Cours de mathématique pour 1ère anné Bac

Erraji Elmahdi

July 17, 2016

Contents

Chapter 1

Introduction à la logique

1.1 Logique

1.1.1 Assertion

Définition Une assertion est une phrase soit vraie, soit fausse, pas les deux en mme temps.
Une assertion est noté par un des symbole latin $p, q, r, ...$

Example Les phrase suivante sont des assertions:

- p: Il pleut.
- q: Je suis plus grand que toi.
- r: $2 + 2 = 4$
- k: Pour tout $x \in \mathbb{R}$ on a $x^2 \geq 0$.

La phrase suivant n'est pas une assertion:
p(x,y): x et y sont des elements de $\mathbb{R}$ tel que: $x \leq y$

1.1.2 Opérateurs

Définition soit p et q deux assertions :

1. L'assertion "p et q" est vraie lorsque p est vraie et q est vraie.
2. L'assertion "p ou q" est vraie si au moins l'une des deux est vraie.
3. L'assertion "$\neg p$" est vraie lorsque p est fausse (L'opérateur de négation)
4. L'assertion "$p \Rightarrow q$" est vraie si au moin $\neg p$ est vraie ou bien q est vraie (L'implication)
5. L'assertion "$p \Leftrightarrow q$" est vraie si les deux sont vraie ou bien les deux sont fausses. (L'équivalence)

Tableau de vérité:

p	q	p et q	p ou q	$p \Rightarrow q$	$\neg p$
1	1	1	1	1	0
1	0	0	1	0	0
0	1	0	1	1	1
0	0	0	0	1	1

Proposition 1.1.1 *soit p, q, r trois assertions alors on a:*

1. $p \Leftrightarrow \neg(\neg p)$
2. p *et* $q \Leftrightarrow q$ *et* p
3. p *ou* $q \Leftrightarrow q$ *ou* p
4. $\neg(p$ *ou* $q) \Leftrightarrow \neg q$ *et* $\neg p$
5. $\neg(p$ *et* $q) \Leftrightarrow \neg q$ *ou* $\neg p$
6. $(p$ *et* $(q$ *ou* $r)) \Leftrightarrow (p$ *et* $q)$ *ou* $(p$ *et* $r)$
7. $(p$ *ou* $(q$ *et* $r)) \Leftrightarrow (p$ *ou* $q)$ *et* $(p$ *ou* $r)$
8. $(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow (\neg q \Rightarrow \neg p)$

Preuve Exercice: utilisez le tableaux de vérité.

1.2 Assertion a paramétre et quantificateur

1.2.1 Assertion a paramétre

Définition une assertion a paramétre est une phrase mathématique qui dépends d'un paramétre appartenant à un ensemble arbitraire. Elle devient une assertion lorsqu'on fixe le paramétre.

Example $p(x) =$ "$x \geq 1$" $x \in \mathbb{R}$ est une assertion à paramétre.
$p(5)$ est une assertion vraie.

1.2.2 Quantificateur

Définition soit $p(x)$ $x \in E$ une assertion à paramétre.

- L'expression $\forall x \in E$ $p(x)$, est vraie lorsque $p(x)$ est vraie pour toute x dans E. $\forall$ est le quantificateur universel.
- L'expression $\exists x \in E$ $p(x)$, est vraie lorsqu'il existe x dans E tel que $p(x)$ est vraie. $\exists$ est le quantificateur existentielle.

- L'expression $\exists! x \in E\ p(x)$, est vraie lorsqu'il existe un unique élément x de E tel que $p(x)$ est vraie.

Example
- "$\forall x \in [0.1]\ (x^2 \geq 1)$" est une assertion vraie.
- "$\exists x \in]-\infty, 0[\ (x \geq 0)$" est une assertion fausse.

La négation des quantificateur

- La négation de "$\forall x \in E\ p(x)$" est "$\exists x \in E\ \neg p(x)$".
- La négation de "$\exists x \in E\ p(x)$" est "$\forall x \in E\ \neg p(x)$".

1.3 Raisonnement

1.3.1 Raisonnement direct

C'est l'argument la plus classique est le plus utiliser comme argument pour montrer les assertions on se basant sur des hypothèses. Si ona des donnée (hypothèses) sous forme d'assertion p et on veut montrer la vérité d'une autre assertion q, on justifie la vérité de l'assertion $p \Rightarrow q$ puis on conclue la vérité de q on se basant sur p.
si p est vrai et $p \Rightarrow q$ est vraie alors q est vraie.

