

Diffraction par un objet (que se passe t-il quand de la lumière cohérente rencontre un objet)

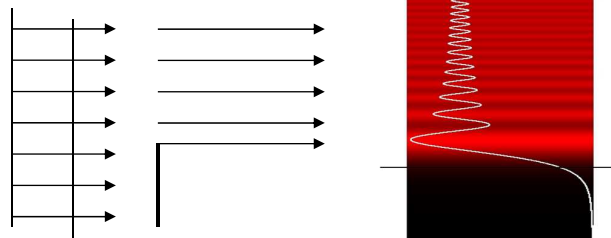
1



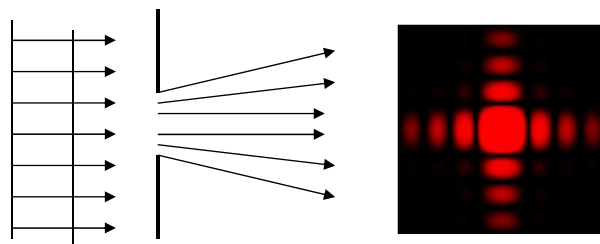
Diffraction : observation

Un objet opaque éclairé par un **rayonnement cohérent** (spatial et temporel) projette une ombre complexe faite de parties sombres et claires très différentes de ce qui prédit les lois de l'optique géométrique.

Par exemple un bord d'écran éclairé par un laser



Trou rectangulaire éclairé par un laser . Observation loin du trou

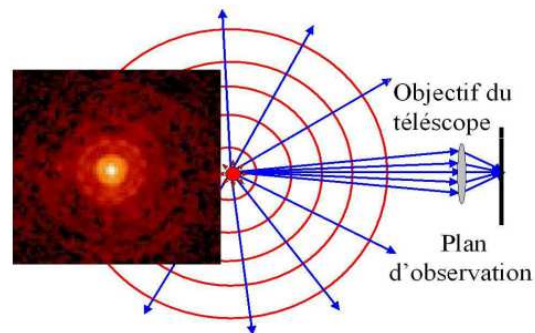
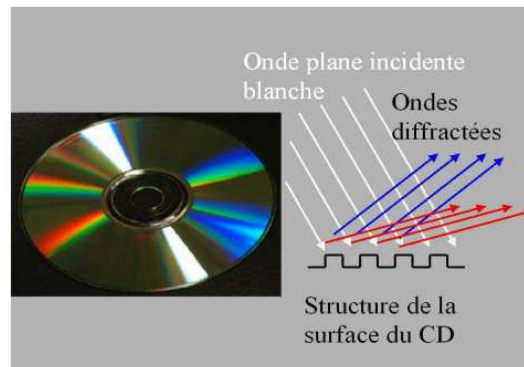


Ces figures d'intensité sont une manifestation de la nature ondulatoire de la lumière et peuvent être expliquées à partir d'une somme de vibrations cohérentes entre elles.

2

Ces phénomènes de diffraction permettent également de d'expliquer:

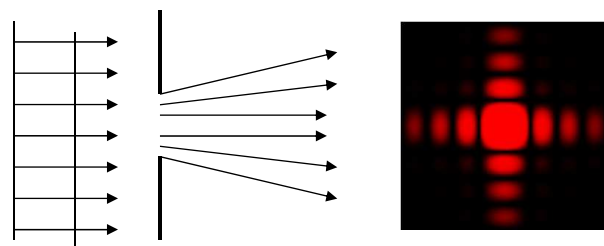
- la déviation des rayons X par les Cristaux
- La décomposition de la lumière par un CD ou DVD
- La divergence d'un faisceau lumineux cohérent
- La taille et l'aspect de l'image d'une étoile au foyer d'un télescope



Diffraction : explication qualitative

Reprenons le cas du trou carré. On éclaire le trou par une onde que l'on peut considérer comme plane. Faisceaux incident cohérent spatialement.

L'onde au niveau du trou subit une altération en amplitude et en phase



Les différentes zones du front d'onde qui se propagent au-delà du trou se recombinent et interfèrent, ce qui entraîne une répartition d'intensité modulée que l'on appelle: **figure de diffraction**.

Pour calculer cette figure de diffraction on doit alors déterminer la vibration lumineuse qui se propage au-delà du trou. C'est un problème difficile à résoudre mais possible en faisant un certain nombre d'approximations.

Propagation d'une vibration quelconque

Pour résoudre notre problème on doit être capable de déterminer l'expression d'une vibration $\Psi(r,t)$ en r connaissant son expression en r_0 .

