Correction des exercices de transition

1] Trigonométrie

1) On utilise la formule suivante :

$$\cos^2(x) = \frac{1+\cos(2x)}{2}$$

Ainsi :

$$\cos^2\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{1+\cos\left(\frac{\pi}{2}\right)}{2}$$

$$\Rightarrow \cos^2\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow \boxed{\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}}$$

Car d'après le cercle trigonométrique, $\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) > 0$.

Le sinus se trouve alors facilement :

$$\sin\left(\frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{1-\cos^2\left(\frac{\pi}{4}\right)}$$

$$\Rightarrow \sin\left(\frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{1-\frac{1}{2}}$$

$$\Rightarrow \sin\left(\frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{\frac{1}{2}}$$

$$\Rightarrow \boxed{\sin\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}}$$

On fait de même avec $\cos\left(\frac{\pi}{8}\right)$ et $\sin\left(\frac{\pi}{8}\right)$:

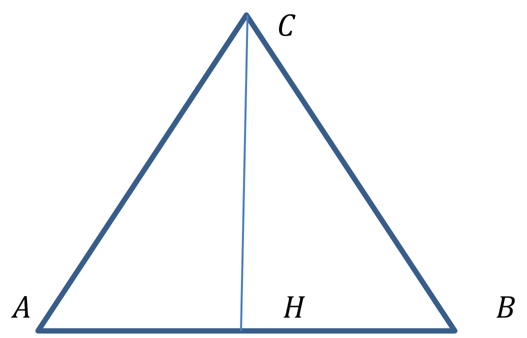
$$\cos^2\left(\frac{\pi}{8}\right) = \frac{1+\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)}{2} = \frac{2+\sqrt{2}}{4}$$

$$\Rightarrow \boxed{\cos\left(\frac{\pi}{8}\right) = \sqrt{\frac{1+\frac{\sqrt{2}}{2}}{2}} = \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}}$$

Et :

$$\boxed{\sin\left(\frac{\pi}{8}\right) = \sqrt{1-\cos^2\left(\frac{\pi}{8}\right)} = \sqrt{1-\frac{2+\sqrt{2}}{4}} = \frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}}$$

2) a) On trace un triangle équilatéral de côté 1 :



Chacun de ses angles mesure $\frac{\pi}{3}$ radians. La hauteur issue de C mesure $\frac{\sqrt{3}}{2}$ (c'est une propriété géométrique).

Dans le triangle rectangle ACH, on a : $\cos\widehat{CAH} = \cos\frac{\pi}{3} = \frac{AH}{AC}$

Grâce au théorème de Pythagore, on détermine AH qui vaut : $AH = \sqrt{AC^2 - CH^2} = \sqrt{1^2 - \frac{3}{4}} = \sqrt{\frac{1}{4}} = \frac{1}{2}$

D'où :

$$\boxed{\cos\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}}$$

On peut déterminer $\sin\frac{\pi}{3}$ tel que $\boxed{\sin\frac{\pi}{3} = \sqrt{1-\cos^2\left(\frac{\pi}{3}\right)} = \frac{CH}{AC} = \frac{\sqrt{3}}{2}}$

b) De la même manière, que pour la première question, on utilise :

$$\cos^2(x) = \frac{1+\cos(2x)}{2}$$

D'où :

$$\cos^2\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{1+\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)}{2}$$

$$\Rightarrow \cos^2\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{1+\frac{1}{2}}{2} = \frac{3}{4}$$

$$\Rightarrow \boxed{\cos\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}}$$

Car d'après le cercle trigonométrique, $\cos\left(\frac{\pi}{6}\right) > 0$.

D'où :

$$\boxed{\sin\left(\frac{\pi}{6}\right) = \sqrt{1-\cos^2\left(\frac{\pi}{6}\right)} = \frac{1}{2}}$$

De même :

$$\cos^2\left(\frac{\pi}{12}\right) = \frac{1+\cos\left(\frac{\pi}{6}\right)}{2}$$

$$\Rightarrow \cos^2\left(\frac{\pi}{12}\right) = \frac{1+\frac{\sqrt{3}}{2}}{2}$$

$$\Rightarrow \cos^2\left(\frac{\pi}{12}\right) = \frac{2+\sqrt{3}}{4}$$

$$\Rightarrow \boxed{\cos\left(\frac{\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2}}$$

Car d'après le cercle trigonométrique $\cos\frac{\pi}{12} > 0$

Et donc :

$$\sin\left(\frac{\pi}{12}\right) = \sqrt{1-\cos^2\left(\frac{\pi}{12}\right)}$$

$$\Rightarrow \sin\left(\frac{\pi}{12}\right) = \sqrt{1-\frac{2+\sqrt{3}}{4}}$$

$$\Rightarrow \boxed{\sin\left(\frac{\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2}}$$

3) a) $\tan x$ est définie si et seulement si $\cos x \neq 0$ donc si et seulement si $x \neq k\pi$ où k est un entier relatif.

