Partie 2

a) <u>Correspondance</u>

- Une correspondance notée ψ est un triplet d'ensembles : (E, F, Γ) où :
  - ⊕ E est appelé l'ensemble de départ de la correspondance
  - ⊕ F est appelé l'ensemble d'arrivée de la correspondance
  - ⊕ Γ est appelé le graphe de la correspondance
- Γ est l'ensemble suivant :

$$\Gamma = \{(x, \psi(x)), x \in E, \psi(x) \in F\ \}$$

Une correspondance peut être visualisée par « des flèches », on associe à chaque élément x de l'ensemble de départ, un élément $\psi(x)$ de l'ensemble d'arrivée.

Une correspondance est un cas très général où certains des éléments de l'ensemble de départs peuvent avoir 0,1 ou plusieurs « images ».

Il peut exister certains éléments de l'ensemble d'arrivée qui ont 0,1 ou plusieurs « antécédents ».

Le graphe Γ est l'ensemble des couples « antécédents/images » de la fonction. Il caractérise l'ensemble des des flèches de la correspondance.

Un couple est l'outil mathématique qui permet la définition précise et mathématique d'une « flèche ». Une flèche peut être caractérisée par un point de départ : l'élément de l'ensemble de départ auquel on associe un élément de l'ensemble d'arrivée.

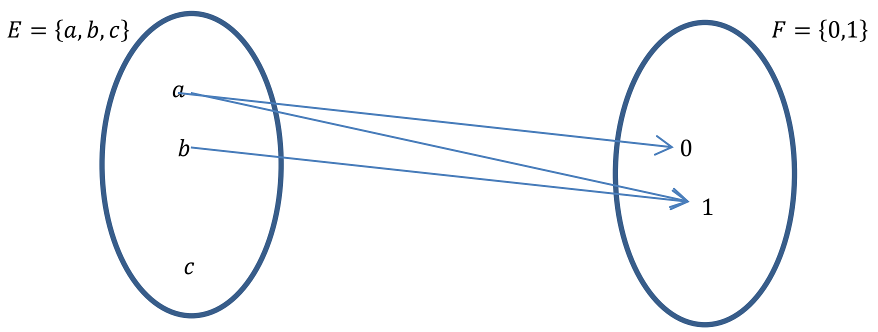
<u>Représentation d'une correspondance</u>

- On peut représenter une correspondance à l'aide d'un diagramme sagittal (c'est-à-dire un diagramme avec des flèches). On représente l'ensemble de départ et l'ensemble d'arrivée sous forme de diagrammes de Venn et le graphe de la correspondance sous forme d'un ensemble de flèches allant de l'ensemble de départ vers l'ensemble d'arrivée.

| <u>Exemple</u> :

Soit δ la correspondance suivante : $(\{a, b, c\},\ \{0,1\},\ \{(a, 0), (a, 1), (b, 1)\})$

On représente δ sous forme d'un diagramme sagittal :

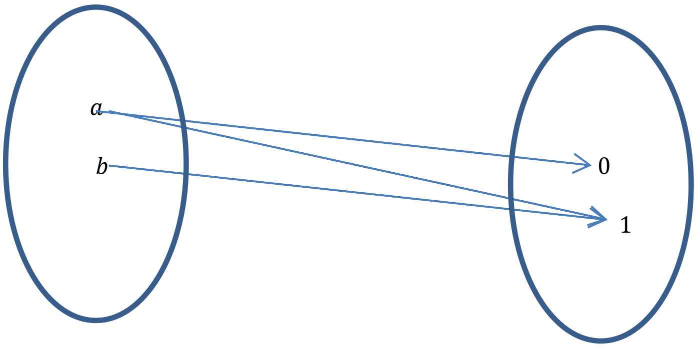


On associe à l'élément a deux éléments distincts de l'ensemble d'arrivée : 0 et 1

On associe à l'élément b un seul élément de l'ensemble d'arrivée : 1

L'élément c n'a aucune image par la correspondance δ

On change la correspondance si on change l'ensemble de départ et l'ensemble d'arrivée. Par exemple le diagramme sagittal suivant :



En effet l'ensemble de départ n'est plus le même ce n'est plus $\{a, b, c\}$ mais $\{a, b\}$ et donc le triplet caractéristique de cette nouvelle correspondance sera différent du triplet caractéristique de δ donc par définition, ce ne seront pas les mêmes correspondances.

