^2 - \rho^2) \tag{9.161}$$

$$\rho > a, \quad A(\rho) = -\mu_0 j_0 \cdot \frac{a^2}{2} \cdot \log \frac{\rho}{a} \tag{9.162}$$

Rappelons que le potentiel, en complet, est comme suit :

$$\vec{A}(\rho) = A(\rho) \cdot \vec{e}_z \tag{9.163}$$

Le profil de la fonction $A(\rho)$ est présenté, en gros, dans la Fig.71.

Le champ magnétique correspondant se calcul par le rotationnel, en coordonnées cylindriques, du potentiel $\vec{A}(\rho)$, éq.(9.128).

On a l'expression suivante :

$$\begin{aligned}\vec{B}(\rho) = & \frac{1}{\rho}[\partial_\phi A_z - \partial_z(\rho A_\phi)] \cdot \vec{e}_\rho \\ & +[\partial_z A_\rho - \partial_\rho A_z] \cdot \vec{e}_\phi \\ & +\frac{1}{\rho}[\partial_\rho(\rho A_\phi) - \partial_\phi A_\rho] \cdot \vec{e}_z\end{aligned} \tag{9.164}$$

Dans notre cas $A_\rho = A_\phi = 0$, $A_z = A(\rho)$ dans (9.161), (9.162). Alors on trouve :

$$\vec{B}(\rho) = -\partial_\rho A_z \cdot \vec{e}_\phi = -\partial_\rho A(\rho) \cdot \vec{e}_\phi \tag{9.165}$$

La seule composante non-nulle de $\vec{B}(\rho)$ est $B_\phi(\rho)$. On obtient :

$$\rho < a, \quad B_\phi(\rho) = -\partial_\rho A(\rho) = \frac{\mu_0 j_0}{2}\rho \tag{9.166}$$

$$\rho > a, \quad B_\phi(\rho) = -\partial_\rho A(\rho) = \mu_0 j_0 \frac{a^2}{2} \cdot \frac{1}{\rho} \tag{9.167}$$

Observons que $B_\phi(\rho)$ à l'exterieur du fil cylindrique, $\rho > a$, pourrait être mis dans la forme :

$$\rho > a, \quad B_\phi(\rho) = \frac{\mu_0 I}{2\pi} \cdot \frac{1}{\rho} \tag{9.168}$$

où

$$I = \pi a^2 j_0 \tag{9.169}$$

est le courant total dans le fil métalliques, à travers sa section πa^2.

La Fig.72 présente le profil de $B_\phi(\rho)$.

Observons que le champ $B_\phi(\rho)$ à l'exterieur (et à l'intérieur) du fil, éq.(9.167), (9.168) (éq. (9.166)), pourrait être retrouvè directement de l'éq.(9.116).

Intégrons cette équation, la partie gauche et la partie droite, sur la surface du disque, S_R, qui traverse le fil cylindrique, Fig.73. Le rayon du disque, R, est pris d'être plus grand que le rayon du fil, $R > a$, Fig.73. On trouve :

$$\int_{S_R} d\vec{s} \cdot \vec{rot}\vec{B} = \mu_0 \int_{S_R} d\vec{s} \cdot \vec{j} \tag{9.170}$$

À droite on trouve :

$$\mu_0 \int_{S_R} d\vec{s} \cdot \vec{j} = \mu_0 I \tag{9.171}$$

où I est le courant total dans le fil.

À gauche, dans (9.170), en utilisant le théorème de Stokes, on trouve :

$$\begin{aligned} \int_{S_R} d\vec{s} \cdot \vec{rot}\vec{B} = \oint_{C_R} d\vec{r} \cdot \vec{B} = \oint_{C_R} dr_\phi \cdot B_\phi(\rho) \\ = \int_0^{2\pi} \rho d\phi \cdot B_\phi(\rho) = 2\pi R \cdot B_\phi(R) \end{aligned} \tag{9.172}$$

C_R est le cercle de rayon R, le bord du disque S_R, Fig.73. Nous avons supposé, pour la dernière égalité dans (9.172), que B_ϕ doit avoir une valeur constante sur C_R, par la symétrie du problème, d'être fonction de ρ uniquement.

Mettons (9.171) et (9.172) dans (9.170). On trouve :

$$2\pi R \cdot B_\phi(R) = \mu_0 I \tag{9.173}$$

d'où

$$B_\phi(R) = \frac{\mu_0 I}{2\pi} \cdot \frac{1}{R} \tag{9.174}$$

Comme R, le rayon du disque, est arbitraire (sauf que $R > a$), on peut lui remplace par ρ, la variable courante, usuelle, et on retrouve $B_\phi(\rho)$ de l'éq.(9.168).

Exercice. Retrouver le champ magnétique $B_\phi(\rho)$ à l'interieur du fil, éq.(9.166), par la même méthode, mais en intégrant l'éq.(9.116) sur la surface du disque S_R qui est plus petite que la section du fil, $R < a$, Fig.74.

Faisons finalement une vérification directe des expressions (9.166), (9.167) pour le champ magnétique (à l'interieur et à l'exterieur du cylindre) par l'éq.(6), prise directement, sans intégration.

Pour $\vec{B}(\vec{r})$ de la forme

$$\vec{B}(\vec{r}) = B_\phi(\rho) \cdot \vec{e}_\phi \tag{9.175}$$

qui est notre cas, on trouve :

$$\begin{aligned} r\vec{o}t\vec{B} &= \frac{1}{\rho}[\partial_\phi B_z - \partial_z(\rho B_\phi)] \cdot \vec{e}_\rho \\ &+[\partial_z B_\rho - \partial_\rho B_z] \cdot \vec{e}_\phi \\ &+\frac{1}{\rho}[\partial_\rho(\rho B_\phi) - \partial_\phi B_\rho] \cdot \vec{e}_z \\ &= \frac{1}{\rho}\partial_\rho(\rho B_\phi)\vec{e}_z \end{aligned} \tag{9.176}$$

Pour $\rho < a$, mettons B_ϕ dans l'éq. (9.166) (la valeur que nous sommes en train à vérifier). On obtient :

$$\begin{aligned} r\vec{o}t\vec{B} &= \frac{1}{\rho}\partial_\rho(\rho B_\phi) \cdot \vec{e}_z = \frac{1}{\rho}\partial_\rho(\rho \cdot \frac{\mu_0 j_0}{2}\rho) \cdot \vec{e}_z \\ &= \frac{\mu_0 j_0}{2}\frac{1}{\rho}\partial_\rho(\rho^2) \cdot \vec{e}_z = \mu_0 j_0 \cdot \vec{e}_z \end{aligned} \tag{9.177}$$

– en accord avec l'éq.(9.116), car à l'interieur du fil, $\rho < a$, $\vec{j} = j_0 \cdot \vec{e}_z$, éq.(9.132).

Pour $\rho > a$, B_ϕ est donné par l'éq.(9.167). En mettant cette valeur de B_ϕ dans l'éq.(9.176), on obtient :

$$\begin{aligned} r\vec{o}t\vec{B} &= \frac{1}{\rho}\partial_\rho(\rho \cdot B_\phi) \cdot \vec{e}_z \\ &= \frac{1}{\rho}\partial_\rho(\rho \cdot \mu_0 j_0 \frac{a^2}{2} \cdot \frac{1}{\rho}) \cdot \vec{e}_z \\ &= \mu_0 j_0 \frac{a^2}{2} \cdot \frac{1}{\rho}\partial_\rho(1) \cdot \vec{e}_z = 0 \cdot \vec{e}_z = \vec{0} \end{aligned} \tag{9.178}$$

– toujours en accord avec l'éq.(9.116), car à l'exterieur du fil $\vec{j} = \vec{0}$, l'éq.(9.132).

10 Équations différentielles d'ordre 1.

10.1 Équations différentielles d'ordre 1 qui sont solubles par la séparation de variables.

Ce sont les équations d'une forme générale

$$y'(t) = f(t)g(y) \tag{10.1}$$

Elles se résoudent comme suit :

$$\frac{dy}{dt} = f(t)g(y) \tag{10.2}$$

$$\frac{dy}{g(y)} = f(t)dt \tag{10.3}$$

$$\int \frac{dy}{g(y)} = \int dt f(t) \tag{10.4}$$

Faudra ensuite intégrer, sur y dans la partie gauche et sur t dans la partie droite.

