Propriétés d'une isométrie

- **Une isométrie du plan est une application de P qui conserve la distance.**
- **Toute isométrie est bijective.**
- **Toute isométrique conserve l'alignement, le parallélisme, l'orthogonalité et le contact.**
- **Toute isométrie qui fixe 2 points distincts A et B fixera tout points M de la droite (AB).**
- **Toute isométrie conserve le barycentre de 2points par conséquent le milieu de 2pts.**
- **L'image d'un carré par une isométrie est un carré.**
- **L'image d'un repère orthonormé par une isométrie est un repère orthonormé.**
- **Toute isométrie est bien définie par 3 points non alignés et leurs images.**
- **Par conséquent** : Deux isométries qui coïncident sur 3 points non alignes soit égales

Inv (f) = $\{M \in P \text{ tq } f(M) = M\}$

f isométrie du plan P alors $Inv(f) = \begin{cases} \boxed{P(plan) \Leftrightarrow f = idp} \\ \boxed{\Delta(dte) \Leftrightarrow f = S_\Delta} \\ \boxed{\{I\} \Leftrightarrow f = R(I,\theta); \theta \neq 2k\pi\ (k \in \mathbb{Z})} \\ \boxed{\varnothing \Leftrightarrow f = t_{\vec{u}}; \vec{u} \neq \vec{o} \text{ ou bien } f \text{ symétrie glissante}}. \end{cases}$

- Déplacement est une isométrie qui **conserve** les meures des angles orientes.
- Antidéplacement est une isométrie qui **transforme** les mesures des angles orientes en leurs opposées.
- f déplacement $\Leftrightarrow$ $\boxed{f = t\vec{u}}$ ou $\boxed{f = R(I,\theta)}$.
- f antidéplacement $\Leftrightarrow f = S_\Delta$ ou f symétrie glissante d'axe D et de vecteur $\vec{u}$.

 (C.a.d $\boxed{f = S_D o t_{\vec{u}} = t_{\vec{u}} o S_D}$ avec $\vec{u}$ vecteur directeur de D $(\vec{u} \neq \vec{0})$)

•Si f **antidéplacement** alors pour tout pt M du plan on a $M * f(M) \in$ l'axe D.

•Si f **antidéplacement** alors $\begin{cases} \boxed{f = S_\Delta} \text{ si } Inv(f) \neq \varnothing \\ \boxed{f = S_D o t_{\vec{u}} = t_{\vec{u}} o S_D} \textit{ symétrie glissante si } Inv(f) = \varnothing \end{cases}$

• La composée de deux déplacement est un déplacement
La composée de deux antidéplacement est un déplacement
La composée d'un déplacement et d'un antidéplacement est un antidéplacement
Tout antidéplacement de P est bien défini par 2 points distincts et leurs images
Par conséquent : deux déplacements qui coïncident sur 2points distincts sont égaux.
Tout déplacement de P est bien défini par 2 points distincts et leurs images .
Par conséquent : deux déplacement qui coïncident sur 2points distincts sont égaux .

Si $\boxed{AC = BD \neq 0}$ Alors il existe **un seul déplacement** $f\begin{cases} A \mapsto B \\ C \mapsto D \end{cases}$ et **un seul antidéplacement** g : $\begin{cases} A \mapsto B \\ C \mapsto D \end{cases}$

Remarque : Si $(AB) \not\parallel (CD)$ alors $\boxed{med[CD] \neq med[AB]}$

$\boxed{S_\Delta o S_{\Delta'} = t_{\vec{u}}}$ • avec $\boxed{\Delta \parallel \Delta' ;\quad \vec{u} \perp \Delta}$ et $t_{\frac{1}{2}\vec{u}}(\Delta') = \Delta$

f antidéplacement $\boxed{f = t_{\vec{u}} o S_\Delta \quad \text{avec } \vec{u} \neq \vec{o}}$

