A-I°/ Continuité et limites en un réel :

Théorème 1 :

- Toute fonction polynôme est continue en tout réel de $\mathbb{R}$.
- Toute fonction rationnelle est continue en tout réel de son domaine de définition .
- La fonction ***cos*** et la fonction ***sin*** sont continues en tout réels de $\mathbb{R}$.

Théorème 2:

Soient f et g deux fonctions définies sur un intervalle ouvert I et $a \in I$:

- Si f est continue en a alors α f, $|f|$, et $f^n \left(n \in \mathbb{N}^*\right)$ sont continues en a .
- Si f est continue en a et $f(a) \neq 0$ alors $\frac{1}{f}$ et $\frac{1}{f^n}$ $\left(n \in \mathbb{N}^*\right)$ sont continues en a .
- Si f et g sont continues en a alors $f+g$ et $f*g$ sont continues en a .
- Si f et g sont continues en a et $g(a) \neq 0$ alors $\frac{f}{g}$ sont continues en a .
- Si f est positive sur I et continue en a alors $\sqrt{f}$ est continue en a .

Exercice :

Soit $f : x \to \dfrac{x^2-4x+3}{x^2-9}$ calculer $\lim\limits_{x\to 3} f(x)$

La fonction g définie sur $\mathbb{R} - \{-3\}$ par : $g(x) = \begin{cases} f(x) & si \quad x \in \mathbb{R} - \{3,-3\} \\ \frac{1}{3} & si \quad x = 3 \end{cases}$. ***s'appelle un prolongement par continuité de f en 3.***

Exercice :

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ * par $f(x) = \dfrac{x^2+1-\cos x}{x}$, montrer que f est prolongeable par continuité en 0 et déterminer son prolongement .

Théorème 3 :

Soit f une fonction définie sur un intervalle ouvert I sauf en $a \in I$.

Si f admet une limite finie α quand $x \to a$ alors la fonction g définie sur I par $g(x) = \begin{cases} f(x) & si \quad x \neq a \\ \alpha & si \quad x = a \end{cases}$

Est continue en a et ***s'appelle un prolongement par continuité de f en a.***

Théorème4 :

Une fonction f définie sur un intervalle ouvert I est continue en $a \in I$ ssi $\lim\limits_{x\to a^+} f(x) = \lim\limits_{x\to a^-} f(x) = f(a)$.

Exercice :

Soit $f : x \to \begin{cases} \frac{1-x^2}{\sqrt{1-x}} & si \quad x \prec 1 \\ \frac{x^2-2x+1}{\sqrt{x}-1} & si \quad x \succ 1 \quad et \quad f(1)=0 \end{cases}$. Calculer $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)$,en déduire si f est continue en 1.

II° / Continuité sur un intervalle :

Théorème1 :

- Une fonction est continue sur un intervalle ouvert I si elle est continue en tout réel de I .
- Une fonction est continue sur un intervalle $[a,b]$ si elle est continue sur $]a,b[$,à droite en a et à gauche en b .

De façon analogue , on définit la continuité de f sur les intervalles $[a,b[$, $]a,b]$, $[a,+\infty[$ et $]-\infty,a]$.

Exercice :

Soit f la fonction définie sur $[0,\pi]$ par $\begin{cases} f(x)=\frac{1-\cos x}{x^2} & si \quad x\in]0,\pi], \\ f(0)=\frac{1}{2} \end{cases}$ .Montrer que f est continue sur $[0,\pi]$.

III°/Opérations sur les limites :

Lim f	Lim g	Limf +g		Lim f	Lim g	Lim f *g		Lim f	Lim g	Lim f/g
L	L'	L+L'		L	L'	L*L'		L	L' $\neq 0$	L/L'
L	$+\infty$	$+\infty$		$+\infty$	L' $\prec 0$	$-\infty$		$+\infty$	L' $\prec 0$	$-\infty$
$-\infty$	L'	$-\infty$		$+\infty$	L' $\succ 0$	$+\infty$		$+\infty$	L' $\succ 0$	$+\infty$
$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$		$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$		L	$+\infty$	0
$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$		$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$		L	$-\infty$	0
				$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$		L $\neq 0$	0	Règles des signes

Remarque :

Si on obtient des résultat de la formes $\frac{0}{0}$, $\frac{\infty}{\infty}$, $\infty * 0$ ou $(+\infty)+(-\infty)$ ce sont des formes indéterminées ,on ne peut pas conclure directement .

Exercice :

Activité page 8.