Donc le domaine de définition de la fonction tangente est : $D_t = \mathbb{R}\_\{x = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$.

b) Soient a et b tels que $(a+b) \in \mathbb{R}\_\{x = \frac{\pi}{2} + \pi k, k \in \mathbb{Z}\}$.

Si a et b sont tels que $a \in \mathbb{R}\_\{x = \frac{\pi}{2} + \pi k, k \in \mathbb{Z}\}$ et $b \in \mathbb{R}\_\{x = \frac{\pi}{2} + \pi k, k \in \mathbb{Z}\}$ alors on peut exprimer $\tan(a+b)$ en fonction de $\tan a$ et $\tan b$ et on a alors :

$$\tan(a+b) = \frac{\sin(a+b)}{\cos(a+b)}$$

$$\Rightarrow \tan(a+b) = \frac{\sin a \cos b + \cos a \sin b}{\cos a \cos b - \sin a \sin b}$$

$$\Rightarrow \tan(a+b) = \frac{\frac{\sin a \cos b}{\cos a} + \frac{\cos a \sin b}{\cos a}}{\frac{\cos a \cos b}{\cos a} - \frac{\sin a \sin b}{\cos a}}$$

$$\Rightarrow \tan(a+b) = \frac{\tan a \frac{\cos b}{\cos b} + \frac{\sin b}{\cos b}}{\frac{\cos b}{\cos b} - \tan a \frac{\sin b}{\cos b}}$$

$$\Rightarrow \boxed{\tan(a+b) = \frac{\tan a + \tan b}{1 - \tan a \tan b}}$$

Et exactement, de la même manière, on trouve que :

Soient a et b tels que $(a-b) \in \mathbb{R}\_\{x = \frac{\pi}{2} + \pi k, k \in \mathbb{Z}\}$,

$$\boxed{\tan(a-b) = \frac{\sin(a-b)}{\cos(a-b)} = \frac{\tan a - \tan b}{1 + \tan a \tan b}}$$

4) D'après le théorème de Pythagore, on a :

$$OA = \rho = \sqrt{x^2 + y^2}$$

On note H le projeté orthogonal de A sur l'axe des abscisses. Le triangle OHA est donc rectangle en H et on alors :

$$\begin{cases} \cos\theta = \dfrac{OH}{OA} = \dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} \\ \sin\theta = \dfrac{HA}{OA} = \dfrac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} \end{cases}$$

Donc $A(x, y)$ peut également s'écrire $\boxed{A(\rho\cos\theta, \rho\sin\theta)}$. On a donc exprimé les coordonnées cartésiennes en fonction des coordonnées polaires ρ et θ.

5) On résout dans $\mathbb{R}$:

a) $\cos^2(x) + \sin(x) - 1 = 0$

$$\Leftrightarrow 1 - \sin^2(x) + \sin(x) - 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow \sin(x)\,(-\sin(x) + 1) = 0$$

Donc soit :

$$\sin x = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 + 2k\pi \\ x = \pi - 1 + 2k\pi \end{cases} \quad k \in \mathbb{Z}$$

Soit :

$$-\sin(x) + 1 = 0 \Leftrightarrow \sin(x) = 1 \Leftrightarrow \sin(x) = \sin\left(\frac{\pi}{2}\right)$$

D'où :

$$\begin{cases} x = \dfrac{\pi}{2} + 2k\pi \\ x = -\dfrac{\pi}{2} + 2k\pi \end{cases} \quad k \in \mathbb{Z}$$

Finalement donc:

$$\boxed{\begin{cases} x = 1 + 2k\pi \\ x = \pi - 1 + 2k\pi \\ x = \dfrac{\pi}{2} + 2k\pi \\ x = -\dfrac{\pi}{2} + 2k\pi \end{cases} \quad k \in \mathbb{Z}}$$

Si on regarde bien on peut combiner les deux résultats :

$$\begin{cases} x = \dfrac{\pi}{2} + 2k\pi \\ x = -\dfrac{\pi}{2} + 2k\pi \end{cases} \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