Pour cela on doit décrire la propagation $\Psi(r_0,t)$. On doit alors utiliser une description qui satisfait l'équation d'onde.

Les solutions de l'équation que nous connaissons sont :

- Ondes planes (1 direction de propagation et extension infinie)
- Ondes sphériques (toutes les directions de propagation et ponctuelle)

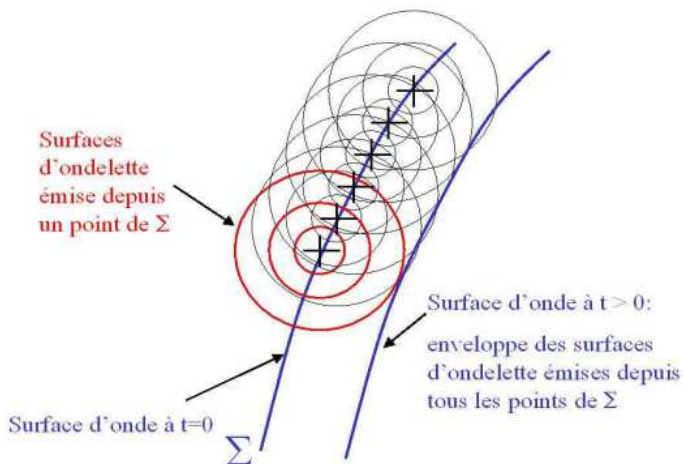
Le principe de superposition nous dit **qu'une somme de solutions de l'équation d'onde est également solution de l'équation d'onde.**

On va donc décrire $\Psi(r_0,t)$ par une somme d'ondes planes ou sphériques. L'extension infinie des ondes planes pose un problème pour la propagation avec des obstacles. On ne sait pas décrire les obstacles avec une telle représentation. **On utilise alors une somme d'ondes sphériques, c'est le principe de Huygens-Fresnel.**

5

Principe de Huygens-Fresnel

Soit $\psi(r_0, t)$ une onde supposée monochromatique et cohérente spatialement sur une surface Σ . Alors $\psi(r)$ s'exprime comme la somme cohérente ("l'interférence") d'ondes sphériques émises depuis tous les points r_0 avec une amplitude proportionnelle à celle de $\psi(r_0, t)$ et une phase identique à celle de $\psi(r_0, t)$.

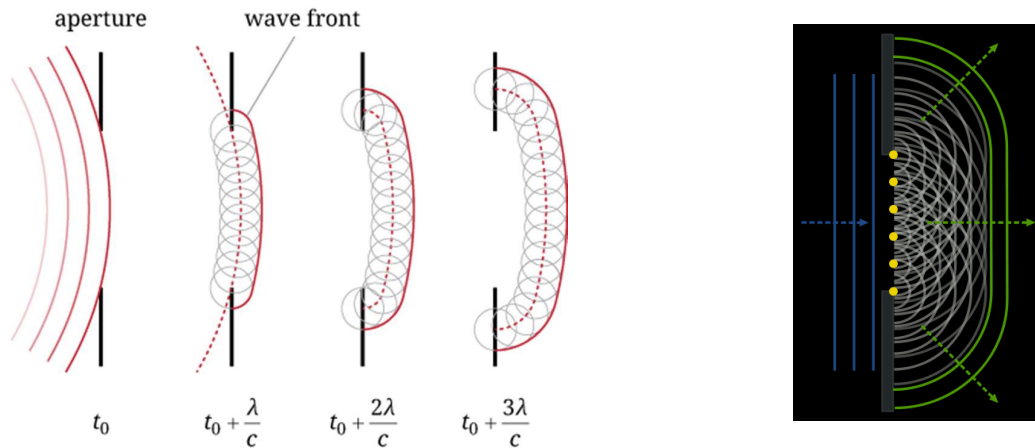


On considère que chaque point d'un front d'onde se comporte comme une source d'ondelettes secondaires sphériques, à partir desquelles on détermine la progression du front d'onde.

