I. Classification des isométries

1) Activité :
Dans le plan orienté, on considère trois points A, B et C d'images respectives A', B' et C' par une isométrie f.

a) Exprimer $\cos(\widehat{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}})$ en fonction de AB, AC et $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$.

b) Exprimer $\cos(\widehat{\overrightarrow{A'B'}, \overrightarrow{A'C'}})$ en fonction de A'B', A'C' et $\overrightarrow{A'B'}.\overrightarrow{A'C'}$.

c) En déduire l'égalité :

$$\cos(\widehat{\overrightarrow{A'B'}, \overrightarrow{A'C'}}) = \cos(\widehat{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}})$$

Que peut on conclure pour $(\widehat{\overrightarrow{A'B'}, \overrightarrow{A'C'}})$ et $(\widehat{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}})$?

2) Définition :
Soit f une isométrie du plan.
- f est un déplacement si et seulement elle conserve les mesures des angles orientés.
- f est un antidéplacement si et seulement elle transforme les mesures des angles orientés en leurs opposées

3) Application :
a) Etant donnés quatre points A, B, C et D deux à deux distincts d'images respectives A', B', C' et D' par une isométrie f.

Comparer $(\widehat{\overrightarrow{A'B'}, \overrightarrow{C'D'}})$ et $(\widehat{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}})$ dans chacun des cas suivants :
* $f = S_\Delta$ * $f = R_{(I,\alpha)}$ * $f = t_{\vec{u}} o S_\Delta$

b) Compléter le tableau suivant :

f	Déplacement	antidéplacement
Rotation		
Symétrie orth		
Translation		
Symétrie gliss		

4) Récapitulation :

Un déplacement	Un antidéplacement
➢ Est la composée d'un nombre pair de symétries orthogonales	➢ Est la composée d'un nombre impair de symétries orthogonales
➢ Se ramène à la composée de deux symétries orthogonales	➢ Se ramène à la composée de trois symétries orthogonales
➢ Transforme tout repère orthonormé direct en un repère orthonormé direct	➢ Transforme tout repère orthonormé direct en un repère orthonormé indirect
➢ Conserve les mesures des angles orientés	➢ Transforme les mesures des angles orientés en leurs opposées
➢ Est une translation ou une rotation	➢ Est une symétrie orthogonale ou une symétrie glissante

la suite est constante

II. Angle d'un déplacement

1) Activité
Soient A et B deux points distincts d'images respectives A' et B' par un déplacement f. On pose $\theta \equiv (\widehat{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{A'B'}})[2\pi]$ et on se propose de démontrer que θ ne dépend que de f non pas du choix de A et B.
Soient C et D deux points distincts d'images respectives C' et D' par f.
Etablir l'égalité :
$(\widehat{\overrightarrow{CD}, \overrightarrow{C'D'}}) \equiv (\widehat{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{A'B'}})[2\pi]$
Conclure.

Commentaire :
L'angle $(\widehat{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{A'B'}})$ est appelé angle du déplacement f. Toute mesure θ de $(\widehat{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{A'B'}})$ est dite angle de f.

2) Application :

Préciser l'angle du déplacement f dans chacun des cas suivants :

* $f = t_{\vec{u}}$ * $f = R_{(I,\alpha)}$ * $f = S_I$ * $f = id_P$

3) Théorème:

- La composée de deux déplacements et un déplacement d'angle la somme des angles.
- La réciproque d'un déplacement d'angle α est un déplacement d'angle $(-\alpha)$

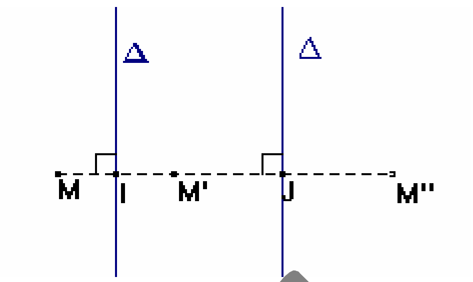
Justifier les résultats précédents

III. Décomposition d'un déplacement

1) Translation :

