Le Cassini des futurs MPSI (vol. 2)

August 27, 2015

1 Enoncés

1.1 Arithmétique

1. Montrer que $3^{4^5} + 4^{5^6}$ peut s'écrire sous la forme d'un produit de deux facteurs entiers.

2. Déterminer le reste de la division euclidienne de $\sum_{i=0}^{n} 2^i$ par 2^n .

3. Résoudre dans $\mathbb{Z}^3$: $x^{\mathbf{2}}$+y$^{\mathbf{2}}$=7z$^{\mathbf{2}}$

4. Soit x un entier relatif. Démontrer que l'équation $(x + 2y)^2 = 1317$ n'admet pas de couple solution (x, y) dans $\mathbb{Z}^{\mathbf{2}}$

5. Soit $n \in \mathbb{N}$. On pose $a = 21n$+4 et $b = 16n + 3$. PGCD de a et b ?

6. Soient a et b des entiers naturels non nuls tels que $PGCD(a + b, ab) = p$, où p est un nombre premier.
   a. Démontrer que p divise a^2 .
   b. En déduire que p divise a. On constate donc, de même, que p divise b.
   c. Démontrer que $PGCD(a, b) = p$.

7. On désigne par a et b des entiers naturels tels que $a \leq b$
   a. Résoudre le système : $\begin{cases} PGCD(a, b) = 5 \\ PPCM(a, b) = 170 \end{cases}$
   b. En déduire les solutions du système : $\begin{cases} PGCD(a + b, ab) = 5 \\ PPCM(a, b) = 170 \end{cases}$

8. Résoudre pour $(x, y) \in \mathbb{Z}^{\mathbf{2}}$, $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{5}$

9. Soit p un nombre premier plus grand 5 que, montrez que $p^{\mathbf{2}}$-1 est divisible par 24.

10. Démontrez l'existence d'une infinité d'entiers x tel que $\forall n \in \mathbb{N}$, $x + n^4$ n'est pas un nombre premier.

11. Quel est le chiffre des unités de $7^{7^{7^{7^{7^{7^{7}}}}}}$?

12. Par combien de zéros se termine100! Puis 1000!? Et 10000! ?
    Equivalent en l'infini du nombre de zéros de 10^n! ?

13. Montrer que, pour tout entier naturel k, 2^kdivise a_n si et seulement si 2^k divise n.

14. Trouver x^2+y^2 sachant que : $x, y \in \mathbb{N}$ et $\begin{cases} xy+x+y=71 \\ x^2y+xy^2=880 \end{cases}$

15. $\begin{cases} x_1+4x_2+9x_3+...+49x_7=1 \\ 4x_1+9x_2+16x_3+...+64x_7=12 \\ 9x_1+16x_2+25x_3+...+81x_7=123 \end{cases}$. Calculer $16x_1+25x_2+...+100x_7$

16. Trouver un entier naturel k tel que $2^k+2^{37}+2^{34}$ soit un carré parfait.

17. Résoudre dans $\mathbb{N}^2$: $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{1}{2003}$

18. (**) Montrer que tout rationnel positif peut s'écrire sous la forme $\frac{a^3+b^3}{c^3+d^3}$, où a, b, c, d sont des entiers naturels, non nuls.

19. Pour tout entier naturel n strictement plus grand que 1, démontrer que n^4+64 n'est pas premier.

20. En notant E la fonction partie entière:
   a. Soient a et b deux entiers strictement positifs.
   Pour tout k dans $\{0, ..., b-1\}$, calculer $E(k.\frac{a}{b})+E(a-k.\frac{a}{b})$
   b. En déduire la formule du PGCD: $PGCD(a,b)=a+b-a.b+2.\sum_{k=1}^{b-1}E(k.\frac{a}{b})$

21. (**) Montrer que si 24 divise $n+1$, alors 24 divise la somme des diviseurs de n.

22. Pour quelles valeurs de n, $2^n+12^n+2014^n$ est-il un carré parfait ?

23. Prouver que si n divise 2^n+1 alors 3 divise n (n strictement supérieur à 1).

24. Soient p et q deux nombres premiers inférieurs à 100. Si les nombres $p+6$, $p+10$, $q+4$, $q+10$ et $p+q+1$ sont tous premiers, quelle est la plus grande valeur que peut prendre $p+q$?

25. Si l'on écrit les nombres de 0 à 2015 en base 3, combien de ces nombres sont des palindromes (nombres qui peuvent se lire indifféremment de gauche à droite ou de droite à gauche) ?

26. Si a, b, c, d et e représentent les âges de 5 personnes et qu'on a $a=2b=3c=4d=6e$, quelle est la plus petite valeur possible de $a+b+c+d+e$?

27. Déterminer tous les couples (a, b) d'entiers positifs qui satisfont l'équation $a^2+10b=2010$.

28. Soit n un entier naturel. A quelle condition nécessaire et suffisante n^4+4^n est-il premier ?

29. (*) La fonction d'Euler $\phi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ associe à tout entier n le nombre d'entiers $k<n$ premiers avec n.
Soit $n \in \mathbb{N}$, on note $n=p_1^{\alpha_1}...p_k^{\alpha_k}$. Montrer que : $\phi(n)=n(1-\frac{1}{p_1})...(1-\frac{1}{p_k})$.

30. Soit $n \in \mathbb{N}$.
   a. Montrer que n est un carré parfait si et seulement si le nombre de ses diviseurs est impair.
   b. On suppose $n>1$. Montrer que n divise $\binom{n}{k}$ pour tout $k \in \{2, ..., n-1\}$
   si et seulement si n est un nombre premier.

31. On définit le n-ième nombre de Fermat par la formule $F_n=2^{2^n}+1$ avec n appartenant à l'ensemble des entiers naturels , montrer que les entiers F_n sont deux à deux premiers entre eux.

32. Par combien de zéros se termine le nombre 2004!

33. Montrer que tout entier non divisible par 2 ou par 5 admet un multiple dont l'écriture en base 10 est constituée uniquement de 1 (càd 11111....)

34. Soient a et n deux entiers supérieurs à 2. On suppose que l'entier $a^n - 1$ est premier

a. Montrer que $a = 2$

b. Montrer que n est premier

35. Soit a un entier naturel tel que a^3 possède cinq fois plus de diviseurs naturels que a, combien de diviseurs a possède-t-il ?

36. (**) Soit un entier $n > 1$. Montrer que $S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$ n'est pas un entier.

37. (**) Démontrer que pour tout n dans $\mathbb{N}$: 2^n divise $E((3+\sqrt{5})^n) + 1$ avec E la fonction partie entière.

38. a, b, c sont trois entiers.
On suppose que $a^2 + b^2 + c^2$ est divisible par 6 et $ab + bc + ac$ est divisible par 3. Montrer que $a^3 + b^3 + c^3$ est divisible par 6.

39. (**) Montrer que tous les nombres rationnels distincts et strictement positifs a et b tels que $a < b$ vérifiant $a^b = b^a$ sont de la forme $a = (1 + \frac{1}{n})^n$ et $b = (1 + \frac{1}{n})^{n+1}$, n entier naturel non nul.