Example soit $a, b \in \mathbb{Q}$ montrer que $a + b \in \mathbb{Q}$??

$$\begin{aligned}
a \in \mathbb{Q} \text{ et } b \in \mathbb{Q} \quad &\Rightarrow \quad a = \frac{p}{q} \text{ et } b = \frac{p'}{q'} \text{ avec } p, p' \in \mathbb{Z} \text{ et } q, q' \in \mathbb{N} \\
&\Rightarrow \quad a + b = \frac{pq' + qp'}{qq'} \text{ avec } p, p' \in \mathbb{Z} \text{ et } q, q' \in \mathbb{N} \\
&\Rightarrow \quad a + b \in \mathbb{Q}
\end{aligned}$$

1.3.2 Raisonnement par contraposé

Parfois les raisonnement direct parait inefficace pour ateindre notre objectif. Dans ce cas on considère la nègation du résultat comme hypothèse et la nègation de l'hypothèse est le résultat espéré, puisqu'on a:

$$(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow (\neg q \Rightarrow \neg p)$$

Example Soit $n \in \mathbb{N}$ montrons que n^2 est pair alors n est pair:

Preuve nous supposons que n est impaire est montrons que n^2 est impaire.
on a:

$$\begin{aligned}
n \text{ impaire} \quad &\Rightarrow \quad n = 2k + 1 \text{ avec } k \in \mathbb{N} \\
&\Rightarrow \quad n^2 = 4k^2 + 4k + 1 \text{ avec } k \in \mathbb{N} \\
&\Rightarrow \quad n^2 = 2(2k^2 + 2k) + 1 \text{ avec } k \in \mathbb{N} \\
&\Rightarrow \quad n^2 \text{ impair}
\end{aligned}$$

d'où n^2 pair $\Rightarrow n$ pair

1.3.3 Absurde

Le raisonnement par l'absurde pour montrer que $p \Rightarrow q$ consiste à admettre que $\neg q$ et p et vrai afin de trouver une contradiction.

Example Soit $a, b \geq 0$ montrons que $\dfrac{a}{1+b} = \dfrac{b}{1+a} \Rightarrow a = b$.

Preuve Supposons que $\dfrac{a}{1+b} = \dfrac{b}{1+a}$ et $a \neq b$.
alors on a : $a(1+a) = b(1+b) \Rightarrow a^2 - b^2 = -(a-b) \Rightarrow (a-b)(a+b) = -(a-b)$
et puisque $a - b \neq 0$ on peut déviser par $a - b$
ce qui donne : $a + b = -1$. Or a et b sont des nombre positifs ce qui est absurde donc $\dfrac{a}{1+b} = \dfrac{b}{1+a} \Rightarrow a = b$ est vrai.

1.3.4 Raisonnement par contre exemple

Si on veut montrer que l'assertion "$\forall x \in E\ p(x)$" est vrai il suffit de montrer que $p(x)$ est vrai pour tout x dans E. Ce qui est pas le cas si on veut montrer que "$\forall x \in E\ p(x)$" est fausse il suffit de trouver un seul élément x de E tel que $p(x)$ est fausse. Le x en question et appeler le contre exemple.

1.3.5 Réccurence

Le principe de Réccurence permet de montrer qu'une assertion $p(n)$, dépendante d'un entier naturel n est vraie pour tout n. La démonstration se fait en deux étape:

1. **Etape 1 (Initialisation) :** Montrer que $p(0)$ est vrai.
2. **Etape 2 (Induction) :** Monter que $p(n) \Rightarrow p(n+1) \forall n \in \mathbb{N}$ est vrai

Chapter 2

Ensembles et applications

2.1 Ensembles:

2.1.1 Définisions

Définition un ensemble est une collection d'ełément. On note les ensembles par des lettre majuscule.

Example voici des exemple sur les ensembles:

- $A = \{0, 1, 2\}$
- $B = \{\text{pain}, \text{lait}, \text{fromage}\}$
- $C = \{a, b, c\}$
- un ensemble particulier qui ne contient aucun élément est l'ensemble vide : $\emptyset = \{\}$

Une autre facon pour définir un ensemble c'est de décrire ces élément par une proprieté :

$$A = \{x \in E \ / \ p(x) \text{ est vraie } \}$$

$$[0, 1] = \{x \in \mathbb{R} \ / \ 0 \leq x \leq 1\}$$

On dit que x appartiens à E si x figure parmi les élément de E. On écrit $x \in E$.
$x \notin E$ c'est la négation de $x \in E$.