Exemples

1) Soit l'équation

$$ty + (t+1)y'(t) = 0 \tag{10.5}$$

Solution :

$$ty = -(t+1)y'(t) \tag{10.6}$$

$$ty = -(t+1)\frac{dy}{dt} \tag{10.7}$$

$$\frac{t}{t+1}dt = -\frac{dy}{y} \tag{10.8}$$

$$\int \frac{t}{t+1}dt = -\int \frac{dy}{y} \tag{10.9}$$

$$\int \frac{t+1-1}{t+1}dt = -\int \frac{dy}{y} \tag{10.10}$$

$$\int (1 - \frac{1}{t+1})dt = -\int \frac{dy}{y} \tag{10.11}$$

$$t - \log(t+1) = -\log y + C \tag{10.12}$$

$$\log y = \log(t+1) - t + C \tag{10.13}$$

$$y = A(t+1)e^{-t}, \quad A = e^C \tag{10.14}$$

2) Soit l'équation

$$(t^2-1)y' + 2ty^2 = 0 \tag{10.15}$$

avec la condition initiale

$$y(0) = 1 \tag{10.16}$$

Solution :

$$(t^2-1)\frac{dy}{dt} = -2ty^2 \tag{10.17}$$

$$-\frac{dy}{y^2} = \frac{2t}{t^2-1}dt \tag{10.18}$$

$$-\int \frac{dy}{y^2} = \int \frac{2t}{t^2-1}dt \tag{10.19}$$

$$-\int \frac{dy}{y^2} = \int \frac{d(t^2)}{t^2-1} \tag{10.20}$$

$$-\int \frac{dy}{y^2} = \int \frac{d(t^2-1)}{t^2-1} \tag{10.21}$$

$$\frac{1}{y} = \log|t^2-1| + C \tag{10.22}$$

$$y(t) = \frac{1}{\log(|t^2-1| \cdot A)}, \quad C = \log A \tag{10.23}$$

$y(0) = 1.$

$$1 = \frac{1}{\log(1 \cdot A)}; \quad \log A = 1, \quad A = e \tag{10.24}$$

$$y(t) = \frac{1}{\log|t^2-1| + 1} \tag{10.25}$$

3) Soit l'équation

$$y' \cdot ty = \sqrt{y^2+1} \tag{10.26}$$

Solution :

$$\frac{dy}{dt} \cdot ty = \sqrt{y^2+1} \tag{10.27}$$

$$\frac{dy \cdot y}{\sqrt{y^2+1}} = \frac{dt}{t}, \quad \int \frac{dy \cdot y}{\sqrt{y^2+1}} = \int \frac{dt}{t} \tag{10.28}$$

$$\int d(\sqrt{y^2+1}) = \int \frac{dt}{t} \tag{10.29}$$

$$\sqrt{y^2+1} = \log t + C \tag{10.30}$$

$$y^2 + 1 = (\log t + C)^2 \tag{10.31}$$

$$y^2 = (\log t + C)^2 - 1 \tag{10.32}$$

$$y(t) = \sqrt{(\log t + C)^2 - 1} \tag{10.33}$$

4) Soit l'équation

$$y'(t) + a \cdot y(t) = 0, \tag{10.34}$$

a est une constante.

Solution :

$$\frac{dy}{dt} = -ay \tag{10.35}$$

$$\frac{dy}{y} = -adt, \quad \int \frac{dy}{y} = -a \int dt \tag{10.36}$$

$$\log y = -at + C \tag{10.37}$$

$$y(t) = e^{-at+C} = A \cdot e^{-at}, \quad A = e^C \tag{10.38}$$

5) Soit l'équation

$$y \cdot y' + t = 1 \tag{10.39}$$

avec la condition initiale

$$y(0) = 1 \tag{10.40}$$

Solution :

$$y \cdot y' = 1 - t \tag{10.41}$$

$$y \frac{dy}{dt} = (1 - t) \tag{10.42}$$

$$ydy = (1 - t)dt \tag{10.43}$$

$$\frac{y^2}{2} = t - \frac{t^2}{2} + C \tag{10.44}$$

$$y^2 = 2t - t^2 + 2C \tag{10.45}$$

$$y(t) = \sqrt{2t - t^2 + 2C} \tag{10.46}$$

$y(0) = 1$.

$$1 = \sqrt{2C}, \quad 2C = 1 \tag{10.47}$$

$$y(t) = \sqrt{2t - t^2 + 1} \tag{10.48}$$

10.2. Équations différentielles linéaires d'ordre 1 avec des coefficients et second membre variables.

Nous allons étudier l'équations de la forme

$$y'(t) - g(t)y(t) = h(t) \tag{10.49}$$

où $g(t)$, $h(t)$ sont les fonctions données et $y(t)$ et la fonction à déterminer.

Méthode générale, méthode 1, de résolution de l'éq.(10.49).

On considère l'expression

$$y(t) \times e^{-\int_0^t g(u)du} \tag{10.50}$$

où $y(t)$ est supposé d'être la solution de l'éq.(10.49) qu'on cherche à déterminer. On dérive l'expression (10.50) :

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(y(t)e^{-\int_0^t g(u)du}) &= y'(t)e^{-\int_0^t g(u)du} - y(t)g(t)e^{-\int_0^t g(u)du} \\ &= (y'(t) - g(t)y(t))e^{-\int_0^t g(u)du} = h(t)e^{-\int_0^t g(u)du} \end{aligned} \tag{10.51}$$

Nous avons utilisé, d'une part, la proprieté des intégrales :

$$\frac{d}{db}\int_a^b dx f(x) = f(b) \tag{10.52}$$

D'autre part nous avons utilisé le fait que $y(t)$ doit être la solution de (10.49) : $y'(t) - g(t)y(t)$ doit être égale à $h(t)$.

Par (10.51).

$$\frac{d}{dt}(y(t)e^{-\int_0^t dug(u)}) = h(t)e^{-\int_0^t dug(u)} \tag{10.53}$$

Ensuite, intégration de l'éq.(10.53) ci-dessus nous permetera déterminer $y(t)$:

$$\int_0^t ds\frac{d}{ds}(y(s)e^{-\int_0^s dug(u)}) = \int_0^t dsh(s)e^{-\int_0^s dug(u)} \tag{10.54}$$

$$[y(s)e^{-\int_0^s dug(u)}]_0^t = \int_0^t dsh(s)e^{-\int_0^s dug(u)} \tag{10.55}$$

$$y(t)e^{-\int_0^t dug(u)} - y(0) = \int_0^t dsh(s)e^{-\int_0^s dug(u)} \tag{10.56}$$

$$y(t) - y(0)\cdot e^{\int_0^t dug(u)} = \int_0^t dsh(s)e^{\int_0^t dug(u)} \times e^{-\int_0^s dug(u)} \tag{10.57}$$

$$y(t) = y_0 \cdot e^{\int_0^t dug(u)} + \int_0^t dsh(s) e^{\int_s^t dug(u)} \tag{10.58}$$

$y(0) = y_0$ est la condition initial sur $y(t)$. Dans la partie droite nous avons utiliser la proprieté des intégrales :

$$\int_0^t dug(u) - \int_0^s dug(u) = \int_s^t dug(u) \tag{10.59}$$

Observons que, dans (10.58), le premier terme à droite, que nous allons noter $y_1(t)$,

$$y_1(t) = y_0 \cdot e^{\int_0^t dug(u)} \tag{10.60}$$

est la solution générale de l'éq.(10.49) sans second membre,

$$y'(t) - g(t)y(t) = 0 \tag{10.61}$$

En effet, l'eq.(10.61) se résoud par la séparation des variables :

$$y'(t) = g(t)y(t) \tag{10.62}$$

$$\frac{dy}{dt} = g \cdot y \tag{10.63}$$

$$\frac{dy}{y} = gdt \tag{10.64}$$

$$\log \frac{y(t)}{y(0)} = \int_0^t dug(u) \tag{10.65}$$

$$\frac{y(t)}{y(0)} = e^{\int_0^t dug(u)} \tag{10.66}$$

$$y(t) = y_0 \cdot e^{\int_0^t dug(u)} \tag{10.67}$$

On retrouve $y_1(t)$, l'eq.(10.60).

Le deuxiéme terme dans (10.58), que nous allons noter $y_2(t)$,

$$y_2(t) = \int_0^t dsh(s) e^{\int_s^t dug(u)} \tag{10.68}$$

est la solution particulière de l'éq.(10.49) complète, avec second membre. Elle est particulière dans le sens que

$$y_2(0) = 0 \tag{10.69}$$

c'est ce qui est évident de (10.68).

Également, on peut vérifier directement que $y_2(t)$ dans (10.68) vérifie (10.49). On effet :

$$\frac{dy_2(t)}{dt} = \frac{d}{dt}(\int_0^t dsh(s)e^{\int_s^t dug(u)})$$

$$= h(t)e^{\int_t^t dug(u)} + \int_0^t dsh(s) \cdot \frac{d}{dt}(e^{\int_s^t dug(u)})$$

$$= h(t) + \int_0^t dsh(s)g(t)e^{\int_s^t dug(u)}$$

$$= h(t) + g(t)y_2(t) \tag{10.70}$$

Nous avons trouver que

$$y_2'(t) = h(t) + g(t)y_2(t) \tag{10.71}$$

qui signifie que $y_2(t)$, éq.(10.68), vérifie l'éq.(10.49).

En résumé la solution générale de l'éq.(10.49) est de la forme :

$$y(t) = y_1(t) + y_2(t) \tag{10.72}$$

où

$$y_1(t) = y_{Generale,SSM}(t) = y_0 e^{\int_0^t dug(u)} \tag{10.73}$$

$$y_2(t) = y_{Part.,ASM}(t) = \int_0^t dsh(s)e^{\int_s^t dug(u)} \tag{10.74}$$

y_0 est la condition initiale sur $y(t)$, $y(0) = y_0$, qui est, si elle n'est pas specifiée, une constante arbitraire de la solution, constante d'intégration.

