Correction fiche d'exercices

I – Calcul algébrique

- Exercice 1

$$A = (a+b+c)(a-b-c) = a^2 - ab - ac + ab - b^2 - bc + ac - bc - c^2$$

Donc $\boxed{A = a^2 - b^2 - c^2 - 2bc}$

$$B = (a+c)b - c(b-a) = ab + cb - cb + ac = ab + bc + ac$$

Donc $\boxed{B = ab + bc + ac}$

$$C = (a^2+b^2+c^2) - (a+b+c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 - (a+b)^2 - c^2 - 2c(a+b)$$

$$C = a^2 + b^2 + c^2 - a^2 - b^2 - 2ab - c^2 - 2ac - 2cb$$

Donc $\boxed{C = -2(ab + ac + bc) = -2B}$

$$D = (ac+bc+ab) - (a+b)^2 - (b+c)^2 = ac + bc + ab - a^2 - b^2 - 2ab - b^2 - c^2 - 2bc$$

Donc $\boxed{D = -a^2 - 2b^2 - c^2 - ab - bc + ac}$

$$E = (a-b)^3 - (a+b)^3 = (a-b)(a-b)^2 - (a+b)(a+b)^2$$

$$E = (a-b)(a^2+b^2-2ab) - (a+b)(a^2+b^2+2ab)$$

$$E = (a^3 + ab^2 - 2a^2b - ba^2 + b^3 + 2ab^2) - (a^3 + ab^2 + 2a^2b + a^2b + b^3 + 2ab^2)$$

$$E = a^3 + b^3 + 3ab^2 - 3a^2b - a^3 - 3ab^2 - 3a^2b - b^2$$

Donc $\boxed{E = -6ab^2}$

$$\begin{aligned} F &= (ab+c)^2 + abc - (a+b+c)^2 \\ &= a^2b^2 + c^2 + 2abc + abc - (a^2 + b^2 + c^2 + 2ac + 2ab + 2cb) \end{aligned}$$

$$F = a^2b^2 + c^2 + 3abc - a^2 - b^2 - c^2 - 2(ac + ab + bc)$$

Donc $\boxed{F = a^2b^2 + 3abc - 2(ac + ab + bc)}$

$$G = a(b+c) + b(a+c) + c(a+b) = ab + ac + ab + bc + ac + cb$$

Donc $\boxed{G = 2(ab + ac + bc) = 2B = -C}$

$$H = a^2(b-c) + b^2(c-a) + c^2(a-b) = a^2b - a^2c + b^2c - b^2a + c^2a - c^2b$$

Donc $\boxed{H = a^2b + b^2c + c^2a - a^2c - b^2a - c^2b}$

$$I = abc - (ab+c)(ac+b) = abc - (a^2bc + a^2b + ac^2 + bc)$$

Donc $\boxed{I = abc(1-a) - a(ab - c^2) - bc}$

$$J = (ab + cb)^2 - a^2 b = a^2 b^2 + c^2 b^2 + 2acb^2 - a^2 b$$

Donc $\boxed{J = a^2 b(b - 1) + b^2 (c^2 + 2ac)}$

$$K = (a + b)(b + c)(a + c) = (ab + ac + b^2 + bc)(a + c)$$

$$K = a^2 b + abc + a^2 c + ac^2 + ab^2 + cb^2 + abc + bc^2$$

Donc $\boxed{K = 2abc + a^2 (b + c) + b^2 (a + c) + c^2 (b + a)}$

$$L = (a + b + c)(a + b)(b - c) = (a + b + c)(ab - ac + b^2 - bc)$$

$$L = a^2 b - a^2 c + ab^2 - abc + ab^2 - abc + b^3 - b^2 c + abc - ac^2 + b^2 c - bc^2$$

Donc $\boxed{L = abc + a^2 (b - c) + 2b^2 (a - c) - c^2 (a + b)}$

$$M = (a^2 b + b^2 c)(b^2 c + c^2 a) = a^2 b^2 c + a^3 c^2 b + b^4 c^2 + c^3 b^2 a$$