B°/Branches infinies :

Rappel :

La fonction f	Interprétation graphique
$\lim\limits_{x\to a^+} f(x)=+\infty$ ou $\lim\limits_{x\to a^+} f(x)=-\infty$ $\lim\limits_{x\to a^-} f(x)=+\infty$ ou $\lim\limits_{x\to a^-} f(x)=-\infty$	La droite D : $x=a$ est asymptote à ζ_f
$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=L$ ou $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=L$	La droite D : $y=L$ est asymptote à ζ_f
$\lim\limits_{x\to+\infty}\left(f(x)-(ax+b)\right)=0$ ou $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(f(x)-(ax+b)\right)=0$	La droite D : $y=ax+b$ est asymptote à ζ_f

Etude des branches infinies :

Si on a $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=\infty$ alors on calcule $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}$.

*** Si $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=0$ alors ζ_f admet une ***branche infinie parabolique de direction*** (xx').

*** Si $\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = \pm\infty$ alors ζ_f admet une ***branche infinie parabolique de direction*** (yy')

*** Si $\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = a \in \mathbb{R}^*$ alors ***on calcule*** $\lim_{x\to\infty}\left(f(x)-ax\right)$ alors :

* Si $\lim_{x\to\infty}\left(f(x)-ax\right)=b$ la droite D : $y=ax+b$ est asymptote à ζ_f .
* Si $\lim_{x\to\infty}\left(f(x)-ax\right)=\infty$ alors ζ_f admet une ***branche infinie parabolique de direction*** $y=ax$.

Exercice :

1) Soit la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=\sqrt{x^2+x+1}$.

Etudier la nature des branches infinies de ζ_f au voisinage de $+\infty$ et $-\infty$.

2) Soit la fonction définie sur $[-1,+\infty[$ par $f(x)=2x+\sqrt{x+1}$.

a) Etudier les variation de f.
b) Etudier la nature des branches infinies de ζ_f au voisinage de $+\infty$ et tracer ζ_f .

C°/Continuité et limite des fonctions composées :

Définition :

Soit U une fonction définie sur un ensemble I et V une fonction définie sur un ensemble J tel que $U(I)\subset J$.

La fonction $V\circ U$ définie sur I par $V\circ U(x)=V(U(x))$ est appelé fonction composée de U et V .

Exemples :

** La fonction $f : x \to \cos\frac{\pi x^2}{1+x^2}$ est la composer de deux fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par

$U : x \to \frac{\pi x^2}{1+x^2}$ et $V : x \to \cos x$.

** La fonction $f : x \to \frac{\sin^2 x+\sin x}{1+\sin x}$ est la composer de deux fonctions $U : x\to \sin x$ définie sur $\mathbb{R}$

et la fonction $V : x \to \frac{x^2+x}{1+x}$ définie sur $\mathbb{R}\setminus\{-1\}$.

Théorème1 :

Soit U une fonction définie sur un intervalle ouvert I contenant a et V une fonction définie sur J , contenant $U(a)$.

- Si U est continue en a et V est continue en $U(a)$, alors la fonction $V\circ U$ est continue en a .
- Si U est continue sur un ensemble I et V est continue sur $\mathbb{R}$ alors $V\circ U$ est continue sur I .

Exercice :

Etudier la continuité de f sur I :

$f : x\to \sin\sqrt{x^2+x+1}$ $\quad I=\mathbb{R}$. $\quad f : x\to\cos\left(\frac{x^2}{x-3}\right)$ $\quad I=]3,+\infty[$.

D°/Limite d'une fonction composée :

Théorème :

Soit U et V deux fonctions . soient a , b et c des réels ou $+\infty$ ou $-\infty$

Si $\lim_{x\to a}U(x)=b$ et $\lim_{x\to b}V(x)=c$ alors $\lim_{x\to a}V(U(x))=c$.

Exercice :

Calculer les limites suivantes :

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos\left(x^2\right)}{x^2} \quad , \quad \lim_{x\to 1^+}\tan\left(\frac{\pi}{2x}\right) \quad , \quad \lim_{x\to +\infty} x\left(1-\cos\frac{1}{x}\right) .$$

Etudier la continuité de f en a : $f : x \to \begin{cases} \frac{\sin\left(\sqrt{x}-1\right)}{\sqrt{x}-1} & si \quad x\in]0,+\infty[\setminus \{1\} \\ f(1)=1 \end{cases}$ et $a=1$.