Exemple de résolution de l'éq.(10.49) par la méthode 1, éqs.(10.72)-(10.74) ci-dessus. Soit l'équation

$$f'(t) + f(t) = t \cdot e^t \tag{10.75}$$

Dans cette équation $g(t) = -1$, $h(t) = te^t$. Par (10.73), où sinon directement, par

$$f_1'(t) + f_1(t) = 0 \tag{10.76}$$

on trouve

$$f_1(t) = f_0 \cdot e^{-t} \tag{10.77}$$

Par (10.74),

$$f_2(t) = \int_0^t ds \cdot s \cdot e^s e^{-(t-s)}$$
$$= \int_0^t ds \cdot s \cdot e^{2s-t} = e^{-t} \times \int_0^t ds \cdot s \cdot e^{2s} \tag{10.78}$$

$$\int_0^t ds \cdot se^{2s} = [\frac{1}{2}se^{2s}]_0^t - \frac{1}{2}\int_0^t dse^{2s}$$
$$= \frac{t}{2}e^{2t} - \frac{1}{4}[e^{2s}]_0^t = \frac{t}{2}e^{2t} - \frac{1}{4}(e^{2t}-1) \tag{10.79}$$

$$f_2(t) = e^{-t} \times (\frac{t}{2}e^{2t} - \frac{1}{4}(e^{2t}-1)) \tag{10.80}$$

$$f_2(t) = \frac{t}{2}e^t - \frac{1}{4}e^t + \frac{1}{4}e^{-t} \tag{10.81}$$

$$f(t) = f_1(t) + f_2(t) = f_0 \cdot e^{-t} + \frac{t}{2}e^t - \frac{1}{4}e^t + \frac{1}{4}e^{-t}$$
$$= (f_0 + \frac{1}{4})e^{-t} + \frac{t}{2}e^t - \frac{1}{4}e^t \tag{10.82}$$

Méthode 2.

Dans cette méthode, on cherche la solution générale de equation SSM, $y_1(t)$,

$$y'(t) - g(t)y(t) = 0 \tag{10.83}$$

directement, par la séperation de variables. On trouve $y_1(t) = C \cdot \exp(\int_0^t dug(u))$.

Ensuite on cherche la solution générale de l'équation ASM,

$$y'(t) - g(t)y(t) = h(t) \tag{10.84}$$

par la variation de la constante d'intégration qui rentre dans $y_1(t)$, $C \to C(t)$.

Nous allons présenter cette méthode par la résolution de l'equation (10.75), dans l'exemple ci-dessus.

D'abord l'équation SSM

$$f'(t) + f(t) = 0 \tag{10.85}$$

Sa solution, par la séparation de variables, est

$$f_1(t) = C \cdot e^{-t} \tag{10.86}$$

qui s'accorde avec (10.77).

Ensuite, pour chercher $f(t)$, la solution générale de l'équation complète :

$$f'(t) + f(t) = t \cdot e^{t} \tag{10.87}$$

on prend $f(t)$ dans la forme :

$$f(t) = C(t) \cdot e^{-t} \tag{10.88}$$

avec $C(t)$ à déterminer. On trouve :

$$f'(t) = C'(t)e^{-t} - C(t)e^{-t} \tag{10.89}$$

En mettant (10.89), (10.88) dans (10.87), on trouve :

$$C'(t)e^{-t} - C(t)e^{-t} + C(t)e^{-t} = t \cdot e^{t} \tag{10.90}$$

$$C'(t)e^{-t} = te^{t} \tag{10.91}$$

$$C'(t) = t \cdot e^{2t} \tag{10.92}$$

$$C(t) = \int dtt \cdot e^{2t} = \frac{1}{2}te^{2t} - \frac{1}{2}\int dte^{2t} \tag{10.93}$$

$$C(t) = \frac{t}{2}e^{2t} - \frac{1}{4}e^{2t} + D \tag{10.94}$$

D est une constante d'intégration. On trouve :

$$f(t) = C(t)e^{-t} = \frac{t}{2}e^{t} - \frac{1}{4}e^{t} + D \cdot e^{-t} \tag{10.95}$$

qui est de la même forme que $f(t)$ dans (10.82), sauf que $D = f_0 + \frac{1}{4}$ dans (10.82), mais dans les deux cas on a des constantes arbitraires de deux côtés, donc ils sont équivalents.

Méthode 3.

Dans cette méthode ou cherche toujours la solution de l'équation SSM par la séparation de variables. Et ensuite on cherche la solution particulière de l'équation complète, ASM, en récopiant la fonction $h(t)$ à droite, en récopiant le SM.

Exemple ci-dessus,

$$f'(t) + f(t) = t \cdot e^t \tag{10.96}$$

1)

$$f'(t) + f(t) = 0 \tag{10.97}$$

$$f_1(t) = C \cdot e^{-t} \tag{10.98}$$

2)

$$f'(t) + f(t) = t \cdot e^t \tag{10.99}$$

Prenons $f_2(t)$ de la forme :

$$f_2(t) = (At + B)e^t \tag{10.100}$$

en récopiant le SM $t \cdot e^t$ dans (10.99), un polynôme d'ordre 1 en face de l'exponentielle. A et B sont des coefficients constants à déterminer.

Ensuite

$$f_2'(A) = Ae^t + (At + B)e^t \tag{10.101}$$

En mettant (10.101), (10.100) dans (10.99), on trouve :

$$Ae^t + (At + B)e^t + (At + B)e^t = t \cdot e^t \tag{10.102}$$

$$2Ate^t + (A + 2B)e^t = t \cdot e^t \tag{10.103}$$

On trouve qu'il faut que

$$2A = 1 \tag{10.104}$$

$$A + 2B = 0 \tag{10.105}$$

d'où :

$$A = \frac{1}{2}, \quad B = -\frac{1}{4} \tag{10.106}$$

Par (10.100)

$$f_2(t) = \frac{1}{2}te^t - \frac{1}{4}e^t \tag{10.107}$$

Finalement, on trouve la solution générale de l'équation (10.96):

$$f(t) = f_1(t) + f_2(t) = Ce^{-t} + \frac{t}{2}e^t - \frac{1}{4}e^t \tag{10.108}$$

qui s'accorde avec(10.95) et (10.82).

Remarque.

En effet, la méthode 3, qui est la plus simple, est limitée par les équations à $g(t)$ constante et par des fonctions spécifiques à droite, comme SM : polynomes, exponentielles multiplier par des poynômes, combinaison des $\sin t$, $\cos t$, $\sinh t$, $\cosh t$ multipliers par des polynômes. En général, par des types de fonctions qui se reproduisent sous les dérivations. Par contre, les méthodes 1 et 2 s'appliquent dans tous les cas de l'éq.(10.49).

Exemple 2.

$$f'(t) + f(t) = \log t \tag{10.109}$$

1.

$$f'(t) + f(t) = 0 \tag{10.110}$$

$$f_1(t) = C \cdot e^{-t} \tag{10.111}$$

2. Pour déterminer $f_2(t)$, la méthode 3 ne s'applique pas.

$$(\log t)' = \frac{1}{t}, \quad (\frac{1}{t})' = -\frac{1}{t^2}, \dots \tag{10.112}$$

Méthode 1. $g(t) = -1$, $h(t) = \log t$.

$$\begin{aligned} f_2(t) &= \int_0^t ds \log s \cdot \exp\{\int_s^t du(-1)\} \\ &= \int_0^t ds \log s \cdot \exp\{-(t-s)\} \\ &= e^{-t} \int_0^t ds \log s \cdot e^s \end{aligned} \tag{10.113}$$

$$f_2(t) = e^{-t} \int_0^t ds \log s \cdot e^s \tag{10.114}$$

La solution particulière, la fonction $f_2(t)$, s'exprime par cette intégrale. Elle ne s'exprime pas par des fonction élementaires, elle est plus compliquée.

La solution générale de l'éq.(10.109) et de la forme :

$$f(t) = f_1(t) + f_2(t) = Ce^{-t} + e^{-t} \int_0^t ds \log s \cdot e^s \tag{10.115}$$

Exemple 3.

Dans cet exemple nous allons traiter l'équation plus compliquée, où la méthode 1 est la plus efficace. Soit l'équation :

$$y'(t) - 2ty(t) = t \cdot e^{2t^2} \tag{10.116}$$

Dans cette équation

$$g(t) = 2t, \quad h(t) = t \cdot e^{2t^2} \tag{10.117}$$

Par les équations (10.72) - (10.74) on trouve :

$$y_1(t) = y_0 \cdot \exp\{\int_0^t du \cdot 2u\} = y_0 \exp\{[u^2]_0^t\} = y_0 \exp\{t^2\} \tag{10.118}$$

$$y_1(t) = y_0 \cdot e^{t^2} \tag{10.119}$$

$$\begin{aligned} y_2(t) &= \int_0^t ds \cdot se^{2s^2} \times \exp\{\int_s^t du \cdot 2u\} \\ &= \int_0^t ds \cdot s \cdot e^{2s^2} \exp\{[u^2]_s^t\} \\ &= \int_0^t ds \cdot s \cdot e^{2s^2} \exp\{t^2 - s^2\} \\ &= e^{t^2} \int_0^t ds \cdot se^{s^2} \\ &= e^{t^2} \times \frac{1}{2}[e^{s^2}]_0^t = e^{t^2} \frac{1}{2}(e^{t^2} - 1) \end{aligned} \tag{10.120}$$

$$y_2(t) = \frac{1}{2}(e^{2t^2} - e^{t^2}) \tag{10.121}$$

On trouve la solution générale de la forme :

$$y(t) = y_1(t) + y_2(t) \tag{10.122}$$

$$y(t) = y_0 \cdot e^{t^2} + \frac{1}{2}(e^{2t^2} - e^{t^2}) \tag{10.123}$$

Exercice.