Donc $\boxed{M = abc(ab + a^2 c + c^2 b) + b^4 c^2}$

$$N = (a + b^2 + c)(a^2 + b + c^2) = a^3 + ab + ac^2 + a^2 b^2 + b^3 + b^2 c^2 + a^2 c + bc + c^3$$

Donc $\boxed{N = a^3 + b^3 + c^3 + b^2 (a^2 + c^2) + b(a + c) + ac(a + c)}$

$$O = (a - bc)(bc - a) = abc - a^2 - b^2 c^2 + abc$$

Donc $\boxed{O = 2abc - a^2 - b^2 c^2}$

$$P = 2(a^2 + b^2 + c^2) - (a + b)^2 - (b + c)^2 - (a + c)^2$$

$$P = 2a^2 + 2b^2 + 2c^2 - a^2 - 2ab - b^2 - b^2 - 2bc - c^2 - a^2 - 2ac - c^2$$

Donc $\boxed{P = -2(ab + bc + ac) = C}$

$$Q = a^3 + b^3 - (a + b)^3 = a^3 + b^3 - (a + b)(a + b)^2$$

$$Q = a^3 + b^3 - (a + b)(a^2 + b^2 + 2ab)$$

$$Q = a^3 + b^3 - a^3 - ab^2 - 2a^2 b - a^2 b - b^3 - 2ab^2$$

Donc $\boxed{Q = -3(ab^2 + ba^2)}$

$$\boxed{R = (ac + bc)abc = a^2 bc^2 + ab^2 c^2}$$

$$S = (a - b)(a + c)(b - c)(b + c) = (a^2 + ac - ab - bc)(b^2 + bc - bc - c^2)$$

$$S = a^2 b^2 - a^2 c^2 + ab^2 c + ac^3 - ab^3 + abc^2 - b^3 c + bc^3$$

Donc $\boxed{S = a^2 (b^2 - c^2) + a(c^3 - b^3) + abc(b + c) + bc(c^2 - b^2)}$

$$T = (abc + a)(abc + b)(abc + c) = (a^2 b^2 c^2 + ab^2 c + a^2 bc + ab)(abc + c)$$

$$T = a^3b^3c^3 + a^2b^2c^3 + a^2b^3c^2 + ab^2c^2 + a^3b^2c^2 + a^2bc^2 + a^2b^2c + abc$$

Donc $\boxed{T = a^3b^3c^3 + a^2b^2c^2(c + b + a) + abc(bc + ac + ab + 1)}$

$$U = (a^2 - b^2)(b^2 - c^2) = a^2b^2 - a^2c^2 - b^4 + b^2c^2$$

Donc $\boxed{U = a^2(b^2 - c^2) + b^2(c^2 - b^2)}$

$$\boxed{V = (ab + cb + a^2)ab = a^2b^2 + ab^2c + a^3b}$$

$$W = (abc + ab + bc + ac)^2 = (abc + ab)^2 + (bc + ac)^2 + 2(abc + ab)(bc + ac)$$

$$W = a^2b^2c^2 + a^2b^2 + 2a^2b^2c + b^2c^2 + a^2c^2 + 2abc^2 + 2(ab^2c^2 + a^2bc^2 + ab^2c + a^2bc)$$

$$\boxed{W = a^2b^2c^2 + (a^2b^2 + b^2c^2 + a^2c^2) + 2(a^2b^2c + ab^2c^2 + a^2bc^2) + 2(abc^2 + ab^2c + a^2bc)}$$

$$X = (abc - ab - ac - bc)^2 = (abc - ab)^2 + (-ac - bc)^2 + 2(abc - ab)(-ac - bc)$$

$$X = a^2b^2c^2 + a^2b^2 - 2a^2b^2c + a^2c^2 + b^2c^2 + 2abc^2 + 2(-a^2bc^2 - ab^2c^2 + a^2bc + abc^2)$$