E°/ Limites et ordres :

Théorème de comparaison :

Soit a un réel fini ou infini , l et l' deux réels.

* Si $\lim_{x\to a} f(x)=+\infty$ et $f(x)\le g(x)$ alors $\lim_{x\to a} g(x)=+\infty$.

* Si $\lim_{x\to a} f(x)=-\infty$ et $f(x)\ge g(x)$ alors $\lim_{x\to a} g(x)=-\infty$.

* Si $\left|f(x)-l\right|\le g(x)$ et $\lim_{x\to a} g(x)=0$ alors $\lim_{x\to a} f(x)=l$.

* Si $\lim_{x\to a} f(x)=l=\lim_{x\to a} g(x)$ et $f(x)\le h(x)\le g(x)$ alors $\lim_{x\to a} h(x)=l$.

* Si $\lim_{x\to a} g(x)=l'$, $\lim_{x\to a} f(x)=l$ et $f(x)\le g(x)$ alors $l\le l'$.

Exercice :

Montrer que pour tout réel positif x on a : $-\frac{1}{x}\le\frac{-\cos x}{x}\le\frac{1}{x}$ en déduire $\lim_{x\to +\infty}\frac{-\cos x}{x}$.

F°/ Image d'un intervalle par une fonction continue :

Théorème :(rappel)

L'image d'un intervalle par une fonction continue est un intervalle .

Théorème :

L'image d'un intervalle fermé bornée $[a,b]$ par une fonction continue est un intervalle fermé bornée $[m,M]$ où m est le minimum de f sur $[a,b]$ et M est le maximum de f sur $[a,b]$.

Exemple :

Soit $f : x\to x^2$ déterminer $f\left([-1,1]\right)$.

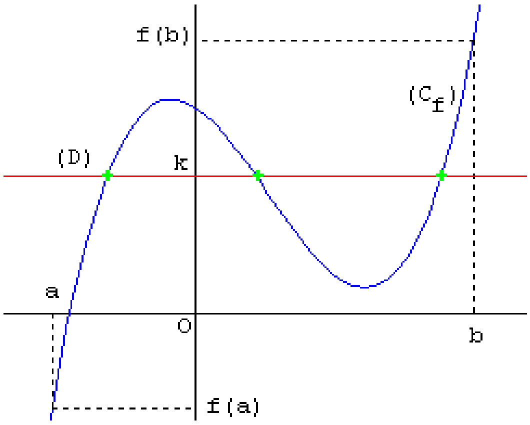
Remarques :

L'intervalle I	f est ***strict croissante*** sur I alors $f(I)=$	f est ***strict décroissante*** sur alors $f(I)=$
$[a,b]$	$\left[f(a), f(b)\right]$	$\left[f(b), f(a)\right]$
$[a,b[$	$\left[f(a), \lim_{x\to b^-} f(x)\right[$	$\left]\lim_{x\to b^-} f(x), f(a)\right]$
$]a,b[$	$\left]\lim_{x\to a^+} f(x), \lim_{x\to b^-} f(x)\right[$	$\left]\lim_{x\to b^-} f(x), \lim_{x\to a^+} f(x)\right[$
$]-\infty,a]$	$\left]\lim_{x\to -\infty} f(x), f(a)\right]$	$\left[f(a), \lim_{x\to -\infty} f(x)\right[$
$]a,+\infty[$	$\left]\lim_{x\to a^+} f(x), \lim_{x\to +\infty} f(x)\right[$	$\left]\lim_{x\to +\infty} f(x), \lim_{x\to a^+} f(x)\right[$
$]-\infty,+\infty[$	$\left]\lim_{x\to -\infty} f(x), \lim_{x\to +\infty} f(x)\right[$	$\left]\lim_{x\to +\infty} f(x), \lim_{x\to -\infty} f(x)\right[$

G°/ Théorème des valeurs intermédiaires :

Théorème :

Si f est une fonction continue sur $[a,b]$ alors pour tout réel k compris entre $f(a)$ et $f(b)$ il existe au moins un réel $c \in]a,b[$ tel que $f(c)=k$ c.à.d l'équation $f(x)=k$ possède ***au moins*** une solution $c \in]a,b[$



En particulier Si f est continue sur $[a,b]$ ***et*** $f(a)\times f(b) \prec 0$ alors ils existe ***au mois*** un réel $c \in]a,b[$ tel que $f(c)=0$ c.à.d l'équation $f(x)=0$ possède au moins une solution .

Remarques :

Si en plus f est ***strictement monotone*** alors cette solution est unique .