Vous pouvez vérifier, en exercice, qu'on trouve le même résultat, la même fonction, avec la méthode de variation de la constante, méthode 2.

11 Équations defférentielles d'ordre 2 avec des coefficients constants mais second membre variable.

Soit l'équation

$$y''(t) + A \cdot y'(t) + B \cdot y(t) = h(t) \tag{11.1}$$

où A,B sont des coefficients constants; $h(t)$ est une fonction donnée; $y(t)$ est une fonction à déterminer.

Méthode générale de résolution, méthode 1.

On peut reécrire l'éq.(11.1) comme suit :

$$d_t^2 y_{(t)} + A d_t y(t) + B y(t) = h(t) \tag{11.2}$$

où d_t est la dérivée, $d_t y(t) = y'(t)$. Et ensuite comme :

$$(d_t - a)(d_t - b)y(t) = h(t) \tag{11.3}$$

où

$$a + b = -A, \quad a \cdot b = B \tag{11.4}$$

a et b sont les deux racines de l'équation dite characteristique :

$$r^2 + Ar + B = 0 \tag{11.5}$$

$$r_{(1)} = a, \quad r_{(2)} = b \tag{11.6}$$

À partir de la forme (11.3) de l'equation initiale (11.1), on trouve la solution comme suit.

Notons $(d_t - b)y(t)$ comme $z(t)$:

$$(d_t - b)y(t) = z(t) \tag{11.7}$$

En terme de $z(t)$, l'éq.(11.3) prend la forme :

$$(d_t - a)z(t) = h(t) \tag{11.8}$$

Alors la résolution de l'éq.(11.3), donc de l'éq.(11.1) intiale, se brise sur 2 étapes.

1. D'abord on résoud l'éq.(11.8), par les méthodes du chapitre 10.2. On détermine $z(t)$.

2. Ensuite on résoud l'éq.(7), avec $z(t)$ déjà connue. Toujours par les méthodes du chapitre 10.2. On détermine $y(t)$, qui est la solution de l'éq.(11.1).

On pratique, il est souvent plus simple d'organiser la résolution de l'éq.(11.1) un peu différement.

<u>Méthode 2.</u>

Dans cette méthode on cherche la solution générale de l'équation (11.1) sous la forme $y(t) = y_1(t) + y_2(t)$, où $y_1(t)$ est la solution générale de l'équation correspondante SSM :

$$y''(t) + Ay'(t) + By(t) = 0 \tag{11.9}$$

et $y_2(t)$ est la solution particulière de l'équation complète, ASM, l'éq.(11.1).

Nous cherchons d'abord la solution de l'équation homogène (SSM), l'éq.(11.9). Comme tout à l'heure, cette équation pourrait être mise sous la forme :

$$(d_t - a)(d_t - b)y(t) = 0 \tag{11.10}$$

– comp. l'éq.(11.3) ci-dessus. Pour résoudre l'équation (11.10) nous poursuivons, comme tout à l'heure dans le cas de l'éq.(11.3), par la méthode 1. Notons

$$(d_t - b)y(t) = z(t) \tag{11.11}$$

Alors l'éq.(11.10) prend la forme :

$$(d_t - a)z(t) = 0 \tag{11.12}$$

Sa solution, obtenue par la séparation des variables, est de la forme :

$$z(t) = C \cdot e^{at} \tag{11.13}$$

C est la constante d'intégration. Mettons (11.13) dans (11.11) :

$$(d_t - b)y(t) = C \cdot e^{at} \tag{11.14}$$

Solution générale de cette équation est de la forme, d'après le chapitre 10.2, méthodes 2 ou 3 :

$$y(t) = y_{(1)}(t) + y_{(2)}(t) \tag{11.15}$$

où $y_{(1)}(t)$ est la solution générale de l'éq.(11.14) homegéne, SSM,

$$y'(t) - by(t) = 0 \tag{11.16}$$

et $y_{(2)}(t)$ est la solution particulière de l'éq.(11.14) complète, ASM :

$$y'(t) - by(t) = C \cdot e^{at} \tag{11.17}$$

Par (11.16) on trouve

$$y_{(1)}(t) = D \cdot e^{bt} \tag{11.18}$$

D est la constante d'intégration.

La solution particulière de l'éq.(11.17), nous allons la chercher par la méthode 3 du chapitre 10.2, comme une copie du SM. Cherchons $y_{(2)}(t)$ sous la forme :

$$y_{(2)}(t) = \lambda \cdot e^{at} \tag{11.19}$$

où λ est le paramètre, coefficient constant, à déterminer. Par (11.19),

$$y'_{(2)}(t) = \lambda a e^{at} \tag{11.20}$$

Mettons (11.20), (11.19) dans (11.17) :

$$\lambda a e^{at} - b \cdot \lambda e^{at} = C \cdot e^{at} \tag{11.21}$$

D'ici on obtient :

$$\lambda(a - b) = C \tag{11.22}$$

$$\lambda = \frac{C}{a - b} \tag{11.23}$$

Nous allons écarter le cas légérement plus compliqué où a=b.

En mettant (11.23) dans (11.19) on trouve $y_{(2)}(t)$:

$$y_{(2)}(t) = \frac{C}{a-b}e^{at} \tag{11.24}$$

Finalement, $y(t)$, solution de l'éq.(11.14),

$$y'(t) - by(t) = C \cdot e^{at} \tag{11.25}$$

et donc des équations (11.10),(11.9), est trouvée d'être de la forme :

$$y(t) = y_{(1)}(t) + y_{(2)}(t) = D \cdot e^{bt} + \frac{C}{a-b}e^{at} \tag{11.26}$$

En retournant à l'équation homogène (11.9), SSM, on peut constater, par (11.26), que sa solution générale est donnée par la combinaison linéaire des deux exponentielles

$$e^{at} \quad \text{et} \quad e^{bt} \tag{11.27}$$

avec des coefficients qui sont deux constantes arbitraires D et $C/(a+b)$, qu'on peut marquer également comme $D_1 = D$ et $D_2 = C/(a-b)$ (comme C est arbitraire, $C/(a-b)$ est également une constante arbitraire). D'où,

Méthode 2, simplifiée.

Soit, à nouveau, l'équation (11.1) initiale :

$$y''(t) + Ay'(t) + By(t) = h(t) \tag{11.28}$$

Sa solution générale sera recherchée dans la forme

$$y(t) = y_1(t) + y_2(t) \tag{11.29}$$

où $y_1(t)$ et la solution générale de l'équation homogène

$$y''(t) + Ay'(t) + By(t) = 0 \tag{11.30}$$

et $y_2(t)$ est la solution particulière de l'équation complète, éq.(11.28).

La solution générale de l'équation homogène (11.30) est de la forme :

$$y_1(t) = C_1 e^{at} + C_2 e^{bt} \tag{11.31}$$

où a, b sont des racines de l'équation characteristique correspondante :

$$r^2 + Ar + B = 0 \tag{11.32}$$

et C_1, C_2 sont des constantes d'intégration, constantes arbitraires.

La solution particulière de l'équation complète, (11.28), elle pourrait être définie par la méthode de variation des constantes d'intégration C_1 et C_2 qui rentrent dans la solution de l'équation homogène, éq.(11.30), (11.31), – à comparer avec la méthode 2 du chapitre précédent.

Dans le cas actuel, de l'équation différentielle d'ordre 2, cette méthode prend la forme suvante.

D'abord, pour un peu plus de clarté dans la suite, nous réécrirons l'éq.(11.31) comme suit :

$$y_1(t) = C_1 \cdot u_1(t) + C_2 \cdot u_2(t) \tag{11.33}$$

où

$$u_1(t) = e^{at}, \quad u_2(t) = e^{bt} \tag{11.34}$$

sont les deux solutions de l'équation homogène.

Ensuite, en dérivant l'éq.(11.33), nous trouvons :

$$y_1'(t) = C_1 \cdot u_1'(t) + C_2 \cdot u_2'(t) \tag{11.35}$$

À ce point nous remplaçons les constantes C_1, C_2, dans (11.33), (11.35), par deux fonctions

$$C_1 \to \lambda(t), \quad C_2 \to \mu(t) \tag{11.36}$$

Nous remplaçons également $y_1(t)$ par $y_2(t)$, la solution particulière que nous cherchons. Nous trouvons :

$$y_2(t) = \lambda(t)u_1(t) + \mu(t)u_2(t) \tag{11.37}$$

$$y_2'(t) = \lambda(t)u_1'(t) + \mu(t) \cdot u_2'(t) \tag{11.38}$$

Pour consistance, il faudra que la dérivée de la première équation soit équale à la deuxième. En dérivant (11.37) on obtient :

$$\begin{aligned} y_2'(t) &= \lambda'(t)u_1(t) + \mu'(t)u_2(t) \\ &\quad +\lambda(t)u_1'(t) + \mu(t) \cdot u_2'(t) \end{aligned} \tag{11.39}$$

Pour s'accorder avec (11.38), il faut que

$$\lambda'(t)u_1(u) + \mu'(t)u_2(t) = 0 \tag{11.40}$$

c'est qui nous donne déjà une équation sur les 2 fonctions inconnues, $\lambda(t)$ et $\mu(t)$.

