(limites-continuité 4è.M)

Exercice 1 :

Répondre par vrai ou faux en justifiant.

1.f est une fonction .Si la fonction $|f|$ est continue en un réel a alors f est continue en a.

2. Toute fonction polynôme de degré impaire s'annule au moins une fois dans IR.

3. $\lim\limits_{x\to 0} xE\left(\frac{1}{x}\right)=0$

4. La fonction f définie sur IR par $f(x)=E(x)+\left[x-E(x)\right]^2$ *est discontinue en tout entier relatif k.*

5.On donne ,ci-dessous le tableau de variation d'une fonction f définie et continue sur $IR\setminus\{1\}$.

x	$-\infty$		0			1		$+\infty$
f	$+\infty$	↘	0	↗	$+\infty$	‖	$+\infty$ ↘	-1

a.L'équation $f(x)=0$ *admet dans* $IR\setminus\{1\}$ *exactement deux solutions.*

b. $f\left(\left]-\infty,1\right[\right)=\left]0,+\infty\right[$.

c.Pour tout réel x différent de 1,on a : $f(x)\geq x$.

d.Pour tout x<1 on a : $f(x)>x-1$.

e. La courbe de f admet exactement deux asymptotes.

Exercice 2 :

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ *par* $f(x)=\begin{cases} x^3+x+1 & si\ \ x\leq 0 \\ \sqrt{1+4x^2}-x & si\ \ x>0 \end{cases}$.

(C) désigne la courbe de f dans le plan muni d'un repère orthonormé $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$.

1.Calculer $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ *et* $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}$*.Interpréter ces résultats graphiquement.*

2.Montrer que (C) admet en $+\infty$ *une asymptote oblique* Δ *dont on donnera une équation.*

3.Etudier la continuité de f en 0 puis sur $\mathbb{R}$.

4.a.Montrer que l'équation f (x) = 0 admet dans $\left]-1,0\right[$ *une solution unique* α .

b.Montrer que $-\frac{1}{\alpha}=1+\alpha^2$.

c.Vérifier que pour tout réel x de $\left]-\infty,0\right]$ *on a :* $f(x)=(x-\alpha)\left(x^2+\alpha x-\frac{1}{\alpha}\right)$.

d.En déduire que la fonction g: $x\mapsto\frac{1+x+x^3}{x-\alpha}$ *est prolongeable par continuité en* α .

Exercice 3 :

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ *par* $f(x)=\begin{cases} \dfrac{1+\cos(\pi x)}{(x-1)^2} & si\ \ x<1 \\ \dfrac{-x^3+x+\pi^2}{2} & si\ \ x\geq 1 \end{cases}$

(C) est la courbe de f dans un repère orthonormé $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$.

1.Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ *et* $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x}$*.Interpréter graphiquement ces résultats.*

2.On considère les fonctions u et v définies sur IR^* *par* $u(x)=\dfrac{1-\cos(x)}{x^2}$, $v(x)=\pi(x-1)$.

a.Vérifier que pour tout x <1 on a : $f(x)=\pi^2\left(u\circ v(x)\right)$.

b.Calculer $\lim\limits_{x\to1}\left(u\circ v(x)\right)$ *et en déduire* $\lim\limits_{x\to1^-} f(x)$.

c.Montrer que f est continue en 1.

3.Calculer $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ *.Interpréter graphiquement le résultat obtenu.*

4.a.Montrer que l'équation $f(x)=0$ *admet dans l'intervalle* $]2,3[$ *une solution unique* α .

b.Donner un encadrement de α *à 0.5 près.*

c.Vérifier que $\alpha^2-\dfrac{\pi^2}{\alpha}=1$.

5.Etudier chacune des limites suivantes : $\lim\limits_{x\to-\infty} f\left(\dfrac{\alpha x+1}{x-1}\right)$ *et* $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[\alpha^2-\dfrac{2}{\alpha}f\left(x\sin\left(\dfrac{1}{x}\right)\right)\right]$.

Exercice 4 :