On a évité une écriture redondante.

b) $\sin(x) + \cos(x) - 1 = 0$

$$\sin(x) + \cos(x) - 1 = 0 \Leftrightarrow \sin(x) + \cos(x) = 1$$

$$\sin(x) + \cos(x) = 1 \Leftrightarrow \frac{\sqrt{2}}{2}\sin x + \frac{\sqrt{2}}{2}\cos x = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\Leftrightarrow \cos\left(\frac{\pi}{4}\right)\sin x + \sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\cos x = \sin\left(\frac{\pi}{4}\right)$$

$$\Leftrightarrow \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{4}\right)$$

Donc les solutions de l'équation initiale sont les reels x tels que :

$$\begin{cases} x + \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4} + 2k\pi \\ x + \frac{\pi}{4} = \pi - \frac{\pi}{4} + 2k\pi \end{cases}$$

D'où :

$$\boxed{\begin{cases} x = 2k\pi \\ x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi \end{cases} \quad k \in \mathbb{Z}}$$

c)

$$\sin(x)\cos(x) = \frac{1}{2} \Leftrightarrow 2\sin(x)\cos(x) = 1$$

$$\Leftrightarrow \sin(2x) = \sin(0)$$

Donc :

$$\begin{cases} 2x = 2k\pi \\ 2x = \pi - 2k\pi \end{cases}$$

Soit :

$$\boxed{\begin{cases} x = k\pi \\ x = \frac{\pi}{2}(1 - 2k) \end{cases} \quad k \in \mathbb{Z}}$$

d) Soit $x \in \mathbb{R}$

$$\cos^2(x)\sin^2(x) = -2$$

Cette équation n'admet aucune solution dans $\mathbb{R}$ car le produit de deux nombres positifs ne peut pas donner un nombre négatif. L'ensemble des solutions est l'ensemble vide.

2] Dérivation

1) a) Soit D_f l'ensemble de définition de f, on a :

$D_f =]0,+\infty[$ car ce qu'il y a sous une racine carrée doit toujours être positif ou nul et que le dénominateur doit être non-nul.

f est dérivable sur $]0,+\infty[$ comme composée de fonctions dérivables sur $]0,+\infty[$ (la fonction racine carrée et inverse sont dérivables sur cet intervalle) et :

Pour tout $x \in]0,+\infty[$,

$$\boxed{f'(x) = -\frac{1}{2\sqrt{x^3}}}$$

b) On doit avoir :

$$\begin{cases} x \neq 0 \\ x \neq -1 \\ x + \dfrac{1}{x} \geq 0 \end{cases}$$

Soit :

$$\begin{cases} x \neq 0 \\ x \neq -1 \\ \dfrac{x^2+1}{x} \geq 0 \end{cases}$$

Donc, $D_f =]0,+\infty[$, f est dérivable sur cet intervalle comme somme et composée de fonction dérivables sur cet intervalle, et :

Pour tout $x \in]0,+\infty[$,

$$\boxed{f'(x) = \frac{x^3+3x^2-x+1}{2x(x+1)^2\sqrt{x+\frac{1}{x}}}}$$

c) f est définie et dérivable sur $\mathbb{R}^*$ comme somme de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}^*$ et :

Pour tout $x \in \mathbb{R}^*$,

$$\boxed{f'(x) = -\sum_{k=1}^{n} \frac{k}{x^2}}$$

d) f est définie sur $]0,+\infty[$.

f est dérivable sur cet intervalle et pour tout $x \in\ ]0,+\infty[, f(x) = x + \frac{1}{\sqrt{x}}$

D'où :

Pour tout $x \in\ ]0,+\infty[\boxed{, f'(x) = 1 - \frac{1}{2\sqrt{x^3}}}$

e) f est définie si et seulement si :

$$\begin{cases} x \neq 0 \\ -x\left|\frac{1}{x}\right| > 0 \end{cases}$$

Cette fonction est donc définie sur $]-\infty,0[$ et, pour tout $x \in\ ]-\infty,0[$,

$$\boxed{f(x) = \sqrt{-x\frac{1}{-x}} = \sqrt{1}}$$

Car $\left|\frac{1}{x}\right| = -\frac{1}{x}$ car x est strictement négatif. Donc la dérivée de f est logiquement nulle.

f) f est définie sur $]0,+\infty[$ à cause de la racine carrée et du dénominateur.