Donc $\boxed{X = a^2b^2c^2 + (a^2b^2 + a^2c^2 + b^2c^2) - 2abc(ab + ac + bc - a)}$

- <u>Exercice 2</u>

➢ <u>Identité de Sophie Germain :</u>

On part du membre le plus factorisé :

Quelque soit le nombre réel x et quelque soit le nombre réel y, on a :

$$((x + y)^2 + y^2)((x - y)^2 + y^2) = (x^2 + y^2 + 2xy + y^2)(x^2 + y^2 - 2xy + y^2)$$

Donc :

$$\begin{aligned}&((x + y)^2 + y^2)((x - y)^2 + y^2)\\ &\qquad = x^4 + 2x^2y^2 - 2x^3y + 2x^2y^2 + 4y^4 - 4xy^3 + 2x^3y + 4xy^3 - 4x^2y^2\end{aligned}$$

Donc on a :

$$\boxed{((x + y)^2 + y^2)((x - y)^2 + y^2) = x^4 + 4y^4}$$

Ce qui prouve l'identité de Sophie germain quelque soient les réels x et y.

➢ <u>Identité d'Argand :</u>

On part également du membre le plus factorisé :

Quelque soit le nombres réel x, on écrit aussi :

$$\forall x \in \mathbb{R}, (x^2+x+1)(x^2-x+1) = x^4 - x^3 + x^2 + x^3 - x^2 + x + x^2 - x + 1$$

Donc, $\boxed{\forall x \in \mathbb{R}, (x^2+x+1)(x^2-x+1) = x^4 + x^2 + 1}$

Ce qui prouve l'identité d'Argand quelque soit le nombre réel $\boldsymbol{x}$

- Identité de Gauss :

On part du membre le plus factorisé :

Quelque soient les nombres réels a, b, c (on dit aussi « quelque soit le triplet de nombre réels (a, b, c) ») et on note usuellement :

$$\forall (a,b,c) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} = \forall (a,b,c) \in \mathbb{R}^3$$

Le « produit » des $\mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ est un produit d'ensemble (c'est le **produit cartésien** de ces ensembles), il veut dire que a est un réel (le premier $\mathbb{R}$), que b est aussi un réel (le deuxième $\mathbb{R}$) et que c est aussi un réel (le dernier $\mathbb{R}$).

Par exemple la notation : $\forall (n,x) \in \mathbb{N} \times \mathbb{R}$ signifie « quelque soient les nombres n et x tel que n soit un élément de $\mathbb{N}$ (c'est-à-dire c'est un entier naturel) et x un élément de $\mathbb{R}$ (c'est-à-dire c'est un nombre réel).

Donc :

$$\forall (a,b,c) \in \mathbb{R}^3, \frac{1}{2}(a+b+c)[(a-b)^2 + (b-c)^2 + (a-c)^2]$$
$$= \frac{1}{2}(a+b+c)(a^2 + b^2 - 2ab + b^2 + c^2 - 2bc + a^2 + c^2 - 2ac)$$

$$\frac{1}{2}(a+b+c)[(a-b)^2 + (b-c)^2 + (a-c)^2]$$
$$= \frac{1}{2}(a+b+c)(2a^2 + 2b^2 + 2c^2 - 2ab - 2bc - 2ac)$$

$$\frac{1}{2}(a+b+c)[(a-b)^2 + (b-c)^2 + (a-c)^2] = (a+b+c)(a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ac)$$

$$\frac{1}{2}(a+b+c)[(a-b)^2 + (b-c)^2 + (a-c)^2]$$
$$= a^3 + ab^2 + ac^2 - a^2b - abc - a^2c + a^2b + b^3 + bc^2 - ab^2 - b^2c - abc$$
$$+ a^2c + b^2c + c^3 - abc - bc^2 - ac^2$$