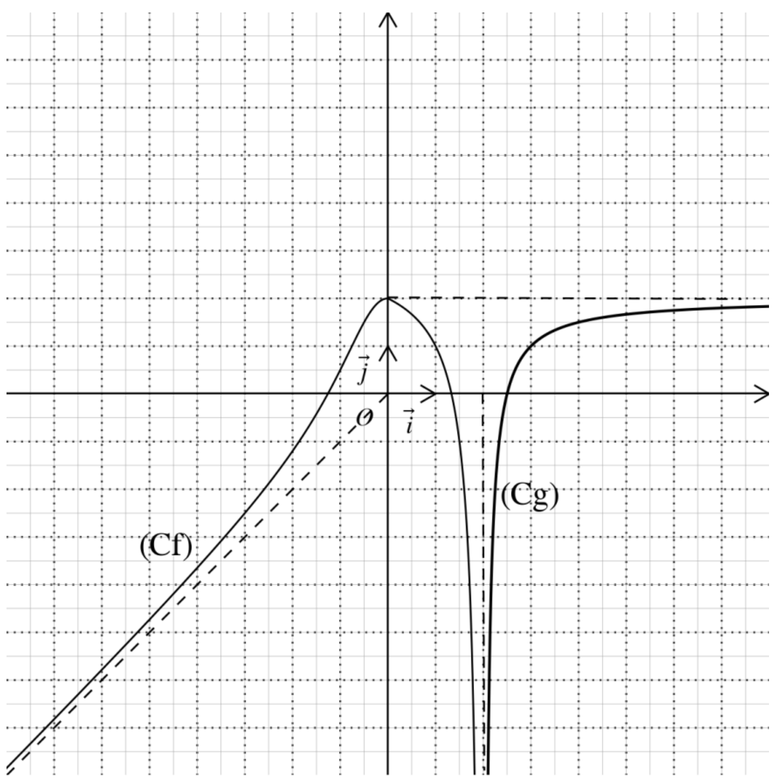
Dans la figure ci-contre,on a tracé les courbes (C_f) *et* (C_g) *de deux fonctions f et g dans un repère orthonormé* $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$.

Chacune des deux courbes admet deux asymptotes.

1.Par lecture graphique :

a.Donner les ensembles de définitions respectifs de chacune des fonctions f et g.

b.Donner ,par leurs équations,les asymptotes à (C_f) *et* (C_g).



c.Donner $\lim_{x\to-\infty} f(x)$, $\lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x}$, $\lim_{x\to2^+} g(x)$ et $\lim_{x\to+\infty} g(x)$.

d.Déterminer $g(]2,+\infty[)$ et $f(]-\infty,1[)$.

e.Calculer $\lim_{x\to0} f\circ f(x)$ et $\lim_{x\to+\infty} f\circ g(x)$.

2.a.Déterminer $f\circ g(]2,3[)$.

b.En déduire que l'équation $f\circ g(x)=1$ admet dans $]2,3[$ au moins une solution.

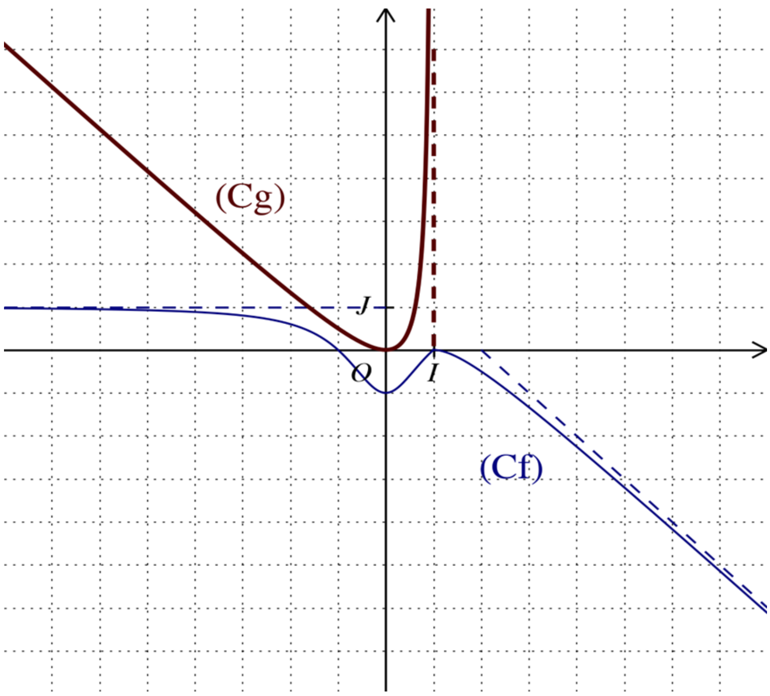
Exercice 5 :

Dans la figure ci-contre ,on a tracé les courbes de deux fonctions f et g dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$

.Les droites $y=1$ et $y=-x+2$ sont des asymptotes à (Cf).

.La droite $x=1$ est une asymptote à (Cg).

Dans cet exercice, exploiter le graphique et répondre aux questions.



1.Donner $\lim_{x\to-\infty} f(x)$, $\lim_{x\to+\infty} f(x)$, $\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x}$ et $\lim_{x\to+\infty} [f(x)+x]$.

2.Dresser le tableau de variation de f.

3.Donner $g([0,1[)$, $f([-1,1])$ et $f(]-\infty,1[)$.

4.Déterminer $\lim_{x\to-\infty} g\circ f(x)$ et $\lim_{x\to1^-} f\circ g(x)$.

5. On connait de plus que la droite $y=-x-1$ est une asymptote à (Cg) au voisinage de $-\infty$.

Vérifier que $\lim_{x\to+\infty} \frac{g(-x)}{x}=1$.En déduire $\lim_{x\to+\infty} \frac{g(-x)}{f(x)}$.