Deuxième équation sur $\lambda(t)$, $\mu(t)$ on obtient en dérivant (11.38) :

$$\begin{aligned} y_2''(t) &= \lambda'(t)u_1'(t) + \mu'(t)u_2'(t) \\ &\quad +\lambda(t)u_1''(t) + \mu(t) \cdot u_2''(t) \end{aligned} \tag{11.41}$$

et en substituant (11.41), (11.38) et (11.37) dans l'équation de départ, éq.(11.28). Avec un petit calcul on trouve qu'il faudra que

$$\lambda'(t)u_1'(u) + \mu'(t)u_2'(t) = h(t) \tag{11.42}$$

Dans le petit calcul qui emmène à (11.42) il falllait prendre en compte que $u_1(t)$, $u_2(t)$ vérifient l'équation homogène, éq.(11.30). À vérifier, en exercice.

À partir des équations (11.40) et (11.42) on détermine $\lambda'(t)$, $\mu'(t)$:

$$\lambda'(t) = \frac{-h(t) \cdot u_2(t)}{u_1(t) \cdot h_2'(t) - u_1'(t)u_2(t)} \tag{11.43}$$

$$\mu'(t) = \frac{h(t) \cdot u_1(t)}{u_1(t) \cdot u_2'(t) - u_1'(t) \cdot u_2(t)} \tag{11.44}$$

Mettons les exponentielles dans (11.34), pour $u_1(t)$, $u_2(t)$, dans (11.43), (11.44). On alors trouve, avec des petits calculs, que :

$$\lambda'(t) = -\frac{1}{b-a}e^{-bt}h(t) \tag{11.45}$$

$$\mu'(t) = \frac{1}{b-a} e^{-at} h(t) \tag{11.46}$$

En intégrant, on trouve $\lambda(t)$, $\mu(t)$:

$$\lambda(t) = -\frac{1}{b-a} \int dt\, e^{-bt} h(t) \tag{11.47}$$

$$\mu(t) = \frac{1}{b-a} \int dt\, e^{-at} h(t) \tag{11.48}$$

Pour $h(t)$ donnée, foudra déterminer les intégrales dans (11.47), (11.48) et substituer finalement $\lambda(t)$, $\mu(t)$ dans (11.37), pour déterminer la solution particulière $y_2(t)$ de l'éq.(11.28).

La solution générale de l'éq.(11.28) sera donnée par la somme de $y_1(t)$, dans (11.31), et $y_2(t)$:

$$y(t) = C_1 e^{at} + C_2 e^{bt} + \lambda(t) e^{at} + \mu(t) e^{bt} \tag{11.49}$$

Nous allons tester cette méthode en terme d'un exercice qui sera donné plus loins, à la fin du chapitre.

Méthode 3.

Cette méthode est différente de la méthode 2 par la détermination de la solution particulière, de notre éq.(11.1), ou (11.28).

Tout comme dans la méthode 2, la solution générale de l'éq.(11.1) est recherchée sous la forme

$$y(t) = y_1(t) + y_2(t) \tag{11.50}$$

où $y_1(t)$ et la solution générale de l'équation homogène (SSM) et $y_2(t)$ est la solution particulière de l'équation complète, éq.(11.1).

$y_1(t)$ est toujours de la forme :

$$y_1(t) = C_1 e^{at} + C_2 e^{bt} \tag{11.51}$$

a, b sont les deux racines de l'équation charactéristique pour l'éq.(11.1) SSM:

$$r^2 + Ar + B = 0 \tag{11.52}$$

Par contre la solution particulière, $y_2(t)$, est recherchée, dans la methode 3, sous la forme de la fonction $h(t)$, dans (11.1), sous la forme du second membre, si le type de la fonction $h(t)$ le permet : voir les remarques sur des limitations de la méthode 3, dans le chapitre 10.2.

Sinon, si $h(t)$ est plus compliquée, dans ce cas faudra chercher la solution soit par la méthode 2, de variation des constantes d'integration, soit par la methode générale, méthode 1, présentée tout au debut de ce chapitre.

Exemple

Soit l'équation

$$y''(t) - y'(t) - 2y(t) = t \cdot e^t \tag{11.53}$$

1. Équation homogène :

$$y''(t) - y'(t) - 2y(t) = 0 \tag{11.54}$$

$$r^2 - r - 2 = 0 \tag{11.55}$$

$$r_{1,2} = \frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} + 2} = \frac{1}{2} \pm \frac{3}{2} \tag{11.56}$$

$$r_{(1)} = 2, \quad r_{(2)} = -1 \tag{11.57}$$

$$r^2 - r - 2 = (r-2)(r+1) \tag{11.58}$$

$$y_1(t) = C_1 e^{2t} + C_2 e^{-t} \tag{11.59}$$

– solution générale de l'équation homogène.

2. Nous allons chercher la solution particulière de l'équation (11.53), $y_2(t)$, par la methode 3.

La fonction $h(t) = t \cdot e^t$ suggère la forme suivante de $y_2(t)$:

$$y_2(t) = (\lambda_1 t + \lambda_0)e^t \tag{11.60}$$

où les coefficients λ_1, λ_2 sont à déterminer.

Ensuite :

$$y_2'(t) = \lambda_1 e^t + (\lambda_1 t + \lambda_0)e^t \tag{11.61}$$

$$y_2'(t) = (\lambda_1 t + \lambda_1 + \lambda_0)e^t \tag{11.62}$$

$$y_2''(t) = \lambda_1 e^t + (\lambda_1 t + \lambda_1 + \lambda_0)e^t \tag{11.63}$$

$$y_2''(t) = (\lambda_1 t + 2\lambda_1 + \lambda_0)e^t \tag{11.64}$$

$$\begin{aligned} & y_2''(t) - y'(t) - 2y(t) \\ = (\lambda_1 t + 2\lambda_1 + \lambda_0)e^t - (\lambda_1 t + \lambda_1 + \lambda_0)e^t & - 2(\lambda_1 t + \lambda_0)e^t \\ & = (-2\lambda_1 t + \lambda_1 - 2\lambda_0)e^t \end{aligned} \tag{11.65}$$

Alors, par l'éq.(11.53), il faut que

$$(-2\lambda_1 t + \lambda_1 - 2\lambda_0)e^t = t \cdot e^t \tag{11.66}$$

On trouve qu'il faut que

$$-2\lambda_1 = 1 \tag{11.67}$$

$$\lambda_1 - 2\lambda_0 = 0 \tag{11.68}$$

d'où

$$\lambda_1 = -\frac{1}{2} \tag{11.69}$$

$$\lambda_0 = -\frac{1}{4} \tag{11.70}$$

Donc on trouve la solution particulière

$$y_2(t) = -(\frac{1}{2}t + \frac{1}{4})e^t \tag{11.71}$$

Finalement,

$$y(t) = y_1(t) + y_2(t) = C_1 e^{2t} + C_2 e^{-t} - (\frac{t}{2} + \frac{1}{4})e^t \tag{11.72}$$

est la solution générale de l'éq.(11.53).

<u>Exercice.</u>

Retrouver la solution (11.72) de l'équation (11.53) par la methode 2, de variation des constantes d'integration.

Pour fixer les deux constantes, C_1 et C_2 dans la solution générale (11.72), il y a beaucoup des possibilités. Deux examples.

1. On impose les conditions initiales : $y(0) = 0$ et $y'(0) = 1$. Alors

$$y(0) = C_1 + C_2 - \frac{1}{4} = 0 \tag{11.73}$$

$$y'(t) = 2C_1e^{2t} - C_2e^{-t} - \frac{1}{2}e^t - (\frac{t}{2} + \frac{1}{4})e^t = 2C_1e^{2t} - C_2e^{-t} - (\frac{t}{2} + \frac{3}{4})e^t \tag{11.74}$$

$$y'(0) = 2C_1 - C_2 - \frac{3}{4} = 1 \tag{11.75}$$

Les équations (11.73) et (11.75) fixent les valeurs des constantes C_1 et C_2. Il faudra que $C_1 = \frac{2}{3}$ et $C_2 = -\frac{5}{12}$.

2. On impose la condition limite : $y(t)$ tend vers 0 quand t tend vers $-\infty$. Cette condition demande que $C_2 = 0$. Si on plus on demande que $y(t)$ passe par 0 à $t = 0$, alors, par (11.73), il faudra que $C_1 = \frac{1}{4}$.

12 Annexe 1. Calcul des dérivées.

1. Les dérivés de base

1)

$$(\sin x)' = \cos x \tag{12.1}$$

2)

$$(\cos x)' = -\sin x \tag{12.2}$$

3)

$$(\ln x)' = \frac{1}{x} \tag{12.3}$$

4)

$$(e^x)' = e^x \tag{12.4}$$

5)

$$(x^\gamma)' = \gamma \cdot x^{\gamma - 1} \tag{12.5}$$

6)

$$\left(\frac{1}{(x)^\lambda}\right)' = -\lambda \cdot \frac{1}{(x)^{\lambda+1}} \tag{12.6}$$

Rémarque : 6) est un cas particulier de 5).

