Exercice n°1 :

Soit la fonction f définie sur IR_+ par : $f\left(x\right)=\dfrac{1}{1+\sqrt{x}}$.

1) a) Dresser le tableau de variation de f.
   b) Montrer que f réalise une bijection de IR_+ sur un intervalle J à déterminer.
   c) Déterminer $f^{-1}\left(x\right)$ pour tout $x\in J$.
2) Montrer que l'équation f(x) = x admet une solution unique α dans IR_+ et que $\alpha\in\left]\dfrac{1}{2},1\right[$.
3) On considère la suite U définie sur IN par : $\begin{cases} U_0=1 \\ U_{n+1}=f\left(U_n\right) \text{ pour tout } n\in IN \end{cases}$
   a) Montrer que pour tout $n\in IN$ $\dfrac{1}{2}\le U_n\le 1$.
   b) Montrer que pour tout x et y dans $\left[\dfrac{1}{2},1\right]$, $\left|f\left(x\right)-f\left(y\right)\right|\le\dfrac{\sqrt{2}}{2}\left|x-y\right|$.
   c) En déduire que pour tout $n\in IN, \left|U_{n+1}-\alpha\right|\le\dfrac{\sqrt{2}}{2}\left|U_n-\alpha\right|$.
   d) Prouver que pour tout $n\in IN, \left|U_n-\alpha\right|\le\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)^n\left|U_0-\alpha\right|$. En déduire $\lim\limits_{n\to+\infty}U_n=\alpha$.

Exercice n°2 :

Soit f la fonction définie sur $\left[0,+\infty\right[$ par : $f\left(x\right)=2-\dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}$.

1) Montrer que f réalise une bijection de $\left[0,+\infty\right[$ sur un intervalle J à préciser. Tracer C_f.
2) Déterminer $f^{-1}\left(x\right)$ pour tout $x\in J$. Tracer $C_{f^{-1}}$.
3) a) Montrer que l'équation f(x) = x admet une solution unique α dans $\left]0,+\infty\right[$. Vérifier que $\alpha\in\left]1,2\right[$.
4) b) En déduire la position relative de C_f par rapport à $\Delta: y=x$.
5) Soit la suite $\left(U_n\right)$ définie sur IN par : $\begin{cases} U_0=0 \\ U_{n+1}=f\left(U_n\right) \text{ pour tout } n\in IN \end{cases}$
   a) Montrer que pour tout $n\in IN$ $0\le U_n\le\alpha$.
   b) Montrer que pour tout n de IN $\left(U_n\right)$ est croissante.
   c) En déduire que $\left(U_n\right)$ est convergente et déterminer sa limite.

Exercice n°3 :

On considère la fonction f définie sur $\left]0,\dfrac{\pi}{2}\right[$ par : $f\left(x\right)=\dfrac{\sqrt{\sin 2x}}{\sin x}$.

1) Etudier la dérivabilité à gauche en $\dfrac{\pi}{2}$.
2) Montrer que f dérivable sur $\left]0,\dfrac{\pi}{2}\right[$ et calculer f'(x) pour tout $x\in\left]0,\dfrac{\pi}{2}\right[$.

3) Montrer que f réalise une bijection de $\left]0,\frac{\pi}{2}\right[$ à un intervalle J à préciser.

4) Montrer que f^{-1} dérivable sur J et que pour tout $x\in J$ $f^{-1}(x)=\frac{-4x}{4+x^4}$.

5) Pour tout x>0 on pose $g(x)=f^{-1}\left(\sqrt{2x}\right)+f^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)$.

a) Calculer $f^{-1}\left(\sqrt{2}\right)$.

b) Montrer que g est dérivable sur J et calculer g'(x).

c) Montrer que pour tout $x\in J$ $g(x)=\frac{\pi}{2}$.

Exercice n°4 :

Soit la fonction f définie sur $]-1,1[$ par : $f(x)=\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$

1) a) Montrer que f réalise une bijection de $]-1,1[$ sur IR.

2) b) Tracer (C_f) et $(C_{f^{-1}})$.

3) a) Montrer que pour tout $x\in]0,1[$ $f(x)\geq x$.

4) b) En déduire que pour tout $x\in]0,+\infty[$ $f^{-1}(x)\leq x$.

5) Soit la suite (U_n) définie sur IN par : $\begin{cases} U_0=0 \\ U_{n+1}=g^{-1}(U_n) \text{ pour tout } n\in IN \end{cases}$

Avec g est la restriction de f sur]0,1[.

a) Montrer que pour tout $n\in IN$ $0\leq U_n\leq\frac{3}{4}$.

b) Montrer que U est décroissante.

c) En déduire que U est divergente et calculer sa limite.