Donc on a bien, en simplifiant :

$$\boxed{\forall (a,b,c) \in \mathbb{R}^3, \frac{1}{2}(a+b+c)[(a-b)^2 + (b-c)^2 + (a-c)^2] = a^3 + b^3 + c^3 - 3abc}$$

Ce qui prouve l'identité de Gauss

- Identités de Legendre :

On part encore des membres les plus factorisés et on développe :

- $\forall (a,b) \in \mathbb{R}\times\mathbb{R}, (a+b)^2+(a-b)^2 = a^2+b^2+2ab+a^2+b^2-2ab$

Donc : $\boxed{\forall (a,b) \in \mathbb{R}\times\mathbb{R}, (a+b)^2+(a-b)^2 = 2(a^2+b^2)}$

Ce qui prouve la première identité de Legendre

- $\forall (a,b) \in \mathbb{R}\times\mathbb{R}, (a+b)^2-(a-b)^2 = a^2+b^2+2ab-a^2-b^2+2ab$

Donc : $\boxed{\forall (a,b) \in \mathbb{R}\times\mathbb{R}, (a+b)^2-(a-b)^2 = 4ab}$

Ce qui prouve la seconde identité de Legendre

- $\forall (a,b) \in \mathbb{R}\times\mathbb{R},\ (a+b)^4-(a-b)^4 = (a^2+b^2+2ab)^2-(a^2+b^2-2ab)^2$

$$(a+b)^4-(a-b)^4 = (a^2+b^2)^2+4a^2b^2+4ab(a^2+b^2)-(a^2+b^2)^2-4a^2b^2+4ab(a^2+b^2)$$

Donc : $\boxed{\forall (a,b) \in \mathbb{R}\times\mathbb{R},\ (a+b)^4-(a-b)^4 = 8ab(a^2+b^2)}$

Ce qui prouve la troisième identité de Legendre

- Exercice 3 :

Quelque soit les réels a et b, on a :

$$\frac{(a+b^2)-a^2-b^2}{2}-\frac{(a+b)^2-(a-b)^2}{4} = \frac{2(a^2+b^2+2ab-a^2-b^2)-2a^2-2b^2+2ab+2ab}{4} = 0$$

Donc : $\frac{(a+b^2)-a^2-b^2}{2}-\frac{(a+b)^2-(a-b)^2}{4} = 0$

Donc on a bien prouvé que :

Quelque soit a et b des nombres réels on a :

$$\boxed{\frac{(a+b^2)-a^2-b^2}{2} = \frac{(a+b)^2-(a-b)^2}{4}}$$

Ce qui conclut l'exercice

- Exercice 4 :

Quelque soit le nombre réel x :

$$W(x) = x^3+x^2+x+1-(x+1)(x+1)^2-(x+1)^2$$

$$W(x) = x^3+x^2+x+1-(x+1)^2(x+1-1)$$

$$W(x) = x^3 + x^2 + x + 1 - x(x^2 + 2x + 1)$$

Donc : $\boxed{W(x) = -x^2 + 1}$

Ce qui conclut l'exercice

- Exercice 5 :

$$\boxed{P_1(x) = \alpha x^2 + (2\alpha + x)^2 - 1 = x^2(\alpha + 1) + 4\alpha x + 4\alpha^2 - 1}$$

$$\boxed{P_2(x) = \alpha x - 2x^2 + x^2 + \alpha x + \frac{\alpha^2}{4} + x^2 + \alpha = 2\alpha x + \left(\frac{\alpha^2}{4} + \alpha\right)}$$

$$\boxed{P_3(x) = 2(x^2 - \alpha^2) = 2x^2 - 2\alpha^2}$$

$$\boxed{P_4(x) = 2\left(x^2 - \frac{x\alpha}{2} - \alpha x + \frac{\alpha^2}{2}\right) = 2x^2 - 3x\alpha + \alpha^2}$$