40. (*) Pour tout entier naturel n, on note I_n le nombre d'entiers p pour lesquels $50^n < 7^p < 50^{n+1}$

a. Démontrer que pour tout entier n, vaut 2 ou 3.

b. Démontrer qu'il existe une infinité d'entiers n pour lesquels vaut 3 et donner le plus petit d'entre eux.

41. Trouvez les nombres à 4 chiffres de la forme $aabb$ qui sont le carrés d'entier.

42. (*) Soit S le sous ensemble de Z des entiers relatifs x tels qu'il existe(a, b, c) dans $\mathbb{Z}^3$ tels que
$x = a^3 + b^3 + c^3 - 3abc$
Sest-il stable par $\times$?

43. Soient $a \geq 2$ un entier et m et n deux entiers strictement positifs. Exprimer $pgcd(a^m - 1, a^n - 1)$ en fonction de a,m et n.

44. Soient :

- $P_n$le produit des n premiers nombres premiers (la primorielle)
- $p_n$le n-ième nombre premier
- Q_n le produit des n premiers nombres premiers impairs

a. Démontrer que pour n quelconque, P_{n+1} ne peut jamais être un carré parfait.

b. Démontrer que pour n quelconque, $Q_n^2 + 1$ ne peut jamais être un cube parfait.

c. Pour quelles valeurs de n a-t-on $P_n > p_{n+1}^2$?

d. (**) Démontrer que pour $n > 1$, $P_n - 1$ ne peut jamais être une puissance parfaite.
On pourra utiliser le fait que pour n dans $\mathbb{N}$, il existe un nombre premier compris strictement entre n et $2n$. (Postulat de Bertrand)

45. Résoudre dans $\mathbb{Z}$ le système suivant : $\begin{cases} x \equiv a[9] \\ x \equiv b[11] \end{cases}$

46. Résoudre dans : $\mathbb{N}^3$:$\frac{1}{x} + \frac{2}{y} - \frac{3}{z} = 1$

47. Les dénominateurs de deux fractions irréductibles sont 600 et 700. Quelle est la plus petite valeur possible du dénominateur de leur somme (lorsqu'on l'écrit comme fraction irréductible) ?

48. Montrer que $n!$ divise $\prod_{k=0}^{n-1}(2^n - 2^k)$.

49. Soit p un nombre premier.
Pour tout entier n, on note $v_p(n)$ l'unique exposant de p dans la décomposition en facteurs premiers de n.
Montrer la formule de Legendre : $v_p(n!) = \sum_{k>0} E(\frac{n}{p^k}) = \frac{n-s_p(n)}{p-1}$(où E désigne la partie entière du réel et la somme des chiffres de l'écriture en base p de n).
(La somme ne contient qu'un nombre fini de termes non nuls).

50. Montrer que $2*6*10*..*(4n-2)$ est un multiple de $(n+1)!$ pour tout $n>0$.

51. Montrer que $x^3+y^3+z^3 = 1969^2$ n'admet pas de solutions entières.

52. Soit $f : \mathbb{Q}_+^* \rightarrow \mathbb{Q}_+^*$ une fonction telle que pour tout rationnel strictement positif x, $f(x+1) = f(x)+1$ et $f(\frac{1}{x}) = \frac{1}{f(x)}$. Montrer que pour tout rationnel strictement positif x , $f(x) = x$.

53. Résoudre dans $\mathbb{N}^2$: $n(n+1)(n+2) = m^2$

54. Soit $n > 6$. On considère tous les nombres $a_1, ..., a_k$ inférieurs à n et premiers avec n.
On suppose que $a_k - a_{k-1} = ... = a_3 - a_2 = a_2 - a_1 > 0$.
Montrer que n est premier ou est une puissance de 2.

55. Soient 2012 entiers positifs $n_1, ...n_{2012}$ tels que $n_1^2 + ... + n_{2011}^2 = n_{2012}^2$ Prouver qu'au moins deux de ces entiers sont des nombres pairs.

56. Soit n un entier naturel non nul. On pose $F_n = 2^{2n}+1$ Montrer que 2^{F_n} est congru à 2 modulo F_n

57. Soit f une fonction minorée de $\mathbb{Z}$ dans $\mathbb{R}$.
On suppose que f vérifie, pour tout entier n : $f(n) \geq \frac{f(n+1)+f(n-1)}{2}$
Montrer que f est constante.

58) (*) Soit p un nombre premier et a, b deux entiers naturels.
On suppose de plus que p est congru à 3 modulo 4.
Prouver que : $p|a^2+b^2$ si et seulement si p divise a et b.

1.2 Equations, inégalités

1. Soient $a, b, c > 0$ avec $abc = 1$. Montrer que : $\frac{a+b+c}{3} \geq \sqrt[10]{\frac{a^3+b^3+c^3}{3}}$

2. Résoudre l'équation $\sqrt{x+3-4\sqrt{x-1}} + \sqrt{x+8-6\sqrt{x-1}} = 1$

3. Soit $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction bornée.
Montrer que $sup_{x\in\mathbb{R}} inf_{y\in\mathbb{R}} f(x,y) \leq inf_{y\in\mathbb{R}} sup_{x\in\mathbb{R}} f(x,y)$

4. On considère $m*n$ soldats organisés en un rectangle de m lignes et n colonnes. Qui, du plus grand des plus petits soldats de chaque ligne, ou du plus petit des plus grands soldats de chaque colonne est le plus grand ?

5. Résoudre $cos(2x) - \sqrt{3}sin(2x) = 1$

8. Résoudre: $cos^3(x) + sin^3(x) = 1$

9. Résoudre (en x) et discuter $sin(x) + m.cos(x) = \sqrt{1+m^2}.cos(3x)$.
(On pourra poser $m = tan(\alpha)$)

10. Résoudre (en x) et discuter $sin(x)tan(x)(4 - tan^2(\frac{x}{2})) = m.tan^2(\frac{x}{2})$.

11. Soit a, b, c trois réels positifs tels que $abc = 1$
Montrer que : $\frac{a}{(a+1)(b+1)} + \frac{b}{(b+1)(c+1)} + \frac{c}{(c+1)(a+1)} \geq \frac{3}{4}$

12. Montrer que pour tout reél x: $cos(sin(x)) > sin(cos(x))$.

13. Soient x et y deux réels strictement positifs, montrer que $x^y + y^x > 1$

14. (**) Soient x,y des réels différents et strictement positifs. Montrer que $x^x + y^y > x^y + y^x$

15. Soient a, b, c trois réels, tels que $abc = 1$. Montrer que : $a^2 + b^2 + c^2 + ab + ac + bc \geq 6$

16. Soient $0 < \lambda_1 < \lambda_2$. On note $T = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 | x_1, x_2 \geq 0, x_1 + x_2 \leq 1\}$.
Pour $x = (x_1, x_2) \in T$, on note $f(x) = (\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2)(\frac{x_1}{\lambda_1} + \frac{x_2}{\lambda_2})$
Déterminez la valeur maximale que prend la fonction f, lorsque x décrit l'ensemble T.