1^er^ cas : $\boxed{dir(\Delta) = \vec{u}}$ ***alors f est une symétrie glissante d'axe Δ et de vecteur $\vec{u}$***

2^éme^ cas : $\boxed{\vec{u} \perp \Delta}$ ***alors*** $f = t_{\vec{u}} o S_\Delta = S_{\Delta'} o S_\Delta o S_\Delta = S_{\Delta'}$ ***avec*** $\Delta /\!/ \Delta'$ ***et*** $t_{\frac{1}{2}\vec{u}}(\Delta) = \Delta'$ ***car*** $\boxed{\vec{u} \perp \Delta}$

3^éme^ cas : $\boxed{\vec{u} \not\perp \Delta \text{ et } dir(\Delta) \neq \vec{u}}$ Soit $\boxed{\vec{u} = \vec{v} + \vec{w} \quad avec\ dir(\Delta) = \vec{v}\ et\ \vec{w} \perp \Delta}$

◈ ABC et A’B’C’ deux triangle isométrique tel que $\begin{cases} AB = A'B' \neq 0 \\ AC = A'C' \neq 0; \\ BC = B'C' \neq 0 \end{cases}$

f isométrie telle que $\begin{cases} A \mapsto A' \\ B \mapsto B' \\ C \mapsto C' \end{cases}$ Ayant M , comment on construit le point M'= $f(M)$.

Indication : $\begin{cases} \boxed{M'A' = MA} \ ; \ \boxed{M'B' = MB} \ \text{et} \ \boxed{M'C' = MC} \\ \underline{\text{alors}} \ \boxed{M' \in \mathcal{C}(A', MA) \cap \mathcal{C}(B', MB) \cap \mathcal{C}(C', MC)} \end{cases}$

◈ $\boxed{S_O o S_{O'} = t_{2\overrightarrow{OO'}}}$ avec $\boxed{O \text{ et } O' \text{ deux points du plan}}$

◈ $R(I,\theta) o R(J,\theta') = \begin{cases} t_{\vec{u}} \text{ si } \theta + \theta' = 2k\pi \\ R(I, \theta + \theta') \text{ si } I = J \text{ et } \theta + \theta' \neq 2k\pi \\ R(W, \theta + \theta') \text{ si } I \neq J \text{ et } \theta + \theta' \neq 2k\pi \end{cases}$ avec $\boxed{k \in \mathbb{Z}}$

◈ $\boxed{R^{-1}(I,\theta) = R(I,-\theta)}$ $\boxed{t^{-1}_{\vec{u}} = t_{-\vec{u}}}$ $\boxed{h^{-1}(I,k) = h(I, \frac{1}{k})}$

◈ $\boxed{S_\Delta o S_{\Delta'} = R(I,\theta) = R(I, 2(\vec{u'}, \vec{u}))}$ avec $\begin{cases} \boxed{\Delta \cap \Delta' = \{I\}} \\ \boxed{(\vec{u'}, \vec{u}) \equiv \frac{\theta}{2} [\pi]} \end{cases}$

◈ $\boxed{S_\Delta o S_\Delta = idp = t_{\vec{0}} = R(I, 2k\pi) = h(I,1)}$ ***avec*** $\boxed{k \in \mathbb{Z} \text{ et } I \text{ un point quelconque du plan}}$

◈ $\boxed{\text{si } \Delta \perp \Delta' \text{ en } I \text{ alors } S_\Delta o S_{\Delta'} = R(I, (2k+1)\pi) = S_I = h(I,-1)}$ ***avec*** $\boxed{k \in \mathbb{Z}}$

◈ $\boxed{h(I,k) \text{ est une isometrie ssi } k = 1 \text{ ou } k = -1}$

◈ Pour trois isométries f, g et h on a : $\boxed{fog = h \Leftrightarrow f = hog^{-1} \Leftrightarrow g = f^{-1}oh}$.