2.1.2 Opérations sur les ensemble

Définition Soit E, F et G trois ensemble:

- On dit que $E \subset F$ si tout élément de E est élément de F.
$$(E \subset F) \Leftrightarrow (\forall x \; x \in E \Rightarrow x \in F)$$
- l'égalité $E = F$ si $E \subset F$ et $F \subset E$.
- $P(E)$ l'ensemble des parties de E. C'est la collection de tous les sous ensemble de E.
- Complémentaire: si $A \subset E$, le complémentaire de E est définit comme suit:
$$A^c = \{x \notin A \; / x \in E\}$$
- union: soit $A, B \in E$.
$$A \cup B = \{x \in E \; / \; x \in A \text{ ou } x \in B\}$$
- intersection: soit $A, B \in E$.
$$A \cap B = \{x \in E \; / \; x \in A \text{ et } x \in B\}$$

2.1.3 Régles de calcules

soit A, B et C trois sous-ensemble de E.

1. $A \cap B = B \cap A$
2. $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$
3. $A \cap \emptyset = \emptyset$ et $A \cap E = A$
4. $A \cup B = B \cup A$
5. $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$
6. $A \cup \emptyset = A$ et $A \cup E = E$
7. $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$
8. $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$
9. $A \subset B \Leftrightarrow B^c \subset A^c$
10. $(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$
11. $(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$

Essayer d'amuser a prouver les propriétés précédente c'est un bon exercice de logique.

2.1.4 Produit cartésien

Définition E et F deux ensembles. le produit cartésien de E par F est l'ensemble des couples (x, y) où $(x \in E$ et $y \in F)$.

$$E \times F = \{(x, y) \;/\; x \in E \text{ et } y \in E\}$$

Example :

1. $\mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R} = \{(x, y) \;/\; x \in \mathbb{R} \text{ et } y \in \mathbb{R}\}$
2. $[0, 1] \times \mathbb{R} = \{(x, y) \;/\; x \in [0, 1] \text{ et } y \in \mathbb{R}\}$

2.2 Applications

2.2.1 Définitions

Définition soit E et F deux ensembles. Une application $f : E \longrightarrow F$, c'est la donnée pour chaque éleément $x \in E$ un unique élément $f(x)$ de F.

Définition :

- Soit $f, g : E \longrightarrow F$ deux application alors:
$$f = g \Leftrightarrow \forall x \in E; f(x) = g(x)$$
- Soit $f : E \longrightarrow F$ et $g : F \longrightarrow E$ deux applications. Le composé de f et g est l'application:
$$g \circ f(x) = f(g(x))$$
.

Example L'identité c'est l'application $id_E : E \longrightarrow E$ qui envoie x de E vers lui même. $(id_E(x) = x)$

2.2.2 Image direct et Image réciproque:

Soit E et F deux ensembles:

Définition Soit $A \subset E$ et $f : E \longrightarrow F$. L'image direct de A par f est l'ensemble :

$$f(A) = \{f(x) \in F \;/\; \in E\}$$

.
Soit $B \subset F$. L'image réciproque de B par f est l'ensemble:

$$f^{-1}(B) = \{x \in E \;/\; f(x) \in B\}$$

Antécédents : Soit $y \in F$ les élément x de E tel que $y = f(x)$ sont appelés les antécédent de y par f.

2.2.3 Injection, Surjection et Bijection

Définition soit E, F deux ensembles $f : E \longrightarrow F$ une application.

- f est surjective si :
$$\forall x, y \in E(x \neq y \Rightarrow f(x) \neq f(y)$$
- f est injective si :
$$\forall y \in F \exists x \in E \ / \ f(x) = y$$
- f est bijectif si :
$$\forall y \in F \exists ! x \in E \ / \ f(x) = y$$

Proposition 2.2.1 *f est bijective si et seulement s'elle est injective et surjective.*

Preuve Exercice.

Proposition 2.2.2 *Soit E et F des ensembles et $f : E \longrightarrow F$.*

1. *L'application f est bijectif si et seulement s'il existe une application $g : F \longrightarrow E$ tel que $g \circ f = id_E$.*
2. *Si f est bijectif alors l'application g est unique et bijective. g est appelé l'application réciproque de f, noté f^{-1} de plus $(f^{-1})^{-1} = f$.*

Preuve (Execice**)

Proposition 2.2.3 *soit $f : E \longrightarrow F$ et $g : F \longrightarrow G$ deux application bijectives alors $g \circ f$ est bijective et :*
$$(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$$

Preuve Exercice*