17. Montrer que $ln(1 + x).ln(1 + \frac{1}{x}) \leq ln(2)^2$pour x positif

18. Soit f une fonction réelle telle que : $x + |f(x) - 1| = 2f(x) - 2$.
Calculer $f(x)$ pour $x \in \mathbb{R}$

19. Montrer que pour tout (z_1, z_2, z_3, z_4)de $\mathbb{C}^4$, $\sum_{k=1}^{4} |z_k| \leq \sum_{1 \leq j < i \leq 4} |z_i + z_j|$

20. Soient $0 < a_1 < a_2$. Montrer que pour tout $(x, y) \in [a_1, a_2]$, on a $\frac{x}{y} + \frac{y}{x} \leq \frac{a_1}{a_2} + \frac{a_2}{a_1}$

21. Soient $(a_1, ..., a_n)$ et $(b_1, ..., b_n)$ des réels strictement positifs et p, q deux réels strictement positifs vérifiant : $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$

On veut montrer l'inégalité : $\sum_{i=1}^{n} a_i b_i \leq (\sum_{i=1}^{n} b_i^q)^{\frac{1}{q}} (\sum_{i=1}^{n} a_i^p)^{\frac{1}{p}}$

a. Montrer que pour $x, y > 0$, on a $xy \leq \frac{x^p}{p} + \frac{y^q}{q}$

b. Montrer que l'inégalité de départ est vraie lorsque : $(\sum_{i=1}^{n} a_i^p)^{\frac{1}{p}} = (\sum_{i=1}^{n} b_i^q)^{\frac{1}{q}}) = 1$

c. Montrer alors le cas général.

d. Soit $n \in \mathbb{N}$ et $p > 1$.
Montrer qu'il existe deux constantes C_1et C_2 à préciser telles que pour tous $a_1, ..., a_n > 0$ on ait :
$C_1(\sum_{i=1}^{n} a_i^p)^{\frac{1}{p}} \leq \sum_{i=1}^{n} a_i \leq C_2(\sum_{i=1}^{n} a_i^p)^{\frac{1}{p}}$

22. Résoudre dans $\mathbb{R}^3$ le système $x + y + z = 3$;$x^2 + y^2 + z^2 = 3$

23. Trouver l'ensemble des fonctions f de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$ telles que $f(z) + i.f(\bar{z}) = 2i$.

24. Soient $z_1, ..., z_n$des nombres complexes. Montrer que $\frac{|\sum_{k=1}^{n} z_k|}{1+|\sum_{k=1}^{n} z_k|} \leq \sum_{k=1}^{n} \frac{|z_k|}{1+|z_k|}$

25. Soient a,b,c des réels tels que :$\begin{cases} cos(a) + cos(b) + cos(c) = 0 \\ sin(a) + sin(b) + sin(c) = 0 \end{cases}$.
Que vaut donc $cos(2a) + cos(2b) + cos(2c)$?

26. Soit$f : Q \to 0; 1$ telle que $f(0) = 0$ et $f(1) = 1$ et telle que, de plus, pour tout x, y dans Q, si $f(x) = f(y)$ alors $f(\frac{x+y}{2}) = f(x)$. Que vaut $f(x)$ pour $x > 1$ rationnel ?

27. Soit $c \in \mathbb{R}$.
Déterminer une condition nécessaire et suffisante sur c pour que l'équation $cos(x)^4 + sin(x)^4 = c$ admette au moins une solution.

28. a. Montrer que, pour tout $x \geq 0$,$x - \frac{x^2}{2} \leq ln(1 + x) \leq x$

b. En déduire la limite de la suite (u_n) définie par : $\forall n \in \mathbb{N}*, u_n = \prod_{k=1}^{n}(1 + \frac{k}{n^2})$
(On admettra $\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$)

29. Trouver tous les couples (x,n) dans$\mathbb{R} \times \mathbb{N}*$ tels que : $cos^n(x) + sin^n(x) = 1$

30. Soient m et n deux entiers positifs tels que $n \leq m$, montrer que : $2^n.n! \leq \frac{(m+n)!}{(m-n)!} \leq (m^2+m)^n$

31. Soit l'équation $(E) : 4x^3 + x^2 + x - 3 = 0$.
   a. Montrer que (E) a une unique solution réelle α et que $\alpha \in]0,1[$.
   b. Montrer que si (E) a une solution rationnelle $\frac{p}{q}$ avec $pgcd(p,q) = 1$alors p divise 3 et q divise 4.
   La solution α est-elle rationnelle ?
   c. Résoudre (E) dans $\mathbb{C}$

32. (**)Soient $a_2, ..., a_n$ des réels strictement positifs $(n > 2)$. On suppose que leur produit vaut 1.
Montrer que : $(1+a_2)^2 * (1+a_3)^3 * ... * (1+a_n)^n \geq n^n$

33. Soit $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ une suite de nombres naturels non nuls et distincts.
Montrer que pour tout n : $\sum_{k=1}^n \frac{a_k}{k^2} \geq \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$

34. Soit $n > 1$ et $1 = d_1 < d_2 < ... < d_k = n$ la suite de ses diviseurs.
   a. Montrer que pour tout j entre 1 et k, on a : $d_j \leq \frac{n}{k+1-j}$
   b. En déduire que $\sum_{j=1}^{k-1} d_j d_{j-1} < n^2$

35. Montrer que : pour tout $x \in [0, \frac{\pi}{2}[$, $sin(x) \leq x \leq tan(x)$
et que pour tout $x \in [0, \frac{\pi}{2}[$, $\frac{8sin(x)-sin(2x)}{6} \leq x \leq \frac{2}{3}sin(x) + \frac{1}{3}tan(x)$

36. Pour tout x, y des réels strictement positifs, on pose $a = \frac{x+y}{2}$, $g = \sqrt{xy}, \frac{1}{h} = \frac{1}{2x} + \frac{1}{2y}$. Montrer que $h \leq g \leq a$, puis que ces trois expressions sont comprises entre x et y.

37. Soient $n \in \mathbb{N}*$ et deux familles de réels $(a_1, ..., a_n)$ et $(b_1, ..., b_n)$.
On considère la fonction f définie par : $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = \sum_{k=1}^n (a_k x + b_k)^2$. Montrer que f ne prend que des valeurs positives, puis montrer l'inégalité dite de Cauchy-Schwarz : $|\sum_{k=1}^n a_k b_k| \leq \sqrt{\sum_{k=1}^n a_k^2}.\sqrt{\sum_{k=1}^n b_k^2}$.

38. Résoudre dans $\mathbb{R}^3$, le système suivant : $\begin{cases} x+y+z=0 \\ e^x + e^y + e^z = 3 \end{cases}$

39. Soit n un entier naturel non nul et x un réel positif ou nul.
Démontrer l'inégalité :$(1+x)^n \leq 2^{n-1}(1+x^n)$.
Préciser les éventuelles valeurs de x qui donnent une égalité.