Astuce : ***f dép*** $\begin{cases} A \mapsto C \\ B \mapsto D \end{cases}$ ***; g anti*** $\begin{cases} A \mapsto C \\ B \mapsto D \end{cases}$ ***avec AB= CD ≠ o***

C.a.d ***on a déplacement et antidéplacement qui coincident sur deux points***

donc $\begin{cases} \boxed{\text{l'un est égal à } S_{(CD)} \text{ rond l'autre}} \\ \boxed{f(M) \text{ et } g(M) \text{ sont symétrique par rapport à } (CD) \text{ pour tout point } M \text{ de } P} \end{cases}$

Preuve : ✱ $\begin{cases} A \xrightarrow{g} C \xrightarrow{S_{(CA)}} C \\ B \xrightarrow{g} D \xrightarrow{S_{(CA)}} D \end{cases}$ ***Cad*** $S_{(CD)} o\, g$: $\begin{cases} A \mapsto C \\ B \mapsto C \end{cases}$ ***or*** $f \begin{cases} A \mapsto C \\ B \mapsto C \end{cases}$

on aura $\boxed{S_{(CD)} o\, g \text{ et } f \text{ deux déplacements qui coîncident sur 2 points par conséquant } \boxed{f = S_{(CD)} o\, g}}$

de même $\boxed{g \text{ et } S_{(CD)} o\, f \text{ deux antidéplacements qui coîncident sur 2 points par conséquant } \boxed{g = S_{(CD)} o\, f}}$

✱ $\boxed{f(M) \xrightarrow{f^{-1}} M \xrightarrow{g} g(M)}$ ***Cad*** $\boxed{(gof^{-1})(f(M)) = g(M)}$ ***or*** $\boxed{gof^{-1} = S_{(CD)}}$

Ainsi $\boxed{S_{(CD)}(f(M)) = g(M)}$ ***cela signifie que*** $\boxed{f(M) \text{ et } g(M) \text{ sont symétrique par rapport à } (CD)}$

Ensemble des points M :

Etant donnés deux points distincts A et B et un réel θ

- L'ensemble des points M tels que $\boxed{MA = MB}$ est : la médiatrice de segment $[AB]$.
- L'ensemble des points M tels que $\boxed{MA = r \in IR_+^*}$ est : le cercle de centre A et de rayon r..
- L'ensemble des points M tels que $\boxed{(\widehat{\overrightarrow{MA},\overrightarrow{MB}}) \equiv \theta[\pi]}$ est :

$$\begin{cases} \text{si } \theta \equiv 0[\pi], \boxed{\text{la droite (AB) privée des points A et B}} \\ \text{si } \theta \not\equiv 0[\pi], \text{le cercle } \Gamma \text{ passant par A et B et tangante en A à la droite AT} \\ \text{telle que } (\widehat{\overrightarrow{AT},\overrightarrow{AB}}) \equiv \theta[\pi], \text{privé des points A et B.} \end{cases}$$

- L'ensemble des points M tels que $\boxed{(\widehat{\overrightarrow{MA},\overrightarrow{MB}}) \equiv \theta[2\pi]}$ est :

$$\begin{cases} \text{si } \theta \equiv 0[2\pi], \boxed{\text{la droite (AB) privée du segment } [AB]} \\ \text{si } \theta \equiv \pi[2\pi], \boxed{\text{le segment } [AB] \text{ privée des points A et B.}} \\ \text{si } \theta \not\equiv 0[2\pi] \text{ et si } \theta \not\equiv \pi[2\pi], \text{un arc de cercle } \Gamma_1 \text{ d'extrémités A et B privée des points A et B} \\ \text{situé dans le demi-plan de frontiére (AB) et ne contenant pas la demi-droite} [At) \text{ définie par:} \\ (\widehat{\overrightarrow{AT},\overrightarrow{AB}}) \equiv \theta[2\pi] \text{ où } \Gamma_1 \text{ cercle passant par A et B et tangante en A à la droite AT} \\ \text{telle que } (\widehat{\overrightarrow{AT},\overrightarrow{AB}}) \equiv \theta[2\pi] \end{cases}$$