4) Expliciter $g^{-1}(x)$ pour tout $x\in IR$

Exercice n°5 :

Soit la fonction f définie sur I=]0,1[par : $f(x)=\frac{2x-1}{\sqrt{x-x^2}}$. On désigne par (C_f) la courbe représentative de f dans un repère $(O,\vec{i},\vec{j})$.

1) a) Montrer que f est dérivable sur I et que pour tout x de I $f'(x)=\frac{1}{2\left(\sqrt{x-x^2}\right)^3}$.

b) Dresser le tableau de variation de f.

2) a) Déterminer f "(x) et montrer que (C_f) admet un point d'inflexion I au point d'abscisse $\frac{1}{2}$.

b) Ecrire l'équation de la tangente T à (C_f) au point I.

c) Tracer (C_f) et T.

3) a) Montrer que f réalise une bijection de I sur un intervalle J à préciser.

b) Tracer la courbe (C') de f^{-1}.

4) Soit h la fonction définie sur $\left]0,\frac{\pi}{2}\right[$ par : $h(x)=\frac{1}{2}f\left(\cos^2 x\right)$.

5) a) Montrer que pour tout $x \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$; $\mathrm{h}(x) = \operatorname{cotan}(2x)$.

b) Montrer que h réalise une bijection de $\left]0, \frac{\pi}{2}\right[$ sur IR.

6) a) Soit ψ la fonction réciproque de h . Calculer $\psi(0); \psi(1)$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} \psi(x)$.

b) Montrer que ψ est dérivable sur IR et que pour tout x de IR ; $\psi'(x) = -\dfrac{1}{2(1+x^2)}$.

c) Montrer que pour tout x>0 , $\psi(x) + \psi\left(\dfrac{1}{x}\right) = \dfrac{\pi}{4}$.

7) On considère la suite V définie sur IN^* par : $\mathrm{V}_n = \dfrac{1}{n+1} \sum\limits_{k=0}^{n} \psi\left(\dfrac{1}{n+k}\right)$.

a) Montrer que pour tout $n \in \mathrm{IN}^*$ et pour tout $\mathrm{k} \in [0, n] : \psi(2\mathrm{n}) \leq \psi(\mathrm{n+k}) \leq \psi(\mathrm{n})$.

b) En déduire que $\dfrac{\pi}{4} - \psi(\mathrm{n}) \leq \mathrm{V}_n \leq \dfrac{\pi}{4} - \psi(2\mathrm{n})$

c) Montrer que V est converge et déterminer sa limite.

Exercice n°6 :

On considère l'application f définie sur $]0,4[$ par: $\mathrm{f}(x) = \dfrac{2x-4}{\sqrt{4x-x^2}}$, on désigne par C_f sa courbe dans un repère orthonormé $(\mathrm{O}, \vec{\mathrm{i}}, \vec{\mathrm{j}})$.

1) a) Etudier les variations de f.

b) Montrer que f est une bijection de]0,4[sur IR.

c) Soit g la fonction réciproque de f. Montrer que pour tout x de IR $g(x) = 2 + \dfrac{2x}{\sqrt{x^2+4}}$.

2) Montrer que l'équation f(x)=x admet dans]0,4[une solution unique $\alpha > 2$

3) a) Déterminer une équation de la tangente T à C_f au point d'abscisse 2.

b) Etudier la position de C_f par rapport à T. Tracer C_f , T et la courbe C' représentant g.

4) On considère la suite (U_n) définie sur IN par : $\begin{cases} \mathrm{U}_0 > \alpha \\ \mathrm{U}_{n+1} = g(\mathrm{U}_n) \text{ pour tout } n \in \mathrm{IN} \end{cases}$

a) Démontrer que pour tout $n \in IN$ $\mathrm{U}_n \geq \alpha$.

b) Déterminer graphiquement le signe de g(x)-x.

c) En déduire le sens de variation de (U_n).

d) Montrer que la suite (U_n) admet une limite ℓ que l'on précisera.

5) Soit la fonction h définie sur un intervalle E= $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ par : $h(x) = \dfrac{2}{g[2tg(x)]}$; $h\left(-\dfrac{\pi}{2}\right) = \dfrac{1}{2}$.

a) Montrer que pour tout $x \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right], h(x) = \dfrac{1}{1+\sin x}$.

b) Montrer que h réalise une bijection de E sur un intervalle J à préciser. Déterminer $\mathrm{h}^{-1}(2)$ et $\mathrm{h}^{-1}(2+\sqrt{2})$.

c) Etudier la dérivabilité de h^{-1} sur J puis déterminé sa fonction dérivée .