40. Soit f une fonction continue sur $[0,1]$ à valeurs strictement positives.
Démontrer l'inégalité : $\int_0^1 ln(f) \leq ln(\int_0^1 f)$.

1.3 Nombres rationnels, irrationnels

1. $\sqrt{2} + \sqrt[3]{3}$ est-il rationnel ?

2. Démontrer que : $\sqrt[3]{2+\sqrt{5}} + \sqrt[3]{2-\sqrt{5}}$est un rationnel.

3. Montrer que $\sqrt{2} + \sqrt{3} + \sqrt{5}$ est un irrationnel.

4. Le nombre suivant est-il rationnel: $0,1223334444555556666667777777...$?

5. Montrer que $f : x \to cos(x) + cos(x\sqrt{2})$ n'est pas périodique.

1.4 Ensembles

1. Soient $I_1, ..., I_n$des intervalles de R tels que leur union soit un intervalle de R. Montrer qu'il existe j entre 1 et n tel que $\cup_{k!=j} I_k$ soit encore un intervalle.

2. Soit E un ensemble. Si A et B sont deux parties de E , on note $A\Delta B = A \cup BA \cap B)$.
Montrer que $(A\triangle B)\triangle C = A\triangle(B\triangle C)$.

3. Si $(A \cap B) \subset (A \cap C)$ et$(A \cup B) \subset (A \cup C)$, quelle relation y a t-il entre B et C ?

4. Déterminer tous les ensembles X d'entiers strictement positifs et contenant au moins deux éléments tels que : si m et n sont dans X tels que $n > m$, il existe k dans X tel que : $k = \sqrt{\frac{n}{m}}$

5. Montrer que pour tout entier $n > 4$, il existe une partition de $\{1, 2, ..., n\}$ en deux ensembles A et B tels que le produit des éléments de A soit égal à la somme des éléments de B.

1.5 Calculs d'intégrales

1. (*) Soient f, g:$[0, 1] \to \mathbb{R}+$ deux fonctions continues, monotones de même monotonie.
Démontrer : $\int_0^1 f. \int_0^1 g \leq \int_0^1 fg$.

2. (*) Soit f:$[0, 1] \to \mathbb{R}+$une fonction continue. On note $I = \int_0^1 f$.
Démontrer : $\sqrt{1 + I^2} \leq \int_0^1 \sqrt{1 + f^2} \leq 1 + I$.

3. Calculer $\int_0^3 \sqrt{x}(3 - x)dx$, $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{sin(t)}{sin(t)+cos(t)}dt$ et $\int_{\frac{1}{2}}^2 \frac{1}{t}.cos(\frac{t}{1+t^2}).ln(t)dt$

4. Déterminer $\int_0^x cos(t)^2dt$ et $\int_0^x sin(t)^2dt$ pour x réel.

5. Pour p, q des entiers, on définit : $I(p, q) = \int_0^1 t^p(1 - t)^q dt$
   a. Montrer que : $I(p, q) = I(q, p)$
   b. Trouver une relation entre $I(p, q)$ et $I(p + 1, q - 1)$
   c. En déduire $I(p, q)$ en fonction de p et q

6. Soit n un entier naturel et soient $a_1, ..., a_n \geq 0$des réels.
   On pose $A = \frac{a_1+...+a_n}{n}$ et $G = \sqrt[n]{a_1...a_n}$. Montrer que l'on a : $\frac{A}{G} = 1 + \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \int_{a_i}^G (\frac{1}{t} - \frac{1}{G})dt$
   En déduire : $G \leq A$ (inégalité arithmético-géométrique).

1.6 Continuité, TVI, analyse réelle etc.

1. soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue et strictement décroissante.
Démontrer que le système suivant a une solution unique : $\begin{cases} x = f(y) \\ y = f(z) \\ z = f(x) \end{cases}$

2. Un DS dure 180 minutes au cours desquelles un élève moyen réfléchit pendant 90 minutes. Montrer qu'il existe une période de 90 minutes au cours desquelles cet élève réfléchit durant 45 minutes exactement.

3. Existe-t-il une fonction f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ telle que$f(f(x)) = x^2 - 42$?

4. On considère la fonction f définie par : $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto arctan(x+1) - arctan(x)$
Montrer qu'il existe une fonction g définie sur $\mathbb{R}+$ vérifiant pour tout x dans $\mathbb{R}+$, $f(x) = Arctan(g(x))$.

5. Déterminer les fonctions continues sur $\mathbb{R}$ vérifiant :
$h(x+y) = h(x) + h(y)$
Déterminer les fonctions continues sur $\mathbb{R}$ vérifiant :
$h(xy) = h(x) + h(y)$

6. a. Soit (u_n) une suite vérifiant pour tout n : $|u_{n+1} - u_n| \leq \frac{1}{2^n}$.
Montrer que (u_n) converge.
b. Soit f une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ vérifiant pour tous x, y :
$||f(x) - f(y)| \leq \frac{1}{2}|x-y|$
Montrer que f admet un unique point fixe.

7. Soit f une fonction continue surjective de R+ dans R Montrer que chaque point est atteint une infinité de fois.

8. On se donne p et $n_1, ..., n_p$ des entiers naturels non nuls.
Est-il possible de trouver des réels $a_1, ..., a_p$ tels que la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f : x \to \sum_{k=1}^{p} a_k cos(n_k x)$ ne prenne que des valeurs strictement positives ?

9. f et g sont définies et continues sur $[0,1]$ à valeurs réelles.
On suppose de plus $g(x) = \int_0^x f(t)dt$ et $f(x) = \int_0^x g(t)dt$.
Montrer alors que f et g sont égales à la fonction nulle sur $[0.1]$.

10. Trouver l'ensemble des fonctions f définies de l'ensemble des réels strictement positifs dans lui-même, qui admettent une limite (réelle) en$+\infty$ et telles que: pour tout x et y strictement positifs, $f(x.f(y)) = y.f(x)$

11. (*) Soit $f : \mathbb{Q} \to \mathbb{R}$ telle que pour tous rationnels x et y, on ait : $|f(x) - f(y)| \leq |x-y|^2$. Montrer que f est constante.

12. Soit f,continue sur $\mathbb{R}$ à valeurs réelles et 1-périodique.
Démontrer :$\forall a \in]0, +\infty[, \exists c \in \mathbb{R}, f(c+a) = f(c)$

13. Trouver l'ensemble des fonctions continues f de $[0;1]$ dans $[0;1]$ telle que $\int_0^1 f(t)dt = \int_0^1 f^2(t)dt$.

