Géometrie dans l'espace

I / RAPPELS SUR LES PRODUIT SCALAIRE

Définition : Produit scalaire A, B et C sont trois points de l'espace.

- *Si* $\overrightarrow{AB} = \vec{O}$ ou $\overrightarrow{AC} = \vec{O}$ *alors* $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = 0$
- *Si* $\overrightarrow{AB} \neq \vec{O}$ et $\overrightarrow{AC} \neq \vec{O}$ *alors* $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = AB.AC.\cos\widehat{BAC}$

Proprietés $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ sont trois vecteurs de l'espace.

1/ $\vec{u}.\vec{v} = \vec{v}.\vec{u}$

2/ $\vec{u}.(\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u}.\vec{v} + \vec{u}.\vec{w}$

3/ $(a\vec{u}).(b\vec{v}) = (ab) \times [\vec{u}.\vec{v}]$ avec $(a,b) \in IR^2$

4/ $\mathcal{B}$ est une base orthonormée de l'espace.

Si $\vec{u}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}_{\mathcal{B}}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}_{\mathcal{B}}$ *alors*

a) $\vec{u}.\vec{v} = xx' + yy' + zz'$

b) $\|\vec{u}\| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$.

c) $\vec{u} \perp \vec{v} \iff xx' + yy' + zz' = 0$.

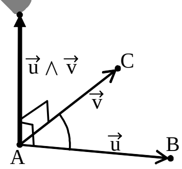
II/ Produit vectoriel

Définition : Produit vectoriel

$\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont deux vecteurs.

- *Si* $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires *alors* $\vec{u} \wedge \vec{v} = \vec{O}$
- *Si* $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires *alors* $\vec{u} \wedge \vec{v}$ est le vecteur tel que

$$\begin{cases} \|\vec{u} \wedge \vec{v}\| = AB.AC.\sin\widehat{BAC} \text{ avec } \vec{u} = \overrightarrow{AB} \text{ et } \vec{v} = \overrightarrow{AC} \\ \left(\vec{u},\ \vec{v},\ \vec{u} \wedge \vec{v}\right) \text{ est une base } \textbf{orthogonale directe} \end{cases}$$



Proprietés

$\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ sont trois vecteurs.

- $\vec{u} \wedge \vec{v} = -\vec{v} \wedge \vec{u}$.
- $(\alpha\vec{u}) \wedge (\beta\vec{v}) = (\alpha\beta).(\vec{u} \wedge \vec{v})$ pour tout (α, β) de IR^2.
- $(\vec{u} \wedge \vec{v}).\vec{w} = \vec{u}.(\vec{v} \wedge \vec{w}) = (\vec{w} \wedge \vec{u}).\vec{v}$

Théerème *(Produit vectoriel dans un R.O.N.D.)*

$\mathfrak{B} = \left(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\right)$ est une base orthonormée directe.

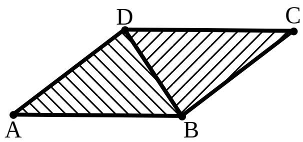
- $\vec{i} \wedge \vec{j} = \vec{k}$, $\vec{i} \wedge \vec{k} = -\vec{j}$ et $\vec{j} \wedge \vec{k} = \vec{i}$
- *si* $\vec{u}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}_{\mathfrak{B}}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} a' \\ b' \\ c' \end{pmatrix}_{\mathfrak{B}}$ *alors*

$$\vec{u} \wedge \vec{v} = \begin{vmatrix} b & b' \\ c & c' \end{vmatrix}\vec{i} - \begin{vmatrix} a & a' \\ c & c' \end{vmatrix}\vec{j} + \begin{vmatrix} a & a' \\ b & b' \end{vmatrix}\vec{k}$$

Théerème (**Aire d'un parallélogramme - d'un triangle**)

Aire du parallélogramme ABCD est $\left\|\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AD}\right\|$

Aire du triangle ABD est $\frac{1}{2}\left\|\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AD}\right\|$



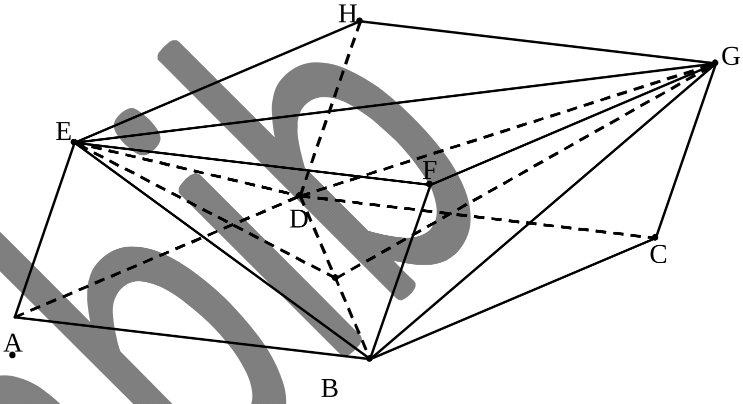
Théerème *(Volume : parallélépipède - tétraèdre)*

Le *volume* V du parallélépipède ABCDEFGH est

$$V = \left|\left(\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AD}\right).\overrightarrow{AE}\right| = \left|\text{dét}\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE}\right)\right|$$

Le *volume* V' du tétraèdre ABDE est

$$V' = \frac{1}{6}\left|\left(\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AD}\right).\overrightarrow{AE}\right| = \frac{1}{6}\left|\text{dét}\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE}\right)\right|$$



III/ Droies - Plans - Sphères

Rappel *(Distance d'un point à un plan)*

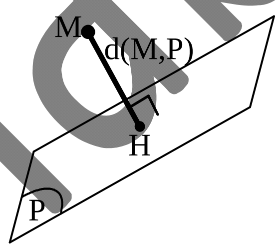
Le plan P est muni d'un repère orthonormé.

Soit un plan P : $ax + by + cz + d = 0$ où

$(a, b, c; d) \in IR^4$ et $(a, b, c) \neq (0, 0, 0)$.

On a, par définition : pour tout $M(x_M; y_M; z_M)$

$$d(M;\ P) = \frac{|ax_M + by_M + cz_M + d\ |}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}.$$



Sphère et plans:

<u>Sphère S de centre A et de rayon R</u> : $M \in S \Leftrightarrow AM = R$.

l'équation $x^2 + y^2 + z^2 + ax + by + cz + d = 0$ et on pose $h = (a^2 + b^2 + c^2 - 4d) / 4$.

si $h < 0$ l'ensemble est le vide , si $h = 0$ l'ensemble est un point $A(-\frac{a}{2}, -\frac{b}{2}, -\frac{c}{2})$ et si $h > 0$ l'ensemble est la sphère de centre A et rayon $\sqrt{h}$.

<u>Equation cartésienne d'une sphère de centre A (x_0 , y_0 , z_0) et de rayon R</u> .

$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 = R^2$

<u>Théorème</u> Soit S une sphère de rayon R et de centre A . Soit un plan P , d la distance de A à P et H le projeté orthogonal de A sur P . si $d > R$ l'intersection est le vide , si $d = R$ l'intersection est le singleton $\{ H \}$ et si $d < R$ l'intersection est un cercle de centre H et de rayon $r = \sqrt{R^2 - d^2}$.