Activité N°1

On considère deux droites parallèles Δ et Δ' et un point M du plan.
On pose $M' = S_\Delta(M)$ et $M'' = S_{\Delta'}(M')$.



a) Préciser $S_{\Delta'} o S_\Delta(M)$

b) On désigne par I et J les milieux respectifs des segments [MM'] et [M'M''].
Exprimer $\overrightarrow{MM''}$ en fonction de $\overrightarrow{IJ}$.

c) Montrer que le vecteur $2\overrightarrow{IJ}$ ne dépend pas du choix du point M.
Conclure

Retenons : Si $\Delta // \Delta'$ alors $S_{\Delta'} o S_\Delta = t_{2\overrightarrow{IJ}}$ où I est un point quelconque de Δ et J est son projeté orthogonale sur Δ'.

Activité N°2

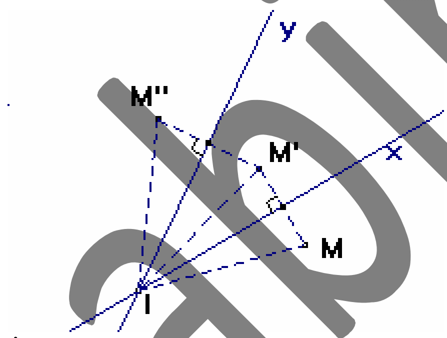
Etant donné un vecteur $\vec{u}$, en s'inspirant du résultat précédent déterminer une décomposition de la translation de vecteur $\vec{u}$ en deux symétrie orthogonales. Cette décomposition est elle unique ?

Retenons : Toute translation $t_{\vec{u}}$ se décompose, d'une infinité de manières, en deux symétries orthogonales $S_{\Delta'} o S_\Delta$ où Δ est une droite arbitraire vérifiant $\vec{u} \perp dir(\Delta)$ et $\Delta' = t_{\frac{1}{2}\vec{u}}(\Delta)$

2) Rotation :

Activité N°1

On considère deux droites (Ix) et (Iy) sécantes en un point I et un point M du plan.
On pose $M' = S_{(Ix)}(M)$ et $M'' = S_{(Iy)}(M')$



la suite est constante

a) Etablir l'égalité: IM = IM''

b) Exprimer $(\widehat{\overrightarrow{IM}, \overrightarrow{IM''}})$ en fonction de $(\widehat{\overrightarrow{Ix}, \overrightarrow{Iy}})$

c) Conclure.

Retenons : $\mathbf{S_{(Iy)} o S_{(Ix)} = R_{(I,\, 2(\widehat{\overrightarrow{Ix}, \overrightarrow{Iy}}))}}$

Activité N°2

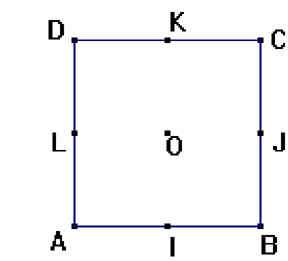
Etant donnés un point I et un réel α, en s'inspirant du résultat précédent déterminer une décomposition de la rotation de centre I et d'angle α en deux symétrie orthogonales. Cette décomposition est elle unique ?

Retenons : Toute rotation $R_{(I,\alpha)}$ se décompose, d'une infinité de manières, sous la forme
$R_{(I,\alpha)} = S_{(Iy)} o S_{(Ix)}$ avec $(\widehat{\overrightarrow{Ix}, \overrightarrow{Iy}}) \equiv \frac{\alpha}{2} [\pi\ ]$

Exercice:

1) Déterminer la forme réduite de $S_{(JL)} o S_{(AB)}$, $S_{(AC)} o S_{(AB)}$, $S_{(JK)} o S_{(AD)}$ $S_{(JL)} o S_{(AB)} o S_{(AD)}$ et $S_{(BD)} o S_{(AB)}$

2) Décomposer en deux symétries orthogonales : $R_{(A,\pi/2)}$, $t_{\overrightarrow{AB}}$, S_O



3) Classification des déplacements

Soit f un déplacement ; Δ et Δ' deux droites tel que $f = S_{\Delta} o S_{\Delta'}$. Le tableau suivant détermine la nature, l'angle et l'ensemble des points invariants par f suivant la position relative de Δ et Δ'.