2. Quelques méthodes de dérivations.

1)

$$(UV)' = U' \cdot V + U \cdot V' \tag{12.7}$$

2)

$$\left(\frac{U}{V}\right) = \frac{U' \cdot V - U \cdot V'}{V^2} \tag{12.8}$$

Exemple :

$$(\tan x)' = \left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)' = \frac{(\sin x)' \cos x - \sin x (\cos x)'}{(\cos x)^2} = \frac{(\cos x)^2 + (\sin x)^2}{(\cos x)^2} = \frac{1}{(\cos x)^2} \tag{12.9}$$

$$(\tan x)' = \frac{1}{(\cos x)^2} \tag{12.10}$$

3) Dérivée d'une fonction composée.

$$(f(u(x)))' = (f(u))'_u \cdot (u(x))'_x \tag{12.11}$$

Exemples.

a)

$$(e^{x^2})' = (e^{u(x)})' = (e^u)'_u \cdot (u(x))'_x = e^u \cdot (x^2)' = e^{x^2} \cdot 2x \tag{12.12}$$

$$(e^{x^2})' = 2x \cdot e^{x^2} \tag{12.13}$$

Evidement que dans cet exercice j'ai noté $x^2 = u(x)$

b)

$$(\sin(3x))' = (\sin(u(x)))' = (\sin u)'_u \cdot (u(x))'_x = \cos u \cdot (3x)' = \cos(3x) \cdot 3 \tag{12.14}$$

$$(\sin(3x))' = 3 \cdot \cos(3x) \tag{12.15}$$

c)

$$(\ln(x^2))' = (\ln(u(x)))' = (\ln u)'_u \cdot (u(x))'_x = \frac{1}{u} \cdot (x^2)' = \frac{1}{x^2} \cdot 2x = \frac{2}{x} \tag{12.16}$$

$$(\ln(x^2))' = \frac{2}{x} \tag{12.17}$$

Sinon,autrement, dans ce cas particul

$$(\ln x^2)' = (2 \ln x)' = \frac{2}{x} \tag{12.18}$$

d)

$$(\ln(\sin x))' = (\ln(u(x))' = (\ln u)'_u \cdot (u(x))'_x = \frac{1}{u} \cdot (\sin x)' = \frac{1}{\sin x} \cdot \cos x \tag{12.19}$$

$$(\ln(\sin x))' = \frac{\cos x}{\sin x} = \frac{1}{\tan x} \tag{12.20}$$

e)

$$(\sqrt{1+x^2})' = (\sqrt{u(x)})' = (\sqrt{u})'_u \cdot (u(x))'_x$$

$$= \frac{1}{2} u^{\frac{1}{2}-1} \cdot (1+x^2)' = \frac{1}{2} \cdot u^{-\frac{1}{2}} \cdot 2x = \frac{1}{\sqrt{u}} \cdot x = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} \tag{12.21}$$

$$(\sqrt{1+x^2})' = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} \tag{12.22}$$

f)

$$\left(\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\right)' = ((1+x^2)^{-\frac{1}{2}})' = ((u)^{-\frac{1}{2}})'_u \cdot (u(x)'_x$$

$$= -\frac{1}{2} \cdot (u)^{-\frac{1}{2}-1} \cdot (1+x^2)' = -\frac{1}{2}(u)^{-\frac{3}{2}} \cdot 2x = -\frac{x}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}} \tag{12.23}$$

$$\left(\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\right)' = -\frac{x}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}} \tag{12.24}$$

<u>Rémarque.</u>

Les exemples de calculs ci-dessus sont excessivement détaillés. Après, avec un peu d'experience, on peut écrire plus court, sans évoquer explicitement la fonction $u(x)$, mais, dans les calculs, elle est toujours présente, implicitement. Par exemple :

a)

$$(e^{x^2})' = e^{x^2} \cdot (x^2)' = e^{x^2} \cdot 2x, \tag{12.25}$$

ou même plus court :

$$(e^{x^2})' = e^x \cdot 2x \tag{12.26}$$

c)

$$(\ln(x^2))' = \frac{1}{x^2} \cdot (x^2)' = \frac{1}{x^2} \cdot 2x = \frac{2}{x^2} \tag{12.27}$$

<u>3. Exercices.</u> [Réponses]

1)

$$(e^{3x^2})' \qquad [6x \cdot e^{3x^2}] \tag{12.28}$$

2)

$$(\ln(1+x^3))' \qquad \left[\frac{3x^2}{1+x^3}\right] \tag{12.29}$$

3)

$$(\ln(3x+2x^2))' \qquad \left[\frac{3+4x}{3+2x^2}\right] \tag{12.30}$$

4)
$$\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)' \qquad \left[-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{(x)^{\frac{3}{2}}}\right] \tag{12.31}$$

5)
$$(\sqrt{2x+3x^2})' \qquad \left[\frac{1+3x}{\sqrt{2x+3x^2}}\right] \tag{12.32}$$

6)
$$(e^{\sin x})' \qquad [e^{\sin x}\cdot\cos x] \tag{12.33}$$

7)
$$\left(\frac{1}{\sqrt{5+x^2}}\right)' \qquad \left[\frac{-x}{(5+x^2)^{\frac{3}{2}}}\right] \tag{12.34}$$

8)
$$(x\cdot e^{x^2})' \qquad [(1+2x^2)e^{x^2}] \tag{12.35}$$

9)
$$(x\cdot e^{-x^3})' \qquad [e^{-x^3}+x\cdot(-3x^2)e^{x^3}=(1-3x^3)e^{-x^3}] \tag{12.36}$$

10)
$$(x\cdot\sin x)' \qquad [\sin x+x\cdot\cos x] \tag{12.37}$$

11)
$$\left(\frac{1}{\sin x}\right)' \qquad \left[-\frac{\cos x}{(\sin x)^2}\right] \tag{12.38}$$

12)
$$\left(\frac{1}{\cos x}\right)' \qquad \left[\frac{\sin x}{(\cos x)^2}\right] \tag{12.39}$$

13)
$$(e^x\cdot\cos x)' \qquad [e^x\cdot(\cos x-\sin x)] \tag{12.40}$$

14)
$$(e^{x^2})'' \qquad [(2xe^{x^2})'=2e^{x^2}+2x2xe^{x^2}=(2+4x^2e^{x^2}] \tag{12.41}$$

15)
$$(\sqrt{x})'' \qquad \left[\left(\frac{1}{2\sqrt{x}}\right)'=-\frac{1}{4}\frac{1}{(x)^{\frac{3}{2}}}\right] \tag{12.42}$$

13 Annexe 2. Calcul des intégrales par la primitive.

Rappelons d'abord 2 méthodes qui sont utiles dans les calculs des intégrales par la primitive, en plus de la formule de Newton-Leibniz.

1.Intégration par parties :

$$\int_a^b dx\, U(x)V'(x) = U(x)V(x)|_a^b - \int_a^b dx\, U'(x)V(x) \tag{13.1}$$

La démonstration est évidante :

$$\int_a^b dx\, (U(x)V(x))' = (U(x)V(x))|_a^b \tag{13.2}$$

– d'une part. D'autre part :

$$\int_a^b dx\, (f(x)g(x))' = \int_a^b dx\, U'(x)V(x) + \int_a^b dx\, U(x)V'(x) \tag{13.3}$$

L'égalité des parties droites des (13.2) et (13.3) est équivalente à l'éq.(13.1).

2. Changement de la variable d'intégration :

$$\int_a^b dx\, f(x) = \int_\alpha^\beta dt\, \varphi'(t)f(\varphi(t)) \tag{13.4}$$

Le changement de la variable a été effectué :

$$x = \varphi(t), \quad dx = \varphi'(t)dt$$

$$\varphi(\alpha) = a, \quad \varphi(\beta) = b \tag{13.5}$$

Exemples.

1)

$$I = \int_0^1 \frac{dx}{(1+x)\sqrt{x}} \tag{13.6}$$

$$x = t^2, \quad dx = 2tdt$$

$$x:\ 0 \to 1 \quad \text{correspond à} \quad t:\ 0 \to 1 \tag{13.7}$$

$$= \int_0^1 \frac{2tdt}{(1+t^2)t} = 2\int_0^1 \frac{dt}{1+t^2} = 2\arctan t|_0^1$$

$$= 2(\arctan(1) - \arctan(0)) = 2 \cdot (\frac{\pi}{4} - 0) = \frac{\pi}{2}$$

$$I = \frac{\pi}{2} \tag{13.8}$$

2)

$$I = \int_0^1 \frac{xdx}{\sqrt{1-x^2}} \tag{13.9}$$

$$x^2 = t, \quad 2xdx = dt, \quad xdx = \frac{dt}{2}$$

$$x:\ 0 \to 1 \quad \text{correspondà} \quad t:\ 0 \to 1 \tag{13.10}$$

$$= \int_0^1 \frac{dt}{2\sqrt{1-t}} \tag{13.11}$$

$$1 - t = u, \quad dt = -du$$

$$t\ : 0 \to \quad \text{correspond à} \quad u:\ 1 \to 0 \tag{13.12}$$

$$= -\int_1^0 \frac{du}{2\sqrt{u}} = \int_0^1 \frac{du}{2\sqrt{u}} = \frac{1}{2}\int_0^1 du\, u^{-1/2}$$

$$= \frac{1}{2}\frac{1}{1/2} \times u^{1/2}|_0^1 = 1 \times (1-0) = 1$$

$$I = 1 \tag{13.13}$$

3)