14. Soit f une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, continue, telle que, pour tout réel x, on ait : $f(x) = f \circ g(x)$ où $g(x) = \frac{x}{5} + 1$ pour tout réel x.
On considère de plus la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$définie par $u_0 \in \mathbb{R}$(u_0 est un réel quelconque) et $u_{n+1} = g(u_n)$ pour tout entier $n \geq 0$.
a. En considérant l'unique réel α vérifiant $\alpha = g(\alpha)$, donner pour chaque entier naturel n, l'expression de u_n en fonction de $u_0$et de n.
En déduire que la suite (u_n) converge vers un réel l que l'on précisera.
b. Déduire de tout ce qui précède que f est constante.
c. Généraliser en trouvant les fonctions f continues de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ vérifiant $f(x) = f(qx+p)$ pour tout x réel avec $q \in [0,1[$ et $p \in \mathbb{R}$

1.7 Dérivation

1. Soit f et g deux fonctions p fois dérivables sur l'ensemble des réels. Montrer que pour tout entier $p \geq n$, $(fg)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k)} g^{(n-k)}$où $f^{(n)}$ représente la dérivée n-ème de f.

2. Conjecturer une formule pour la dérivée de la composée de n fonctions (c'est à dire $(f_{1...}f_n)$') puis la démontrer.

3. a. Sans utiliser la formule générale de la question suivante, déterminer la valeur exacte de $cos(arctan(\frac{1}{5}))$ et $sin(arctan(\frac{1}{5}))$
   b. Démontrer que pour tout réel x : $cos(arctan(x)) = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$ et $sin(arctan(x)) = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$

4. Soif f une fonction continue et bornée sur $\mathbb{R}$.
   a. On pose $\phi(x) = \int_x^{x+2} f(t)dt$. Montrer que ϕ est dérivable sur $\mathbb{R}$.
   b. Montrer que ϕ est bornée sur $\mathbb{R}$..
   c. Montrer que si f est strictement monotone sur $\mathbb{R}$., ϕ l'est aussi et varie dans le même sens que f.
   d. Montrer que si f est périodique, de période 2, alors ϕ est constante.

5. Trouver la plus grande valeur de $\sqrt[n]{n}$, pour n entier naturel non-nul.

6. Trouver le minimum de $\sqrt{a+b} * (\frac{1}{\sqrt{a}} + \frac{1}{\sqrt{b}})$ dans $(\mathbb{R}_+^*)^2$.

7. a. Quel est le plus grand sous-ensemble E de $\mathbb{R}$ pour lequel on peut dire que si $x \in E$, alors l'expression $ln(x) + \frac{1}{ln(x)}$ définit bien un nombre réel ?
On considère la fonction $f : E \to \mathbb{R}$ et sa courbe Γ dans un plan muni d'un repère orthonormé.
   b. Justifiez que f est dérivable sur Γ.
   c. Existe-t-il une tangente à Γ qui passe par l'origine du repère ? Si oui, combien ?

1.8 Limites

1. Soit$f$ une fonction définie sur $\mathbb{R}$à valeurs réelles et dérivable en $a \in \mathbb{R}$ et telle que $f(a) \neq 0$.
Trouver la limite en $+\infty$ de : $(\frac{f(a+\frac{1}{n})}{f(a)})^n$

2. Trouver la limite de $(cos(x) + sin(x))^{\frac{1}{x}}$lorsque x tend vers 0.

3. Montrer que $\frac{E(x)^{E(x)}}{x^x}$ n'admet pas de limite en l'infini.

4. Trouver la limite quand n tend vers $+\infty$de $\frac{(2n)!}{n^n(n!)}^{\frac{1}{n}}$. (Nécessite les séries de Riemann)

5. Limite de : $u_n = n.\sum_{k=1}^n \frac{1}{(k+n)^2}$

6. a. Montrer que la suite de terme général$S_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k+n}$ est convergente vers un réel que l'on notera S
   b. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}+$ par : $f(x) = \ln(1+x)$.
   On posera $\sigma_n = \sum_{k=1}^n f(\frac{1}{k+n})$; Montrer que σ_n a pour limite $f'(0).S$ quand n tend vers l'infini.
   c. En déduire la valeur de S.

7. (*) Soit f une fonction continue de $[a,b]$ dans $\mathbb{R}$ $(a < b)$.
Montrer que $lim_{n\to\infty}(\int_a^b f(t)^n dt)^{\frac{1}{n}} = sup_{x\in[a,b]}f(x)$

8. Calculer la limite de la suite $u_n = \frac{1!+2!+...+n!}{n!}$

9. Trouver la limite de $sin(\pi * (2+\sqrt{3})^n)$

10. Démontrer que $\sum_{p=0}^n \frac{(-1)^p\binom{n}{p}}{2n-p+1} \to 0$ en l'infini.

11. Soit: $u_n = \sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+...}}}}$($n$ racines), determiner si elle existe la limite de (u_n).

12. Soit (a_n) définie par $\begin{cases} a_1 = 1 \\ a_{n+1} = 1 + a_1 a_2 ... a_n \end{cases}$.
On pose $S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{a_k}$. Calculer $lim\ S_n$

13. Pour dans $n \in \mathbb{N}^*$, on note $N_n$le nombre de chiffres de l'écriture décimale de n:
N_n vaut 1 si $1 \leq n \leq 9$, 2 si $10 \leq n \leq 99$...
Déterminer la limite de : $\frac{N_n}{ln(n)}$

1.9 Suites

1. Soit la suite (a_n) définie par $a_0 = 0, a_1 = 1$ et $a_n = 2a_{n-1} + a_{n-2}$ pour $n > 1$.

2. a. Soit (u_n) une suite réelle définie par $u_0$et $u_1$tels que $u_0 < u_1$ et pour tout entier $n > 1$ par la relation $u_n = \frac{u_{n-1}+u_{n-2}}{2}$.
   b. Soit (v_n) une suite réelle définie par $v_0$et $v_1$dans $\mathbb{R}^+$ et pour tout entier par $v_n = \sqrt{v_{n-1}v_{n-2}}$
   Montrer que $(u_n), (v_n)$ convergent et calculer leurs limites.
   c. Avec la moyenne harmonique ? Et la quadratique ?

3. On appelle période d'une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$un entier p satisfaisant $x_{n+p} = x_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
Montrer que pour toute suite il existe un entier p (éventuellement nul) tel que les périodes de la suite sont exactement les multiples de p.

4. Montrer que la suite(Sn) définie par : pour tout n appartenant à N, $S_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k^2+k+1}$, est convergente et indiquer sa limite.

5. Soit U_n définie par $U_0 = \sqrt{2}$et $U_{n+1} = \sqrt{2 + U_n}$. Calculez la limite de U_n.

6. Soit $a \geq 1$.
Étudier la convergence puis la limite éventuelle des suites définies par :
$\begin{cases} u_0 = a & u_{n+1} = \frac{u_n+v_n}{2} \\ v_0 = 1 & v_{n+1} = \frac{2}{\frac{1}{u_n}+\frac{1}{v_n}} \end{cases}$

7. Soit (u_n) une suite définie par $u_0 > 0$ et $u_{n+1} = \sqrt{u_n} + \frac{1}{n+1}$. Montrer que u converge.

8. Soit (u_n) définie pour tout entier naturel par $\begin{cases} u_0 = 0 \\ u_{2n} = u_n \\ u_{2n+1} = 1 - u_n \end{cases}$
   a. Calculer u_{1990} .
   b. Déterminer les valeurs que peut prendre u_n pour tout entier naturel.
   c. Calculer $\sum_{i=0}^{1990} u_i$
   d. Déterminer le nombre d'indices $n \leq 1990$ pour lesquels $u_n = 0$.
   e. Démontrer que : $u_{2^n q} = u_q$
   f. Soit $x = (2^k - 1)^2$ avec k un entier naturel. Calculer u_x en fonction de k.