6

Principe de Huygens-Fresnel

Lorsque la lumière rencontre un obstacle, le principe de Huygens peut s'énoncer de la façon suivante: *chaque point non obstrué d'un front va se comporter comme une source secondaire d'ondelette sphérique, on a donc en chaque point de l'ouverture de la fente un point source émettant une onde sphérique avec une amplitude proportionnelle et une phase identique à celles de l'onde incidente.*

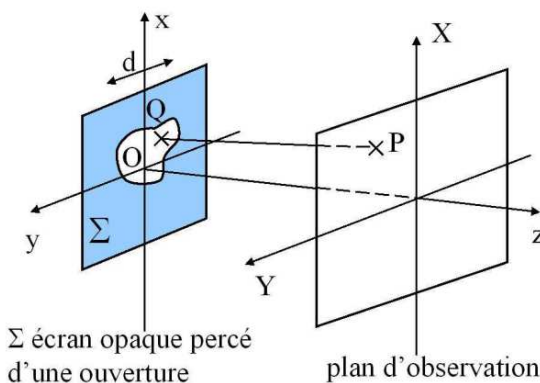


7

Mise en équation

Soit un écran opaque Σ percé d'une ouverture de dimension d et éclairée par une vibration lumineuse Ψ cohérente. D'après le principe de Huygens-Fresnel la vibration dans le plan d'observation (OXY) s'écrit:

$$\psi(P) = \int_{\Sigma} K \psi(Q) \frac{\exp(ik \cdot QP)}{QP} dx dy$$



Hypothèses:

- $\Psi = 0$ au niveau de la partie opaque
- Par d'effet des bords du trou, Ψ est le même que s'il n'y avait pas d'écran $d \gg \lambda$

K traduit le fait qu'il n'y a pas d'onde émise vers l'arrière. On a :

$$K = \frac{1 + \cos(\alpha)}{2\lambda i} \text{ ou } \alpha \text{ est l'angle entre } \overrightarrow{QP} \text{ et la direction } Oz. \quad K = 0 \text{ pour } \alpha = \pi$$

8

Huygens dans l'approximation paraxiale

On se place généralement dans le cas de l'approximation paraxiale, c'est-à-dire que l'on considère des points P répartis sur une extension latérale petite devant z.

$$\text{Dans ces conditions : } QP = \sqrt{z^2 + (X-x)^2 + (Y-y)^2} = z\sqrt{1 + \frac{(X-x)^2 + (Y-y)^2}{z^2}}$$

$$QP \approx z + \frac{(X-x)^2 + (Y-y)^2}{2z}$$

Ψ devient:

$$\psi(P) = K \frac{\exp(ik \cdot z)}{z} \int_{\Sigma} \psi(Q) \exp\left(ik \frac{(X-x)^2 + (Y-y)^2}{2z}\right) dx dy$$

Pour le terme d'amplitude on peut alors prendre $QP \approx z$, en revanche on ne peut pas faire la même approximation pour le terme de phase. La phase étant définie à 2π près, négliger le 2nd terme QP dans la phase revient à:

$$k \frac{(X-x)^2 + (Y-y)^2}{2z} \ll 2\pi \Rightarrow \frac{(X-x)^2 + (Y-y)^2}{2z} \ll \lambda \approx 10^{-6}$$

On ne peut donc pas simplifier le terme de phase dans l'approximation paraxiale à part sortir les termes indépendants de x et y de l'intégrale

9

Huygens dans l'approximation paraxiale

Si on développe le terme de phase on peut simplifier l'intégrale:

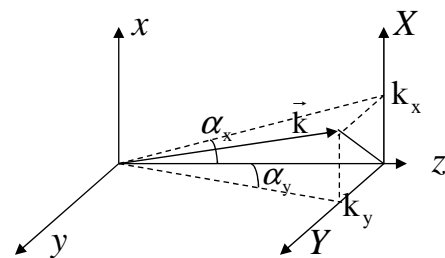
$$\psi(P) = \frac{K \exp(ik \cdot z)}{z} \exp\left(ik \frac{X^2 + Y^2}{2z}\right) \int_{\Sigma} \psi(Q) \exp\left(-ik \frac{Xx + Yy}{z}\right) \exp\left(ik \frac{x^2 + y^2}{2z}\right) dx dy$$

On peut exprimer $\Psi(P)$ en fonction de différents paramètres : X, Y et Z

Mais aussi en fonction des directions de propagation $[\alpha_x, \alpha_y]$ ou $[k_x, k_y]$

On a : $\frac{X}{z} = \tan(\alpha_x) \approx \alpha_x$ et $\frac{Y}{z} = \tan(\alpha_y) \approx \alpha_y$

et $k \frac{X}{z} \approx \alpha_x k \approx k_x$ et $k \frac{Y}{z} \approx \alpha_y k \approx k_y$