- f isométrie telle que $\begin{cases} A \mapsto A \\ B \mapsto B \end{cases}$ avec $AB \neq 0$ Alors $\boxed{f = idp \text{ ou } f = S_{(AB)}}$
- f isométrie telle que $\begin{cases} A \mapsto B \\ B \mapsto A \end{cases}$ avec $AB \neq 0$ Alors $\boxed{f = S_I \text{ avec } I = A*B \text{ ou } f = S_{med[AB]}}$
- f isométrie telle que $\begin{cases} A \mapsto A \\ B \mapsto C \end{cases}$ avec $AB = AC \neq 0$ Alors $\boxed{f = R(A,(\widehat{\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}})) \text{ ou } f = med[BC]}$
- f déplacement de P : $\begin{cases} A \mapsto C \\ B \mapsto D \end{cases}$ $\boxed{\text{avec AB = CD } \neq 0 \text{ et A } \neq \text{C ; B} \neq \text{D}}$ *Alors :*
  - si $(\widehat{\overrightarrow{AB},\overrightarrow{CD}}) \equiv 0[2\pi]$ alors $\boxed{f = t_{\overrightarrow{AC}} = t_{\overrightarrow{BD}}}$
  - si $(\widehat{\overrightarrow{AB},\overrightarrow{CD}}) \equiv \pi[2\pi]$ alors $\boxed{f = S_I \text{ avec I= A*C= B*D}}$
  - si $(\widehat{\overrightarrow{AB},\overrightarrow{CD}}) \equiv \theta[2\pi]$ avec $\boxed{\theta \neq k\pi (k \in \mathbb{Z})}$ alors $\boxed{f = R(I,\theta)}$

on va déterminer I : $\begin{cases} \boxed{I = med[AC] \cap med[BD]} (\text{si ces 2 médiatrices se coupent}) \\ \boxed{I = (AB) \cap (CD)} (\text{si } med[AC] = med[BD]) \end{cases}$

- f antidéplacement de P : $\begin{cases} A \mapsto C \\ B \mapsto D \end{cases}$ $\boxed{\text{avec AB = CD } \neq 0 \text{ et A } \neq \text{C ; B} \neq \text{D}}$ *Alors :*
  - si $\boxed{med[AC] = med[BD] = \Delta}$ alors $\boxed{S_\Delta \begin{cases} A \mapsto C \\ B \mapsto D \end{cases} \text{comme f anti} \begin{cases} A \mapsto C \\ B \mapsto D \end{cases} \text{donc } f = S_\Delta}$

si $\boxed{med[AC] \neq med[BD]}$ alors $\boxed{f \text{ n'est une symetrie axiale}}$

Écriture complexe des translations : La translation $t_{\vec{u}}$ de vecteur $\vec{u}$ associe, à tout point M d'affixe z le point M' d'affixe $z' = z + z_{\vec{u}}$, où $z_{\vec{u}}$ désigne l'affixe de $\vec{u}$.

Écriture complexe des rotations : La rotation $r_{\Omega;\alpha}$ de centre Ω et d'angle α, est la transformation qui, à tout point M d'affixe z le point M' d'affixe $z' = e^{i\alpha}(z - z_\Omega) + z_\Omega$.

Composée de deux rotations

Soient *f* et *g* deux rotations d'écritures complexes respectives $z' = e^{i\alpha}z + b_1$ et $z' = e^{i\beta}z + b_2$, la transformation gof associe, à tout point *M* d'affixe *z* le point M'' d'affixe $z'' = e^{i\beta}(e^{i\alpha}z + b_1) + b_2 = e^{i(\alpha+\beta)}z + \left(e^{i\beta}b_1 + b_2\right)$.