9. Soit (U_n) une suite arithmétique de raison >0.
Démontrer que si U_n admet un terme qui est un carré parfait alors U_n en admet une infinité.

10. Soit (u_n) une suite d'entiers naturels deux à deux distincts. Montrer que u_n tend vers $+\infty$.

11. Soit (U_n) la suite définie par $U_0 = 0$ et $U_{n+1} = n - U_n$ pour n entier naturel. Calculer U_n en fonction de n.

12. (Lemme de Césaro) Soit (u_n) une suite convergeant vers une limite réelle l.
Montrer que $(\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n} u_k)$ converge vers l.

13. On considère les deux suites $((1+\frac{1}{n})^n)_{n>0}$ et $(\frac{1}{(1-\frac{1}{n})^n})_{n\geq 2}$.
Après avoir précisé la monotonie de ces deux suites et avoir démontré leur convergence vers le même réel à préciser, démontrer que : $\forall n \in \mathbb{N}$, $n > 1$, $|(1+\frac{1}{n})^n - \frac{1}{(1-\frac{1}{n})^n}| \leq \frac{4}{n}$.

14. Soit $a = \sqrt{2}+1$. Montrer qu'il existe pour chaque entier naturel n, un entier $k > 0$ tel que $a^n = \sqrt{k}+\sqrt{k-1}$

15. Soit f une fonction croissante sur $\mathbb{R}$ et (u_n) une suite définie par $u_{n+1} = f(u_n)$, avec u_0 un réel. Montrer que (u_n) est monotone.

16. Trouver une suite (a_n) d'entiers positifs distincts telle que pour tout $k \in \mathbb{N}$, la suite $(a_n + k)$ ne contienne qu'un nombre fini de nombres premiers.

17. Montrer qu'à tout entier naturel n correspond une longueur $\phi(n)$ telle que pour toute suite ayant cette longueur ou plus, on peut extraire une sous-suite monotone de longueur n.

18. Etudier la suite $u_n = \frac{r(n,1)+r(n,2)+...+r(n,n)}{n^2}$ avec $r(n,k)$ le reste de la division euclidienne de n par k

1.10 Sommes et calculs inclassables

1. Montrer la divergence de la série harmonique $S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$.

2. Calculer $\sum_{k=0}^{n} cos(kx)$ et $\sum_{k=0}^{n} sin(kx)$ pour x non nul.

3. Calculer $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{2k}$

4. Calculer pour tout réel x et pour tout entier naturel n non nul la somme suivante : $\sum_{k=0}^{n} k.x^k$

5. Calculer $\prod_{k=1}^{n} cos(\frac{\theta}{2^k})$

6. Comparer e^{π}et π^e .

7. Calculer $\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{n}{2k}$

8. Soit a tel que : $\sum_{i=0}^{\infty} sin^{2k+1}(a) = 1$, calculer$tan(a)$.

9. Soit n un entier non-nul. Montrer que $\sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k+1}}{k}\binom{n}{k} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$

10. On définit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$par : $\begin{cases} x_0 = 1989 \\ x_n = -\frac{1989}{n}\sum_{k=0}^{n-1} x_k \end{cases}$.
Evaluer la somme suivante : $\sum_{k=0}^{1989} 2^k x_k$

11. Exprimer $\sqrt{1+\frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}} + \sqrt{1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}} + ... + \sqrt{1+\frac{1}{2012^2}+\frac{1}{2013^2}}$ sous forme de fraction irréductible.

12. Montrer que pour tout réel a: $1 - e^{ia} = -2i.sin(\frac{a}{2}).e^{i\frac{a}{2}}$

13. Soit a un nombre complexe de module 1 et d'argument b, b appartenant à l'intervalle $]-\pi, \pi[$.
Montrer que: $1 + a = 2.cos(\frac{b}{2}).[cos(\frac{b}{2}) + i.sin(\frac{b}{2})]$

14. Montrer que $\sum_{k=2}^{n} E(log_k(n)) = \sum_{k=2}^{n} E(\sqrt[k]{n})$ pour tout entier $n > 1$ (où E désigne la partie entière du réel x).

15. Soit $\theta = \frac{2\pi}{5}$. Montrer que $1 + 2cos(\theta) + 2cos(2\theta) = 0$.

16. Pour tous α, n entiers, on pose $s_\alpha(n) = \sum_{k=0}^{n} k^\alpha$. Que vaut $s_1(n)$?
En se servant de la question précédente, déterminer $s_2(n)$

1.11 Polynômes

1. Soit a, b et c les racines (réelles ou complexes) du polynôme $P = X^3 - X + 1$. Calculer $a^7 + b^7 + c^7$.

2. Soit P le polynôme défini par $P = (X-1)^n - (X+1)^n$avec $n \in \mathbb{N}$. Trouvez toutes les racines (réelles et complexes) de P.

3. (**) Soit P un polynôme à coefficients entiers admettant $n+1 > 2$ racines distinctes entières $(0, a_0, ..., a_{n-1})$.Trouver l'ensemble des solutions k entières telles que$P(P(k)) = 0$.

4. Soit P un polynôme de $\mathbb{Z}[X]$ tel que$P(0) = 2p + 1$ et $P(1) = 2p' + 1$ pour p' et p € Z. Démontrer que P n'admet pas de racine entière.

5. Trouver un polynome de $\mathbb{Z}[X]$ de degré 7 qui admet comme racine $\sqrt[7]{\frac{3}{5}} + \sqrt[7]{\frac{5}{3}}$.

6. Soit P un polynôme de $\mathbb{R}[X]$ de degré plus grand que 2 tel qu'il existe G un polynôme de $\mathbb{R}[X]$ tel que pour tout x réel, $P(x^2 + x + 1) = P(x)G(x)$. Montrer que G est de degré pair.

7. Trouver tous les polynômes à coefficients réels P tels que $\forall k \in \mathbb{Z}, \int_k^{k+1} P(t)dt = k + 1$

8. a. Soit $x \in \mathbb{R}$tel que $x + \frac{1}{x} \in Z$.
Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$,$x^n + \frac{1}{x^n} \in Z$
b. Déterminer un réel x non entier vérifiant la propriété$x + \frac{1}{x} \in Z$.

9. Soit $P(X) = \sum_{k=0}^{n} c_k X^k$ un polynôme à coefficients entiers de degré $n > 0$.
Démontrer que si $a = \frac{p}{q}$ $(pgcd(p, q) = 1)$ est une racine de P, alors p divise $c_0$et q divise c_n.