$$I = \int_0^1 dx\, \sqrt{1-x^2} \tag{13.14}$$

$$x = \sin t, \quad dx = \cos t \cdot dt$$

$$x:\ 0 \to 1 \quad \text{correspond à} \quad t:\ 0 \to \frac{\pi}{2} \tag{13.15}$$

$$= \int_0^{\pi/2} \cos t \cdot dt \cdot \sqrt{1 - \sin^2 t} = \int_0^{\pi/2} \cos^2 t \cdot dt$$

$$= \int_0^{\pi/2} \frac{1+\cos 2t}{2} dt = \frac{1}{2}\int_0^{\pi/2} dt + \frac{1}{2}\int_0^{\pi/2} \cos 2t \cdot dt$$

$$= \frac{1}{2} t|_0^{\frac{\pi}{2}} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \sin 2t|_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$$= \frac{\pi}{4} + \frac{1}{4}(\sin \pi - \sin 0) = \frac{\pi}{4}$$

$$I = \frac{\pi}{4} \tag{13.16}$$

4)

$$I = \int_0^{\pi/2} x \cdot \sin x \cdot dx \tag{13.17}$$

$$U = x, \quad V' = \sin x$$

$$U' = 1, \quad V = -\cos x \tag{13.18}$$

$$= x \cdot (-\cos x)|_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\pi/2} dx \cdot (-\cos x)$$

$$= -\frac{\pi}{2} \cdot \cos \frac{\pi}{2} + 0 \cdot \cos 0 + \int_0^{\pi/2} dx \cdot \cos x$$

$$= -0 + 0 + \sin |_0^{\frac{\pi}{2}} = \sin \frac{\pi}{2} - \sin 0 = 1$$

$$I = 1 \tag{13.19}$$

5)

$$I = \int_0^1 dx \cdot x \cdot \log x \tag{13.20}$$

$$U = \log x, \quad V' = x$$

$$U' = \frac{1}{x}, \quad V = \frac{x^2}{2} \tag{13.21}$$

$$= \frac{x^2}{2} \cdot \log x|_0^1 - \int_0^1 dx \frac{1}{x} \cdot \frac{x^2}{2}$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \log 1 - 0 \cdot \log 0 - \frac{1}{2} \int_0^1 dx \cdot x$$

$$= 0 - 0 - \frac{1}{2} \cdot \frac{x^2}{2}|_0^1 = -\frac{1}{4}$$

$$I = -\frac{1}{4} \tag{13.22}$$

Exercices.

1)

$$I = \int_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} \tag{13.23}$$

[Réponse : $\quad I = \pi/3$]

2)

$$I = \int_1^3 \frac{dx}{x} \tag{13.24}$$

[$I = \log 3$]

3)

$$I = \int_1^b \frac{dx}{2x-1}, \quad b > 1 \tag{13.25}$$

$\left[I = \frac{1}{2}\log(2b-1)\right]$

4)

$$I = \int_0^{\pi/2} dx \cdot \sin^2 x \tag{13.26}$$

[$I = I = \pi/4$]

5)

$$I = \int_0^{\pi/2} dx \cdot \cos^2 x \tag{13.27}$$

[$I = \pi/4$]

6)

$$I = \int_0^1 \frac{dx}{1+x^2} \tag{13.28}$$

[$I = \pi/4$]

7)

$$I = \int_0^1 \frac{x^2}{1+x^2} dx \tag{13.29}$$

[$I = 1 - \pi/4$]

8)

$$I = \int_0^{\pi/3} dx \, \tan x \tag{13.30}$$

$[I = \log 2]$

9)

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x \cdot \cos^2 x \cdot dx \tag{13.31}$$

$\left[I = \frac{1}{3}\right]$

10)

$$I = \int_1^2 \frac{xdx}{\sqrt{1+2x}} \tag{13.32}$$

Indication : $1 + 2x = t^2$

$\left[I = \frac{\sqrt{5}}{3}\right]$

11)

$$I = \int_{-1}^1 \frac{dx}{(1+x^2)^2} \tag{13.33}$$

Indication : $x = \tan t$

$\left[I = \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}\right]$

12)

$$I = \int_1^5 \frac{\sqrt{x-1}}{x} dx \tag{13.34}$$

Indication : $x - 1 = t^2$

$[I = 4 - 2\arctan 2]$

13)

$$I = \int_{3/4}^{4/3} \frac{dx}{x\sqrt{x^2+1}} \tag{13.35}$$

Indication : $x = \frac{1}{t}$

$\left[I = \log \frac{3}{2}\right]$

Table des primitives des fonctions classiques.

Comme la connaissance des primitives est importante dans les calculs des integrales, nous allons terminer ce chapitre avec un rappel de la table des primitives des fonctions classiques.

1)
$$f(x) = x^\alpha, \quad F(x) = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}, \quad \text{pour} \quad \alpha \neq -1 \tag{13.36}$$

2)
$$f(x) = \frac{1}{x}, \quad F(x) = \log|x| \tag{13.37}$$

La valeur absolue dans l'expression pour $F(x)$, dans ce cas particulier, signifie que $\log(x)$ et $\log(-x)$ sont, tous les deux, les primitives de la fonction $f(x) = 1/x$. En effet : $(\log(x))' = 1/x$ et $(\log(-x))' = 1/x$.

3)
$$f(x) = \sin x, \quad F(x) = -\cos x \tag{13.38}$$

4)
$$f(x) = \cos x, \quad F(x) = \sin x \tag{13.39}$$

5)
$$f(x) = \sinh x, \quad F(x) = \cosh x \tag{13.40}$$

6)
$$f(x) = \cosh x, \quad F(x) = \sinh x \tag{13.41}$$

7)
$$f(x) = \frac{1}{\cos^2 x}, \quad F(x) = \tan x \tag{13.42}$$

8)
$$f(x) = \frac{1}{\sin^2 x}, \quad F(x) = -\cot x \tag{13.43}$$

9)
$$f(x) = \frac{1}{\cosh^2 x}, \quad F(x) = \tanh x \tag{13.44}$$

10)

$$f(x) = \frac{1}{\sinh^2 x}, \quad F(x) = -\coth x \tag{13.45}$$

11)

$$f(x) = \tan x, \quad F(x) = -\log|\cos x| \tag{13.46}$$

12)

$$f(x) = \cot x, \quad F(x) = \log|\sin x| \tag{13.47}$$

13)

$$f(x) = \tanh x, \quad F(x) = \log|\cosh x| \tag{13.48}$$

14)

$$f(x) = \coth x, \quad F(x) = \log|\sinh x| \tag{13.49}$$

15)

$$f(x) = e^{\alpha x}, \quad F(x) = \frac{1}{\alpha} e^{\alpha x} \tag{13.50}$$

16)

$$f(x) = a^x, \quad F(x) = \frac{a^x}{\log a} \tag{13.51}$$

17)

$$f(x) = \frac{1}{1+x^2}, \quad F(x) = \arctan x \tag{13.52}$$

18)

$$f(x) = \frac{1}{a^2+x^2}, \quad F(x) = \frac{1}{a} \arctan \frac{x}{a} \tag{13.53}$$

19)

$$f(x) = \frac{1}{1-x^2}, \quad F(x) = \mathrm{arctanh}\, x = \frac{1}{2} \log|\frac{1+x}{1-x}| \tag{13.54}$$

20)

$$f(x) = \frac{1}{a^2-x^2}, \quad F(x) = \frac{1}{a}\mathrm{arctanh}\frac{x}{a} = \frac{1}{2a} \log|\frac{a+x}{a-x}| \tag{13.55}$$

21)

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \quad F(x) = \arcsin x \tag{13.56}$$

22)

$$f(x) = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}, \quad F(x) = \arccos x \tag{13.57}$$

23)

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}, \quad F(x) = \arcsin \frac{x}{a} \tag{13.58}$$

24)

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}, \quad F(x) = \operatorname{arcsinh} x = \log(x + \sqrt{x^2+1}) \tag{13.59}$$

25)

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}, \quad F(x) = \operatorname{arccosh} x = \log(x + \sqrt{x^2-1}) \tag{13.60}$$

26)

$$f(x) = \log x, \quad F(x) = x \log x - x \tag{13.61}$$

27)

$$f(x) = x^n \log x, \quad F(x) = \frac{x^{n+1}}{n+1} \log x - \frac{x^{n+1}}{(n+1)^2} \tag{13.62}$$

Démonstration de toutes ces formules s'obtient par dérivation de $F(x)$ et utilisation de la table correspondante des dérivées.

Comme il a été remarqué auparavant, à toutes ces expressions de $F(x)$ on peut ajouter une constante arbitraire. Par example, dans 1) on peut ecrire ègalement :

$$f(x) = x^\alpha, \quad F(x) = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C \tag{13.63}$$

Cette constante arbitraire est sous-entendue dans toutes les expression ci-dessus 1) - 25), pour $F(x)$.