Pour tout $\in\ ]0,+\infty[\ , f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$

f est dérivable sur son ensemble de définition comme composée de fonctions dérivables sur $]0,+\infty[$ et, pour tout $\in\ ]0,+\infty[\ , \boxed{f'(x) = \frac{-1}{2\sqrt{x^3}}}$

g) La fonction f est définie sur $]0,+\infty[$ à cause des racines carrées et du dénominateur. f est dérivable sur $]0,+\infty[$ et :

Pour tout $x \in\ ]0,+\infty[$

$$\boxed{f'(x) = -\frac{1}{4}\frac{1}{\sqrt{\sqrt{x^5}}}}$$

h) La fonction f est définie si et seulement si :

$$\begin{cases} x \neq -1 \\ x \neq 0 \end{cases}$$

A cause des deux dénominateurs.

D'où : $D_f = \mathbb{R}\_\{-1\ ;0\}$

f est dérivable sur son ensemble de définition comme produit de fonctions dérivables sur cet ensemble.

Dans l'ensemble : $]-\infty,-1[\,\cup\,]-1,0[$, $f(x)=\frac{1}{x+1}\frac{x-1}{-x}$

Et la dérivée de f sur cet ensemble est alors :

$$\boxed{f'(x)=\frac{x^2-2x-1}{x^2(x+1)^2}}$$

Dans l'ensemble $]0,+\infty[$, $f(x)=\frac{1}{x+1}\frac{x-1}{x}$

Et la dérivée de f sur intervalle est alors :

$$\boxed{f'(x)=\frac{-x^2+2x+1}{x^2(x+1)^2}}$$

i) On peut écrire que :

$$f(x)=x(\vec{u}.\vec{v})=x\left(x^2\frac{1}{x}+\frac{1}{x}\sqrt{x}\right)$$

f est donc définie sur $]0,+\infty[$ à cause du dénominateur et de la racine carrée et :

Pour tout $x\in\,]0,+\infty[$,

$$f(x)=x^2+\sqrt{x}$$

f est bien dérivable sur son domaine de définition et :

Pour tout $x\in\,]0,+\infty[$,

$$\boxed{f'(x)=2x+\frac{1}{2\sqrt{x}}}$$

j) f est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$.

Si $x\in\,]0,1[$, sa dérivée a pour expression :

$$\boxed{f'(x)=-\frac{1}{x^2}}$$

Si $x\in\,]-\infty,0]\cup[1,+\infty[$, sa dérivée a pour expression :

$$\boxed{f'(x)=2x}$$

2) φ est définie sur $]-1;0[\cup]0;+\infty[$, φ est dérivable sur cet ensemble comme composée de fonctions dérivables sur cet ensemble et :

Pour tout $x \in]-1;0[\cup]0;+\infty[$,

$$\boxed{\varphi'(x) = \frac{-x-2}{2x^2\sqrt{x+1}}}$$

φ' est également dérivable comme composée et quotient de fonctions dérivables sur $]-1;0[\cup]0;+\infty[$, et :

Pour tout $x \in]-1;0[\cup]0;+\infty[$,

$$\boxed{\varphi''(x) = \frac{3x^2+12x+8}{4x^3\sqrt{(x+1)^3}}}$$

On étudie le signe de $\varphi''(x)$:

$$\varphi''(x) = \frac{\left(x+2+\frac{2}{\sqrt{3}}\right)\left(x+2-\frac{2}{\sqrt{3}}\right)}{4x^3\sqrt{(x+1)^3}}$$

Sur $]0;+\infty[$, $\varphi''(x) > 0$ car tous les facteurs sont strictement positifs.

Sur $]-1;0[$ on a deux cas :

Si $x \in \left]-1;\ -2+\frac{2}{\sqrt{3}}\right[$ $\varphi''(x) > 0$ car on a deux facteurs négatifs :

D'une part : x^3 et d'autre part $\left(x+2-\frac{2}{\sqrt{3}}\right)$. Les autres étant positifs le tout est donc bien positif.

En effet $0 < 2-\frac{2}{\sqrt{3}} < 1.\ 2-\frac{2}{\sqrt{3}}$

Si $x \in \left]-2+\frac{2}{\sqrt{3}};0\right[$ alors seul x^3 est négatif et donc $\varphi''(x) < 0$.

Donc φ' est croissante sur $]0;+\infty[$ et sur $\left]-1;\ -2+\frac{2}{\sqrt{3}}\right[$.

Donc φ est convexe sur $]0;+\infty[$ et sur $\left]-1;\ -2+\frac{2}{\sqrt{3}}\right[$.