On peut également définir des grandeurs u_x et u_y appelées **fréquences spatiales** tel que:

$$u_x \approx \frac{\alpha_x}{\lambda} \quad \text{et} \quad u_y \approx \frac{\alpha_y}{\lambda}$$

10

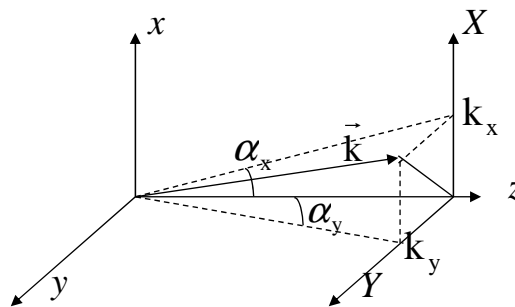
On a alors :

$$\psi(X, Y, Z) = \frac{K \exp(ik.z)}{z} \exp\left(ik \frac{X^2 + Y^2}{2z}\right) \int_{\Sigma} \psi(Q) \exp\left(-ik \frac{Xx + Yy}{z}\right) \exp\left(ik \frac{x^2 + y^2}{2z}\right) dx dy$$

$$\psi(\alpha_x, \alpha_y, Z) = \frac{K \exp(ik.z)}{z} \exp\left(ik \frac{X^2 + Y^2}{2z}\right) \int_{\Sigma} \psi(Q) \exp(-ik(\alpha_x x + \alpha_y y)) \exp\left(ik \frac{x^2 + y^2}{2z}\right) dx dy$$

$$\psi(k_x, k_y, Z) = \frac{K \exp(ik.z)}{z} \exp\left(ik \frac{X^2 + Y^2}{2z}\right) \int_{\Sigma} \psi(Q) \exp(-i(k_x x + k_y y)) \exp\left(ik \frac{x^2 + y^2}{2z}\right) dx dy$$

$$\psi(u_x, u_y, Z) = \frac{K \exp(ik.z)}{z} \exp\left(ik \frac{X^2 + Y^2}{2z}\right) \int_{\Sigma} \psi(Q) \exp(-i2\pi(u_x x + u_y y)) \exp\left(ik \frac{x^2 + y^2}{2z}\right) dx dy$$



11

On décrit généralement l'objet diffractant par une fonction de transmission $t(x, y)$. Cette fonction peut être complexe si l'objet diffractant introduit un déphasage comme une lame de verre (voir TD). L'expression de Ψ s'écrit alors:

$$\psi(P) = \frac{\exp(ik.z)}{z} \exp\left(ik \frac{X^2 + Y^2}{2z}\right) \int \psi(Q) t(x, y) \cdot \exp(-ik(\alpha_x x + \alpha_y y)) \exp\left(ik \frac{x^2 + y^2}{2z}\right) dx dy$$

On souhaite déterminer la répartition d'éclairement dans le plan d'observation, c'est-à-dire une grandeur proportionnelle à $|\Psi(\alpha_x, \alpha_y)|^2$ ou à $|\Psi(X, Y)|^2$. On peut donc négliger:

- Les termes de phase devant l'intégrale.
- Le terme $1/z$ est un facteur d'atténuation
- Le coefficient K (approximation paraxiale: $\alpha \ll 1$ soit $K \approx \frac{1}{\lambda i}$)

L'expression de Ψ s'écrit alors:

$$\psi(P) \alpha \int \psi(Q) t(x, y) \cdot \exp(-ik(\alpha_x x + \alpha_y y)) \exp\left(ik \frac{x^2 + y^2}{2z}\right) dx dy$$

12

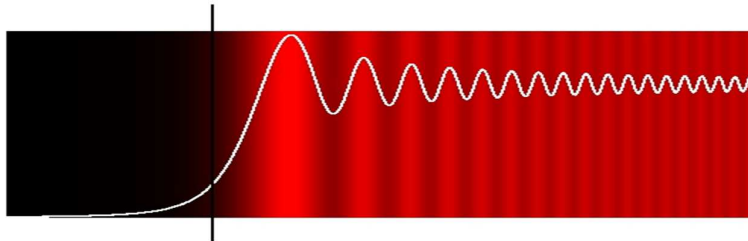
Diffraction de Fresnel

Pour un bord d'écran situé en $x = 0$, on a : $t(x,y)=1$ pour $x>0 \forall y$

$$\psi(P) \propto \int_0^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \psi(Q) \exp(-ik(\alpha_x x + \alpha_y y)) \exp\left(ik \frac{x^2 + y^2}{2z}\right) dx dy$$