6.a.Montrer que $f\circ g$ est continue sur $[0,1[$ .Déterminer $f\circ g([0,1[)$

b.En déduire que l'équation $f\circ g(x)=-2$ admet dans $[0,1[$ une solution.

* * * * * * * *

est rapporté à un repère orthonormé direct $\left(O,\vec{u},\vec{v}\right)$.

On note A et B les points d'affixes respectives i et –i.

A tout point M d'affixe $z \neq i$*,on associe le point M' d'affixe* $z' = \dfrac{iz-1}{z-i}$.

1.a.Vérifier que $z' = \dfrac{i(z+i)}{z-i}$.

b.Déterminer l'ensemble des points M d'affixes z tels que z' est réel.

c.Déterminer l'ensemble des points M d'affixes z tels que z' est imaginaire pur.

d.Déterminer l'ensemble des points M d'affixes z tels que |z'| = 1.

2.a.Vérifier que pour tout $z \neq i$ *on a :* $|z' - i| = \dfrac{2}{|z-i|}$.

b.En déduire que si M varie sur le cercle de centre A et de rayon $\sqrt{2}$ *,le point M' varie sur le même cercle.*

b.En déduire l'ensemble des points M d'affixe z tels que z' est un réel négatif.

3.a.Vérifier que pour tout nombre complexe z différent de i on a : $z' = i\dfrac{iz-1}{iz+1}$

b.Soit θ *un réel différent de* $\dfrac{\pi}{2} + 2k\pi ; k \in \mathbb{Z}$ *.On pose* $z = e^{i\theta}$ *.Montrer que z' est réel.*

c.En déduire l'ensemble sur lequel varie le point M' lorsque M varie sur le cercle trigonométrique.

Exercice 3 : *(6 points)*

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct $\left(O,\vec{u},\vec{v}\right)$.

Soit z un nombre complexe non nul.

On considère les points A , B , C et D d'affixes respectives $z_A = 4, z_B = z, z_C = \dfrac{8}{z^2}$ *et* $z_D = \dfrac{8}{z}$.

1.Montrer que si z est un nombre réel alors les points A,B,C et D sont alignés.

2.Dans la suite de l'exercice,on suppose que z n'est pas réel.

Montrer que ABCD est un parallélogramme si et seulement si $z^3 - 4z^2 + 8z - 8 = 0$.

3.a.Vérifier que $z^3 - 4z^2 + 8z - 8 = (z-2)(z^2 - 2z + 4)$ *puis résoudre dans* $\mathbb{C}$ *l'équation*

$z^3 - 4z^2 + 8z - 8 = 0$.

b.En déduire les valeurs de z pour lesquelles ABCD est un parallélogramme.

voir verso ⇒

4.a.Vérifier que $\dfrac{z_D}{z_A} = 2\dfrac{z_C}{z_D}$ *et que* $\dfrac{z_A}{z_B} = 4\dfrac{z_C}{z_D}$.

b.En déduire que la demi-droite [OD) est une bissectrice de l'angle orienté $\left(\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OC}\right)$ *et que la demi-droite [OA) est une bissectrice de l'angle orienté* $\left(\overrightarrow{OB},\overrightarrow{OD}\right)$.

c.Montrer que les deux vecteurs $\overrightarrow{OC}$ *et* $\overrightarrow{OD}$ *sont orthogonaux si et seulement si z est imaginaire pur.*

Que peut-on alors dire des points O,B et D dans ce cas ?

Exercice 4 : *(6 points)*

On considère les deux suites réelles (a_n) *et* (b_n) *définies sur IN par* $\begin{cases} a_0 = 1\ ;\ b_0 = 2 \\ a_{n+1} = \dfrac{a_n^2}{a_n + b_n}\ ;\ n \in IN \\ b_{n+1} = \dfrac{b_n^2}{a_n + b_n}\ ;\ n \in IN \end{cases}$

1.a.Montrer que pour tout n de IN on a : $a_n > 0$ *et* $b_n > 0$.

b.Montrer que les deux suites (a_n) *et* (b_n) *sont décroissantes.*

c.En déduire que les deux suites (a_n) *et* (b_n) *sont convergentes.*

d.On note $l = \lim\limits_{n\to+\infty} a_n$ *et* $l' = \lim\limits_{n\to+\infty} b_n$ *.Montrer que* $ll' = 0$.

2.On considère la suite réelle (u_n) *définie sur IN par* $u_n = a_n - b_n$.

a.Montrer que la suite (u_n) *est constante.*

b.En déduire les valeurs de l et l'.

3.Soit la suite (v_n) *définie sur IN par* $v_n = \dfrac{a_n}{b_n}$.

a.Vérifier que $v_{n+1} = v_n^2$.

b.Montrer par récurrence que pour tout n de IN on a $v_n = \left(\dfrac{1}{2}\right)^{\left(2^n\right)}$ *puis calculer* $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n$.

* * * * * * * * * * *

Bon travail