C'est une transformation dont l'expression complexe est bien de la forme $z'' = Az + B$ avec $|A| = 1$.

Si $\alpha + \beta = 0 \quad [2\pi]$, $A = 1$ et gof est une translation.

Si $\alpha + \beta \neq 0 \quad [2\pi]$, $A \neq 1$ et gof est une rotation d'angle $\alpha + \beta$.

Composée d'une rotation et d'une translation

Soit *f* une rotation d'écriture complexe $z' = e^{i\alpha}z + b_1$ et *g* une translation d'écriture complexe $z' = z + b_2$.

La transformation gof associe, à tout point *M* d'affixe *z* le point M'' d'affixe

$z'' = (e^{i\alpha}z + b_1) + b_2 = e^{i\alpha}z + \left(b_1 + b_2\right)$.

gof est donc une rotation d'angle α.

Composée d'une translation et d'une rotation

Soit *f* une translation d'écriture complexe $z' = z + b_1$ et *g* une rotation d'écriture complexe $z' = e^{i\alpha}z + b_2$

La transformation gof associe, à tout point *M* d'affixe *z* le point M'' d'affixe

$z'' = e^{i\alpha}(z + b_1) + b_2 = e^{i\alpha}z + \left(e^{i\alpha}b_1 + b_2\right)$.

gof est donc une rotation d'angle α.

Ecriture complexe des symétries axiales

La *symétrie axiale* s_Δ dont l'axe Δ passe par le point Ω et admet le vecteur $\vec{v}$ comme vecteur directeur associe, à tout point *M* d'affixe *z* le point M' d'affixe $z' = e^{i2\theta}\left(\overline{z} - \overline{z_\Omega}\right) + z_\Omega$ où θ désigne une mesure de l'angle $\left(\vec{e_1}\,;\vec{v}\right)$.

Représentation complexe des symétries glissées

La *symétrie glissée* $s_{\Delta\,;\vec{u}} = t_{\vec{u}} o s_\Delta$ dont l'axe Δ passe par le point Ω et admet le vecteur $\vec{v}$ comme vecteur directeur associe, à tout point *M* d'affixe z le point M' d'affixe $z' = e^{i2\theta}\left(\overline{z} - \overline{z_\Omega}\right) + z_\Omega + z_{\vec{u}}$ où θ désigne une mesure de l'angle $\left(\vec{e_1}\,;\vec{v}\right)$.

	Translation	**Rotation**	Symétrie axiale	Symétrie glissée
Translation	**Translation**	**Rotation**	Symétrie axiale ou glissée	Symétrie axiale ou glissée
Rotation	**Rotation**	**Rotation ou translation**	Symétrie axiale ou glissée	Symétrie axiale ou glissée
Symétrie axiale	Symétrie axiale ou glissée	Symétrie axiale ou glissée	**Rotation ou translation**	**Rotation ou translation**
Symétrie glissée	Symétrie axiale ou glissée	Symétrie axiale ou glissée	**Rotation ou translation**	**Rotation ou translation**

Définition

Soit Ω un point du plan et *k* un réel non nul. L'*homothétie* de centre Ω et de rapport *k*, notée $h_{\Omega\,;k}$ est la transformation qui, à tout point *M* du plan, associe le point M' tel que $\overrightarrow{\Omega M'} = k\overrightarrow{\Omega M}$

Écriture complexe des homothéties

L'homothétie $h_{\Omega\,;k}$ de centre Ω et de rapport k est la transformation qui, à tout point *M* d'affixe *z* le point M' d'affixe $z' = k(z - z_\Omega) + z_\Omega$.

La transformation d'écriture complexe $z' = az + b$, où *a* est un réel non nul et *b* un complexe est :

- l'identité si $a = 1$ et $b = 0$;
- une translation si $a = 1$ et $b \neq 0$;
- une homothétie de rapport a si $a \neq 1$.