----

b) <u>Fonction</u>

- Une fonction f est un type de correspondance donc il s'agit également d'un triplet d'ensemble où il y a un ensemble de départ, un ensemble d'arrivée et le graphe de la fonction. Néanmoins par rapport au concept plus général de correspondance, une fonction se distingue par le fait que chaque élément de l'ensemble d'arrivé a au plus (0 ou une) un antécédent par f.

- On définit alors une fonction f ainsi :

$$\boxed{f = (E, F, \Gamma), \text{ tel que si } x \in E \text{ alors il existe au plus un } y \in F \text{ tel que } (x, y) \in \Gamma}$$

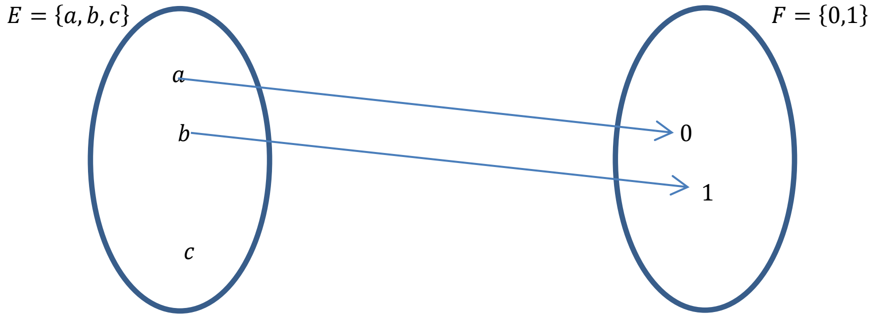
c) <u>Représentation d'une fonction</u>

- On peut comme pour toute correspondance tracer le diagramme sagittal d'une fonction. La caractéristique visuelle d'une fonction c'est que il y a au plus une flèche qui part d'un élément de l'ensemble de départ (jamais deux).
  Ce qui signifie rigoureusement que pour une fonction, il n'existe pas de couple $(a, \alpha), (a, \beta)$ du graphe Γ tels que $\alpha \neq \beta$.
  On dit souvent pour résumer ça, que chaque éléments de l'ensemble de départ a au plus une image par une fonction.
  On peut également tracer le graphe d'une fonction dans un repère orthonormé, dans ce contexte, à chaque point du plan on associe un couple de coordonnée (abscisse et ordonnée) ce qui permet de représenter chaque couple du graphe Γ de la fonction. Ainsi pour une fonction un graphe peut être à la fois l'ensemble des couples représentants les « flèches » mais aussi la représentation de ces couples par des points dans un repère du plan.

| <u>Exemple</u> :

Soit F la fonction suivante : $(\{a, b, c\},\ \{0,1\},\ \{(a, 0), (b, 1)\})$

On représente F sous forme d'un diagramme sagittal :



On associe à l'élément a un seul élément de l'ensemble d'arrivée : 0

On associe à l'élément b un seul élément de l'ensemble d'arrivée : 1

L'élément c n'a aucune image par la fonction F

<u>Remarque :</u> Rigoureusement, les termes « image » et « antécédent » sont réservés aux fonctions. L'image d'un élément de départ est par définition unique ce qui correspond à la définition de la fonction (qui associe à un élément de l'ensemble de départ au plus un élément de l'ensemble d'arrivée).

d) <u>Application</u>

- Une application est un type de fonction particulier qui est caractérisée par le fait que à chaque élément de l'ensemble de départ on associe exactement un et un seul élément de l'ensemble d'arrivée (qui est alors l'image de cet élément par l'application).

- On définit rigoureusement ainsi une application Θ :

$$\boxed{\Theta = (E, F, \Gamma), \forall x \in E, \exists!\, y \in F, (x, y) \in \Gamma}$$

Ce qui signifie exactement ceci : « Θ est le triplet d'ensembles (E, F, Γ) (ensemble de départ, ensemble d'arrivée, graphe de l'application) tels que pour tout élément x de l'ensemble de départ, il existe un unique (c'est ce que signifie le symbole « $\exists!$ ») élément y de l'ensemble d'arrivée tel que le couple (x, y) appartiennent au graphe de Θ.