10. (*) Soit $n \in \mathbb{N}$ et $f \in C^0([0, 1])$ telle que: $\forall k \in [0, n] \int_0^1 x^k f(x)dx = 0$.
Montrer que f s'annule au moins $n + 1$ fois dans l'intervalle $]0, 1[$.

1.12 Combinatoire, probabilités

1. a. Soit $n \in \mathbb{N}$, combien y a-t-il de permutations de $\{1, ..., n\}$?
   b. Soit $(n,p) \in (\mathbb{N}*)^{\mathbf{2}}$, si p=n combien y a-t-il d'applications injectives de $\{1, ..., p\}$sur $\{1, ..., n\}$?
   Si p>n ? Et si p<n ?
   Notons $S_{p,n}$ le nombre de surjections de $\{1, ..., p\}$ sur $\{1, ..., n\}$.
   c. Combien vaut $S_{p,n}$ si p<n ? Si p=n ?
   On suppose maintenant $p \geqslant n$.
   d. Montrer par un raisonnement combinatoire que $S_{p,n} = n(S_{p-1,n-1} + S_{p-1,n})$.
   Que vaut $S_{p,1}$ pour un entier p quelconque ? En déduire une méthode pour générer la table des $S_{p,n}$.
   e. Si $A_1, .., A_n$ sont des ensembles, démontrer que : $\# \cup_{i=1}^{n} A_i = \sum`_{J \subset \{1,...n\}, J \neq \emptyset} (-1)^{\# J-1} . \# \bigcap_{j \in J} A_j$.
   (Astuce : penser à utiliser les fonctions caractéristiques.)
   f. En déduire une formule explicite pour $S_{p,n}$ en utilisant les ensembles A_i contenant toutes les fonctions de$\{1, ..., p\}$ dans $\{1, ..., n\}$ qui n'atteignent pas i.

2. Soit $n \in \mathbb{N}$. On note l'ensemble des permutations de $\{1, ..., n\}$. On appelle dérangement de $\{1, ..., n\}$ toute permutation σ de $\{1, ..., n\}$ telle que : $\forall i \in \{1..., n\}, \sigma(i) \neq i$.
On note D_n l'ensemble des dérangements de$\{1, ..., n\}$.
   a. Soit $i_0 \in \{1, ..., n\}$.
   Soit A_{i_0} l'ensemble des permutations de $\{1, ..., n\}$ qui laissent fixe i_0. Quel est le cardinal de A_{i_0}?
   b. Définir le complémentaire de D_n dans S_n .
   c. Montrer que ce complémentaire peut être défini comme la réunion d'une famille de n parties de S_n.
   d. En déduire le cardinal d_n de D_n.
   e. Calculer $lim \frac{d_n}{n!}$.

3. Quelle est la probabilité que dans un groupe de $n > 1$ personnes, au moins deux personnes aient la même date d'anniversaire ?

4. Soient n, p des entiers naturels.
Dénombrer l'ensemble : $\{(k_0, ..., k_n) \in \{1, ..., p-n+2\}^{n+1} / k_0 + ... + k_n = p+2\}$

5. On dispose d'un certain nombre d'éclairs, soit au chocolat, soit à la vanille. Il se trouve que la probabilité d'avoir des éclairs de même parfum est 1/2, lorsqu'on en tire deux au hasard.
Que dire du nombre d'éclairs de chaque sorte ?

6. Soit n un entier naturel non nul et $x_1, ..., x_n$des réels. Etant donnée une variable aléatoire X prenant les valeurs $x_1, ..., x_n$, on note $p_1 = p(X = x_1), ..., p_n = p(X = x_n)$. On définit alors une fonction Δ en posant $\Delta(x) = \sum_{i=1}^{n} p_i(x_i - x)^2$ pour tout réel x. Démontrer que possède un minimum sur $\mathbb{R}$ et identifier, en termes "probabilistes", le réel où elle l'atteint ainsi que sa valeur.
Que deviennent ces résultats si on définit la fonction $\triangle$ en posant
$\triangle(x) = \sum_{i=1}^{n} p_i |x_i - x|$ pour tout réel x ?
Comment adapter cet énoncé si on supposait que X était une variable aléatoire à densité sur l'intervalle $[0, 1]$?

7. Au début, chacune des six boîtes $B_1, B_2 B_3, B_4, B_5, B_6$contient un jeton. Deux types d'opérations sont possibles :
-Type 1 : Choisir une boîte non vide B_j avec $1 \leq j \leq 5$; ôter un jeton de la boîte B_j et ajouter deux jetons dans la boîte B_{j+1}
-Type 2 : Choisir une boîte non vide B_j avec $1 \leq j \leq 4$; ôter un jeton de la boîte B_j et échanger les contenus des boîtes (éventuellement vides) B_{j+1} et B_{j+2} .
Montrer qu'il est possible, à la suite d'un nombre fini de telles opérations, que les boîtes $B_1, B_2 B_3, B_4, B_5$ soient vides et que la boîte B_6 contienne $2010^{2010^{2010}}$jetons.

8. Soit une f bijection de $\mathbb{N}$ dans lui-même. Montrer qu'il existe trois entiers naturels a, b et c tels que $a < b < c$ et $f(b) = \frac{f(a)+f(c)}{2}$

9. Deux personnes se donnent rendez vous entre 16h et 17h. Seulement elles ne se sont pas précisé d'heure précise dans cette intervalle. Ces deux personnes peuvent donc arriver n'importe quand dans cette intervalle de temps. Si une personne arrive avant l'autre elle attendra 15 min et repartira . Quelle est la probabilité pour que les deux personnes ne se rencontrent pas ?

10. Un roi, qui veut donner un banquet, a fait sortir de sa cave 1000 bouteilles. Son espion en chef apprend que l'une de ces 1000 bouteilles a été empoisonnée. Heureusement, il peut faire goûter à des rats le vin, et si un rat goute du vin empoisonné, il meurt le lendemain matin. Quel est le nombre minimum de rats nécessaire pour déterminer quelle est la bouteille empoisonnée, sachant que le banquet a lieu demain soir?

11. a. Calculer pour tout entier $n > 0$, $I_n = \int_0^1 \frac{x^{n-1}}{1+x^n} dx$
    b. Soit $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. Soient β un nombre réel et p l'application de Ω dans $\mathbb{R}$ définie par : $p(n) = n^2.\beta.I_n$, pour tout $n \in \Omega$.
    Déterminer β pour qu'il existe une probabilité P telle que, pour tout $n \in \Omega$, on ait $P(\{n\}) = p(n)$.