14 Annexe 3. Séries de Taylor. Développement en série entières des fonctions classiques .

Soit $f(x)$ une fonction qui est infiniment dérivable (donc analytique) en $x = x_0$ et dans son voisinage proche. Alors $f(x)$ pourrait être présentée, dans le voisinage de x_0, par une série entière en puissances de $(x - x_0)$:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n \tag{14.1}$$

avec les coefficients $\{a_n\}$ de la forme :

$$a_n = \frac{1}{n!} f^{(n)}(x_0), \quad n = 0, 1, 2, ... \tag{14.2}$$

Autrement: dans le voisinage de x_0, où la série (14.1) converge,

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} f^{(n)}(x_0) \cdot (x - x_0)^n \tag{14.3}$$

<u>Démonstration.</u>

Ecrivons la série (14.1) dans la forme detaillée :

$$f(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)^2 + a_3(x - x_0)^3 + ... \tag{14.4}$$

En mettant $x = x_0$ dans (14.4) on trouve

$$f(x_0 = a_0 \tag{14.5}$$

Ensuite en dérivant la serie (14.4) une fois on trouve:

$$f'(x) = a_1 + 2a_2 \cdot (x - x_0) + 3a_3(x - x_0)^2 + ... \tag{14.6}$$

Mettons $x = x_0$ dans (14.6). On trouvera :

$$f'(x_0) = a_1 \tag{14.7}$$

Dérivons la série (14.6) encore une fois :

$$f"(x) = 2a_2 + 3 \cdot 2 \cdot (x - x_0) + ... \tag{14.8}$$

Mettons $x = x_0$ dans (14.8) :

$$f''(x_0) = 2a_2, \quad a_2 = \frac{1}{2}f''(x_0) \tag{14.9}$$

Evidement, si on continue, on trouvera les expressions (14.2) par les coefficients a_n, $n = 0, 1, 2, ...$

Exercices.

Démontrer les développements qui suivent pour des fonctions classiques.

1)

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + ... = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \tag{14.10}$$

2)

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - ... = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} \tag{14.11}$$

3)

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - ... = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} \tag{14.12}$$

4)

$$\sinh x = x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + ... = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} \tag{14.13}$$

5)

$$\cosh x = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + ... = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!} \tag{14.14}$$

6)

$$\log(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - ... = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} \tag{14.15}$$

7)

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + ... = \sum_{n=0}^{\infty} x^n \tag{14.16}$$

8)

$$(1+x)^{\gamma} = 1 + \gamma x + \frac{\gamma(\gamma-1)}{2!}x^2 + \frac{\gamma(\gamma-1)(\gamma-2)}{3!}x^3 + ... \tag{14.17}$$

Cette dernière série généralise, vers des puissances γ un nombre réel (non-entier, négatif, etc.) la formule pour le binôme :

$$(1+x)^m = 1 + mx + \frac{m(m-1)}{2!}x^2 + ... \tag{14.18}$$

Pour m entier positif, cette série se termine par un nombre fini des termes. Mais, en général, pour γ dans 8) non-entier ou négatif, (entier ou non-entier) la série 8) est infinie.

9) Trouver le développement limité de $\tan x$ (deux premiers termes, non-nuls) autour de $x_0 = 0$.

$\left[\text{Réponse : } \tan x \simeq x + \frac{x^3}{3}\right]$

10) En utilisant les séries pour les fonction e^x, $\sinh x$, $\cosh x$, $\sin x$, $\cos x$, démontrer les formules :

$$e^x = \cosh x + \sinh x, \quad e^{-x} = \cosh x - \sinh x \tag{14.19}$$

$$e^{ix} = \cos x + i \sin x, \quad e^{ix} = \cos x - i \sin x \tag{14.20}$$

D'en déduire les formules suivantes :

$$\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2} \tag{14.21}$$

$$\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2} \tag{14.22}$$

$$\cos x = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2} \tag{14.23}$$

$$\sin x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i} \tag{14.24}$$

11) Développer la fonction

$$f(x) = \frac{1}{1-x} \tag{14.25}$$

autour de :

$$1. \quad x_0 = 0 \tag{14.26}$$

$$2. \quad x_0 = \frac{1}{2} \tag{14.27}$$

$$3. \quad x_0 = 2 \tag{14.28}$$

– Donner quelques premiers termes. Donner également la forme générale de la série.

Indication. Pour traiter les deux derniers exercices (développement 2. et 3. ci-dessus), tout comme les exercices qui suivent, il est outile de réviser les méthodes indiquées dans le Complément 4.2., sur les développements limités, à la fin du chapitre sur le gradient.

[Réponse : 1. $\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + ... = \sum_{n=0}^{\infty} x^n$]

[Réponse : 2. $\frac{1}{1-x} = 2 + 4(x - \frac{1}{2}) + 8(x - \frac{1}{2})^2 + 16(x - \frac{1}{2})^3 + ... = 2\sum_{n=0}^{\infty} 2^n (x - \frac{1}{2})^n$]

[Réponse : 3. $\frac{1}{1-x} = -1 + (x-2) - (x-2)^2 + (x-2)^3 ... = -\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (x-2)^n$]

12) Développer

$$f(x) = \frac{3}{10 - 3x} \tag{14.29}$$

autour de $x_0 = 0$.

[Réponse : $\frac{3}{10-3} = \frac{3}{10} \sum_{n=0}^{\infty} (\frac{3}{10})^n$]

13) Développer $\sin x$ autour de :

$$1. \quad x_0 = \frac{\pi}{2} \tag{14.30}$$

$$2. \quad x_0 = \frac{\pi}{4} \tag{14.31}$$

$$3. \quad x_0 = \pi \tag{14.32}$$

Donner quelques premiers termes.

[Réponse : 1. $\sin x = 1 - \frac{1}{2}(x - \frac{\pi}{2})^2 + \frac{1}{4!}(x - \frac{\pi}{2})^4 ...$]

[Réponse : 2, $\sin x = \frac{1}{\sqrt{2}} \left[1 + (x - \frac{\pi}{4}) - \frac{1}{2}(x - \frac{\pi}{4})^2 - \frac{1}{3!}(x - \frac{\pi}{4})^3 + \frac{1}{4!}(x - \frac{\pi}{4})^4 + ... \right]$]

[Réponse : 3. $\sin x = -(x - \pi) + \frac{1}{3!}(x - \pi)^3 - \frac{1}{5!}(x - \pi)^5 + ...$]

14) Développer $\exp(x)$ autour de :

$$1. \quad x_0 = 0 \tag{14.33}$$

$$2. \quad x_0 = 1 \tag{14.34}$$

$$3. \quad x_0 = 2 \tag{14.35}$$

[Réponse : 1. $\exp(x) = 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + ...$]

[Réponse : 2, $\exp(x) = e \left(1 + (x-1) + \frac{1}{2}(x-1)^2 + \frac{1}{3!}(x-1)^3 + ... \right)$]

[Réponse : 3. $\exp(x) = e^2 \left(1 + (x-2) + \frac{1}{2}(x-2)^2 + \frac{1}{3!}(x-2)^3 ... \right)$]

15) Développer $f(x) = \log x$ autour de :

$$1. \quad x_0 = 1 \tag{14.36}$$

$$2. \quad x_0 = 2 \tag{14.37}$$

Est-ce qu'on peut développer $\log x$ autour de $x_0 = 0$?

$\Big[$Réponse : 1. $\qquad \log(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n}(x-1)^n \quad \Big]$

$\Big[$Réponse : 2. $\qquad \log(x) = \log(2) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n}(\frac{x-2}{2})^n \quad \Big]$

[Réponse : Non, on ne peut pas développer $\log x$ autour de $x_0 = 0$]

16) Développer $\sqrt{1+2x}$ autour de :

$$1. \quad x_0 = 0 \tag{14.38}$$

$$2. \quad x_0 = \frac{1}{2} \tag{14.39}$$

Donner 3 premiers termes.

$\Big[$Réponse : 1. $\qquad \sqrt{1+2x} = 1 + x - \frac{1}{2}x^2 + ... \quad \Big]$

$\Big[$Réponse : 2. $\qquad \sqrt{1+2x} = \sqrt{2}\left(1 + \frac{1}{2}(x-\frac{1}{2}) - \frac{1}{8}(x-\frac{1}{2})^2 + ...\right) \quad \Big]$

17) Le même exercice pour $\frac{1}{\sqrt{1+2x}}$.

$\Big[$Réponse : 1. $\qquad \frac{1}{\sqrt{1+2x}} = 1 - x + \frac{3}{2}x^2 + ... \quad \Big]$

$\Big[$Réponse : 2. $\qquad \frac{1}{\sqrt{1+2x}} = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(1 - \frac{1}{2}(x-\frac{1}{2}) + \frac{3}{8}(x-\frac{1}{2})^2 + ...\right) \quad \Big]$

18) En utilisant les développements limités des fonctions qui interviennent, trouver les limites suivantes :

$$1. \quad \lim_{x\to 0} \frac{\sin ax}{\sin bx} \tag{14.40}$$

$$2. \quad \lim_{x\to 0} \frac{\tan ax}{\sin bx} \tag{14.41}$$

$$3. \quad \lim_{x\to 0} \frac{\tan ax}{\cos bx} \tag{14.42}$$

$$4.^* \quad \lim_{x\to 1} \frac{\log x}{1-\sqrt{x}} \tag{14.43}$$

$\Big[$Réponse : 1. $\qquad \frac{a}{b} \quad \Big]$

$\Big[$Réponse : 2. $\qquad \frac{a}{b} \quad \Big]$

[Réponse : 3. $\qquad 0$]

[Réponse : 4. $\qquad -2$]