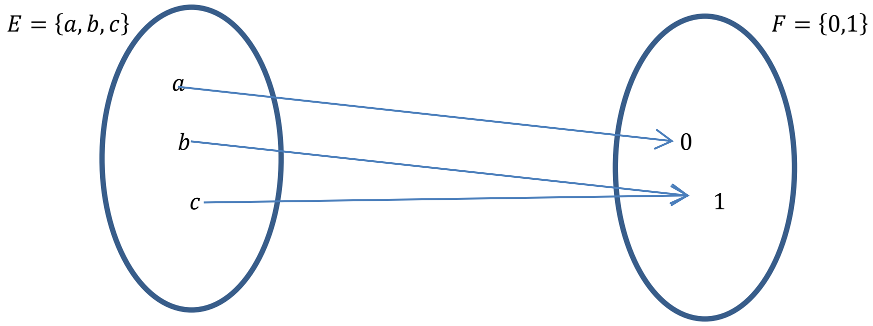
e) <u>Représentation d'une application</u>

- Une application peut être représentée sous forme d'un diagramme sagittal (comme toute correspondance) où il y a exactement une seule flèche qui part de chaque élément de l'ensemble de départ (et par 0 ou 1 pour la fonction : la nuance est subtile).

| <u>Exemple</u> :

Soit ϕ l'application suivante : $(\{a, b, c\},\ \{0,1\},\ \{(a, 0), (b, 1), (c, 1)\})$

On représente δ sous forme d'un diagramme sagittal :



On associe à l'élément a un unique élément de l'ensemble d'arrivée : 0

On associe à l'élément b un unique élément de l'ensemble d'arrivée : 1

On associe à l'élément c un unique élément de l'ensemble d'arrivée : 1

Remarques :

- Chaque élément de l'ensemble de départ a une unique image.
- Mais certains éléments de l'ensemble de départ peuvent avoir éventuellement la même image comme par exemple ici où c et b ont la même image.
- Lorsque les ensembles de départ et d'arrivée sont des ensembles de nombres, on parle de « fonction numérique » ou « application numérique »

f) Représentations de fonctions numériques dans un repère du plan

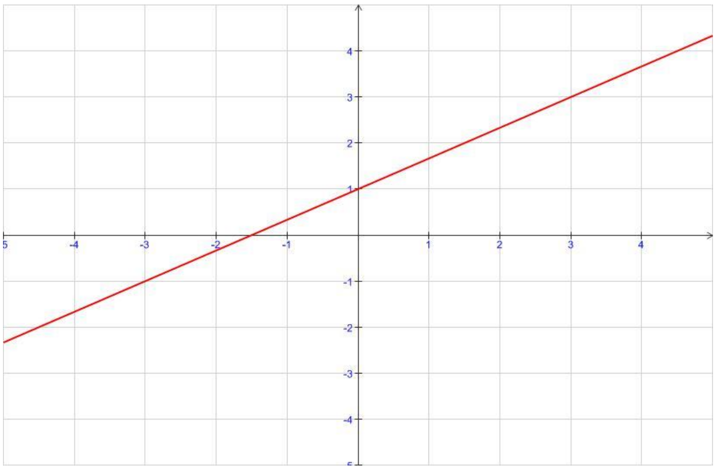
- Pour des fonctions ou applications numériques, on peut également noter et définir ces objets sous la forme plus pratique suivante :

$$\phi : \begin{array}{c} E \to F \\ x \longmapsto \phi(x) \end{array}$$

Dans cette écriture on écrit toutes les informations concernant la fonction ϕ : son ensemble de départ E, son ensemble d'arrivée F et son graphe qui sont tous les couples de la forme $(x, \phi(x))$.

- Représentation de la fonction affine suivante :

$$\phi : \begin{array}{c} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \longmapsto \frac{2}{3}x + 1 \end{array}$$



On dit qu'on a tracé le graphe de ϕ dans un repère du plan. Chaque point de la droite correspond à un couple de coordonnée$(x, \phi(x))$, il s'agit d'une représentation du graphe de ϕ.

La fonction associe à tous les réels une image et une seule il s'agit donc également d'une application. On nomme les applications de ce style : « applications affines ».