1.13 Géométrie

1.13.1 Nombres complexes

1. On considère un plan complèxe et trois points A,B et C d'affixes respectivement, a, b et c. (différents deux à deux) .
Démontrez que le triangle ABC est équilateral si et seulement si $a^2 + b^2 + c^2 = ab + ac + bc$

2. (*) Soient $z_1, ..., z_n$ des complexes vérifiant $\forall(i, j) \in \{1, ..., n\}^2, (i \neq j \implies |z_i - z_j| \geq 2$. On considère un disque de rayon R contenant les . Montrer que $R \geq \sqrt{2\frac{n-1}{n}}$

3. Soit $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}-$. Montrer que $arg(z) = 2 * arctan(\frac{Im(z)}{|z|+Re(z)})$
Donner l'interprétation géométrique associée.

4. Montrer qu'il existe une infinité de triplets (a, b, c)de $\mathbb{C}^3$ verifiant: $|a| = |b| = |c|$ et $a + b + c = 0$

1.13.2 Géométrie du plan et de l'espace

1. On colorie chaque point du plan en rouge ou en bleu. Montrer que l'on peut trouver un triangle équilatéral dont tous les sommets sont de la même couleur.
Même chose pour un rectangle.

2. On colorie l'ensemble des points du plan avec deux couleurs, prouver :
    a. Qu'étant donnée une distance d, on peut trouver deux points de même couleur à la distance d.
    b. Que pour l'une des deux couleurs quelle que soit la distance d, on peut trouver un couple de points de cette couleur distants de d.

3. On travaille dans le plan usuel muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$. Soit A le point de coordonnées $(-1, 1)$. Soit C le cercle d'équation $x^2 + y^2 = 2x$. Trouver l'équation de toutes les tangentes de C passant par A.

4. Les Triplets pythagoriciens :
On appelle triplet Pythagoricien tout triplet (X, Y, Z) d'entiers naturels tels que $X^2 + Y^2 = Z^2 (*)$.
On appelle solution primitive une solution (x, y, z) formée de 3 entiers premiers entre eux dans leur ensemble (On généralise le concept de PGCD de deux entiers à celui de n entiers)

a. Montrer que si (x, y, z) est une solution primitive, alorsx, y et z sont premiers entre eux deux à deux.
b. Approche géométrique : En divisant les deux membres de $(*)$ par Z^2 nous nous ramenons à l'équation $(**)$ suivante : $x^2 + y^2 = 1$ avec x,y deux rationnels.
En définissant le repère usuel du plan (O, i, j), il s'agit donc de trouver tous les points rationnels du cercle unité
(C), i.e tous les points dont les deux coordonnées sont rationnelles.
Soit $A(-1, 0) \in C$
Montrer que si M est un point rationnel de , la droite (AM) a un coefficient directeur rationnel.
c. Soit D_m la droite passant par A et de coefficient directeur m.
- Etudier l'intersection de D_m et de C
- Montrer que si $m \in \mathbb{Q}$, la droite D_m coupe C en A et en un point M qui est rationnel
d. Déterminer une formule générale des solutions de $(*)$.

5. Un cube d'arête n cm est peint, puis découpé en n^3 petits cubes d'arête 1 cm. Ainsi certains de ces petits cubes n'ont aucune face peinte, d'autres en ont une, deux ou trois. Pour quel nombre n le nombre de cubes qui n'ont pas de face peinte est-il égal à celui des cubes qui n'ont qu'une seule face peinte ?

6. On dispose d'une boite à sucre au format 10x10x10. Combien de sucres au format 1x2x4 peut-on mettre dans cette boîte ? (sans les casser bien sûr)

7. Calculer le nombre de diagonales d'un polygone convexe à n sommets.

8. Soit une sphère dont la surface est entièrement peinte en blanc initialement. Puis un jour on décide de peindre 12.49% de cette surface en rouge. Montrer qu'il existe un parallélépipède rectangle inscrit dans la sphère dont tous les sommets sont blancs.

9. Soit P un pan muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$

a. Montrer que les cercles (C_1) et (C_2) d'équations respectives $x^2 + y^2 - 100 = 0$ et $x^2 + y^2 - 24x - 18y + 200 = 2$ sont tangents.
b. Trouver les cercles tangents à (C_1) et (C_2) en leur point de contact et tangents à l'axe des ordonnées.

10. Dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$, on note Γ la courbe de la fonction logarithme népérien.
Soit A un point situé sur l'axe des ordonnées.
Démontrer que parmi les points M appartenant à la courbe Γ , il en existe un seul qui rend minimale la distance AM . On le note M_0 .
Démontrer que la tangente à la courbe Γ au point M_0 est perpendiculaire à la droite (AM_0).

11. Un tronc d'arbre idéal descend un canal d'un mètre de large, lui aussi idéal. Un virage à angle droit se présente. Quelle longueur ne doit pas dépasser le morceau de bois pour passer le virage ?

12. Dans le plan muni d'un repère orthonormé, on considère trois points P, Q, R. Si dans ce repère le vecteur $\vec{PQ}$ est de coordonnées (x, y) et si le vecteur $\vec{PR}$ est de coordonnées (x', y'), on peut démontrer que l'aire du triangle PQR est égale à $\frac{1}{2}|xy' - yx'|$.
On note Γ la courbe de la fonction carré dans ce plan. Soient A, B deux points de Γ. La parallèle à l'axe des ordonnées passant par le milieu du segment $[A, B]$ coupe Γ en un point noté C.
La parallèle à l'axe des ordonnées
passant par le milieu du segment $[A, C]$ coupe Γ en un point noté D et celle passant par le milieu de $[BC]$ la coupe en un point noté E.

a. Démontrez que les aires des triangles ACD et BCE sont toutes deux égales au huitième de l'aire du triangle ABC.
b. En déduire géométriquement la valeur de $\int_0^1 x^2 dx$

13. Dans le plan muni d'un repère orthonormé, considérons la courbe Γ d'équation $y = x^2$. On relie par une droite chaque point de Γ d'abscisse égale à un entier naturel supérieur ou égal à 2 à chaque point de Γ d'abscisse égale à un entier relatif inférieur ou égal à -2. Que constater sur l'axe des ordonnées ?

14. Etant donnée une fonction réelle f définie sur $\mathbb{R}$ qui est dérivable sur $\mathbb{R}$ et dont la fonction dérivée f' est continue sur $\mathbb{R}$, on considère Γ, sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthonormé d'origine O. On note A le point de Γ dont l'abscisse est égale à 1. On appelle longueur d'arc de Γ de O à A le réel $\int_0^1 \sqrt{1+(f'(x))^2}dx$.
Calculer la longueur d'arc de O à A de la fonction carré.

15. Dans le plan muni d'un repère orthonormé, on considère la courbe Γ d'équation $y = x^2$. Pour chaque droite d parallèle à l'axe des ordonnées, on note M son point d'intersection avec la courbe Γ . La droite passant par M perpendiculaire à la tangente à Γ au point M s'appelle la normale àΓ au point M.
On considère enfin les droites d', symétriques des droites d par rapport à la normale à Γ en M.
Démontrer que toutes les droites d' ainsi obtenues sont concourantes.

2 Corrections

Pour obtenir les corrections, taper des mots-clefs des énoncés dans la barre de recherche du topic, les corrections suivront (généralement).

Exercices compilés par lsjduejd.