Cette intégrale est difficile à calculer du fait du terme: $\exp\left(ik \frac{x^2 + y^2}{2z}\right)$

Cette intégrale fait appel à des fonctions spéciales peu commodes à manipuler, nous ne traiterons donc pas la diffraction de Fresnel dans ce cours (calcul du bord d'écran est fait dans le Perez §30.11). Si on calcule Ψ et que l'on prend son module au carré on obtient alors une répartition d'intensité de la forme:



13

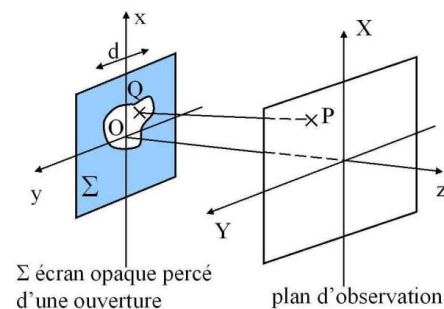
Diffraction de Fraunhofer

Si on veut pouvoir calculer simplement $\Psi(P)$

Il faut que : $\exp\left(ik \frac{x^2 + y^2}{2z}\right) \approx 1$

Soit : $k \frac{x^2 + y^2}{2z} \ll 2\pi$

$d^2 \ll \lambda z$ avec $d =$ taille de l'ouverture



L'ouverture doit être de petite dimension et le plan d'observation situé quasiment à l'infini. On parle de diffraction à l'infini ou de diffraction de Fraunhofer.

$d^2 \ll \lambda z$ s'appelle les conditions de Fraunhofer

$\Psi(P)$ devient: $\psi(P) \propto \int t(x, y) \psi(Q) \exp(-ik(\alpha_x x + \alpha_y y)) dx dy$

Exemple : $d=1\text{mm}$ et $\lambda=0.5\mu\text{m}$, la condition de Fraunhofer donne $z \gg 2\text{m}$

Afin de satisfaire la condition de Fraunhofer l'observation se fait généralement au foyer image d'une lentille convergente.

14

Fraunhofer avec une onde plane

Si l'objet diffractant est éclairé avec une onde plane se propageant selon l'axe z

alors : $\psi(Q) = \psi(x, y) = A \exp(ikz)$

On peut dans ce cas sortir le terme $\Psi(Q)$ de l'intégrale. Les termes $\exp(ikz)$ et A ne modifient répartition d'intensité. On peut donc écrire :

$$\psi(P) = \psi(X, Y) \propto \int t(x, y) \exp(-ik(\alpha_x x + \alpha_y y)) dx dy$$

Cette intégrale est une transformation mathématique bien connue appelée la transformée de Fourier.

Dans les conditions de Fraunhofer, la vibration Ψ sur l'écran d'observation est la transformée de Fourier spatiale de la fonction de transmission de l'objet diffractant. La vibration Ψ est une somme d'ondes planes, chaque onde plane étant définie par une direction de propagation (α_x, α_y) et une amplitude particulière.

Le problème du calcul de la figure de diffraction d'un objet diffractant se ramène à déterminer la fonction de transmission de cet objet et calculer la transformée de Fourier de cette fonction

15

Cas d'une ouverture rectangulaire

On considère une ouverture rectangulaire de taille $a \times b$ percée dans un écran opaque et éclairée par une onde plane avec une incidence normale à l'ouverture.

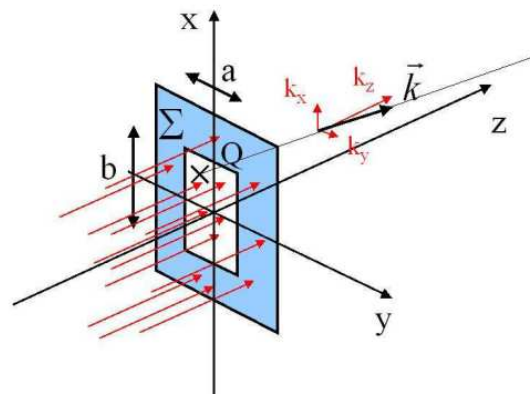
La fonction de transmission $t(x, y)$ est:

$$t(x, y) = 1 \quad \text{pour } |x| < \frac{a}{2}$$

$$t(x, y) = 0 \quad \text{pour } |x| > \frac{a}{2}$$

$$t(x, y) = 1 \quad \text{pour } |y| < \frac{b}{2}$$

$$t(x, y) = 0 \quad \text{pour } |y| > \frac{b}{2}$$



L'amplitude la vibration Ψ diffractée dans la direction de propagation définie par α_x et α_y est égale à:

$$\psi(P) \propto \int t(x, y) \exp(-ik(\alpha_x x + \alpha_y y)) dx dy$$

$$\psi(P) \propto \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} \exp(-ik(\alpha_x x + \alpha_y y)) dx dy$$