Position relative de Δ et Δ'	Nature de f	Angle de f	Ensemble des points invariants
$\Delta = \Delta'$	Identité	$2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$	Le plan P
$\Delta // \Delta'$ et $\Delta \neq \Delta'$	Translation de vecteur non nul	$2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$	Φ
$\Delta \perp \Delta'$ et $\Delta \cap \Delta' = \{I\}$	S_I	$\pi + 2k\pi$ $k \in \mathbb{Z}$	$\{I\}$
$\Delta \cap \Delta' = \{I\}$ et $(\widehat{\vec{u}_{\Delta}, \vec{u}_{\Delta'}}) \equiv \alpha\ [\pi]$	$R_{(I, 2\alpha)}$	$2\alpha \neq 2k\pi$	$\{I\}$

IV. Détermination d'une isométrie

Activité

Soient A, B, A' et B' quatre points du plan vérifiant: AB = A'B' et AB ≠ 0.

1) On désigne par α une mesure de l'angle $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{A'B'})$ et par R la rotation de centre A et d'angle α.

a) On pose C = R(B). Montrer que ACB'A' est un parallélogramme .

b) En déduire f(A) et f(B) où $f = t_{\overrightarrow{AA'}} oR$.

c) On suppose qu'il existe un autre déplacement f 'tel que f '(A) = A'et f '(B) = B' et on pose $\varphi = f' o f^{-1}$

Déterminer φ(A) et φ(B).

En déduire que f ' = f.

2) On pose $g = S_{(A'B')} o f$

a) Quelle est la nature de g ?

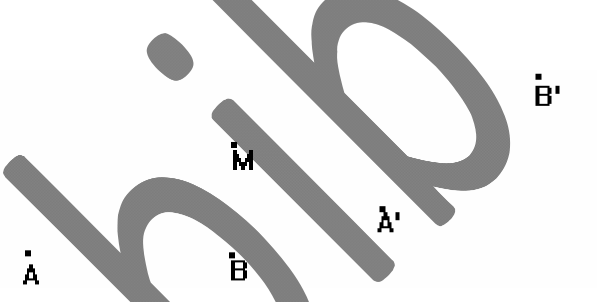
b) Déterminer g(A) et g(B).

c) Montrer que g est l'unique antidéplacement qui envoie A en A' et B en B'.

Théorème :
Si A, B, A' et B' sont quatre points du plan vérifiant : AB = A'B' & AB ≠ 0 alors
- Il existe un unique déplacement f vérifiant f(A) = A' et f(B) = B'.
- Il existe un unique antidéplacement g vérifiant : g(A) = A' et g(B) = B'.

__N.B :__ Le théorème précédent prouve les assertions suivantes :
- Un déplacement est parfaitement déterminé par son action sur deux points distincts.
- Un antidéplacement est parfaitement déterminé par son action sur deux points distincts.

Exercice N°1:
On considère les points suivants :



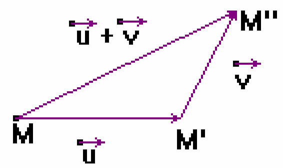
a) Construire le point M' image du point M par le déplacement f qui transforme A en A' et B en B'.

b) Construire le point M'' image du point M par l'antidéplacement g qui transforme A en A' et B en B'.

V. Composition des isométries :

1) Translations

On rappelle que : $t_{\vec{u}} o t_{\vec{v}} = t_{\vec{v}} o t_{\vec{u}} = \ldots\ldots$



2) Rotations de même centre

On rappelle que : $R_{(I, \alpha)} o R_{(I, \beta)} = \ldots\ldots..$