16

Cas d'une ouverture rectangulaire

On peut séparer les variables x et y:

$$\psi(P) \propto \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} \exp(-ik\alpha_x x) dx \cdot \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} \exp(-ik\alpha_y y) dy$$

$$\psi(P) \propto \left[\frac{\exp(-ik\alpha_x x)}{-ik\alpha_x} \right]_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} \cdot \left[\frac{\exp(-ik\alpha_y y)}{-ik\alpha_y} \right]_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}}$$

$$\psi(P) \propto \frac{\exp\left(-ik\alpha_x \frac{a}{2}\right) - \exp\left(ik\alpha_x \frac{a}{2}\right)}{-ik\alpha_x} \cdot \frac{\exp\left(-ik\alpha_y \frac{b}{2}\right) - \exp\left(ik\alpha_y \frac{b}{2}\right)}{-ik\alpha_y}$$

$$\psi(P) \propto ab \frac{\sin\left(k\alpha_x \frac{a}{2}\right)}{k\alpha_x \frac{a}{2}} \cdot \frac{\sin\left(k\alpha_y \frac{b}{2}\right)}{k\alpha_y \frac{b}{2}} = ab \operatorname{sinc}\left(k\alpha_x \frac{a}{2}\right) \cdot \operatorname{sinc}\left(k\alpha_y \frac{b}{2}\right)$$

On en déduit I: $I(\alpha_x, \alpha_y) \propto |\psi(P)|^2 \propto (ab)^2 \operatorname{sinc}^2\left(k\alpha_x \frac{a}{2}\right) \cdot \operatorname{sinc}^2\left(k\alpha_y \frac{b}{2}\right)$

17

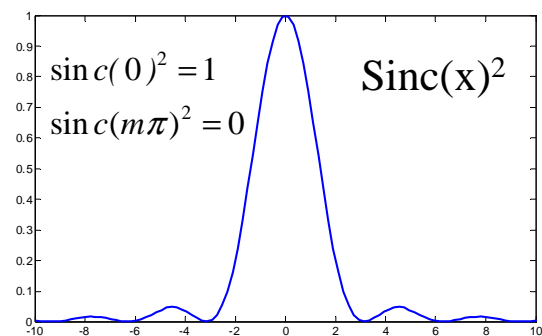
Cas d'une ouverture rectangulaire

La répartition d'énergie est donc décrite par des sinus cardinaux au carré selon x et y. On a

Maximum en $x=0$

Minimum en $x=m\pi$

Lobes secondaires d'amplitude $1/x^2$

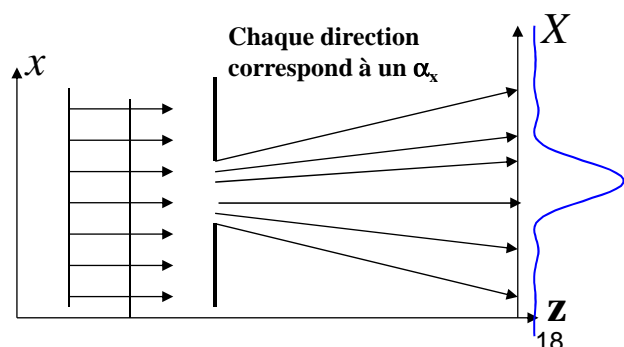


Selon x on a : $I(\alpha_x) \propto a^2 \operatorname{sinc}^2\left(k\alpha_x \frac{a}{2}\right)$

A chaque direction de propagation est associé une intensité.

Pour un plan d'observation en Z, on peut associer à chaque direction de propagation une position X

$$I(X) \propto a^2 \operatorname{sinc}^2\left(\frac{\pi X}{\lambda z} a\right)$$



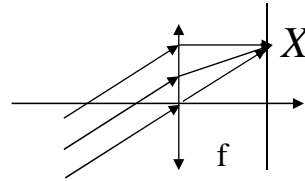
18

Cas d'une ouverture rectangulaire

Si l'observation se fait au foyer d'une lentille, la position sur l'écran d'observation associée à une direction de propagation est donnée dans l'approximation paraxiale

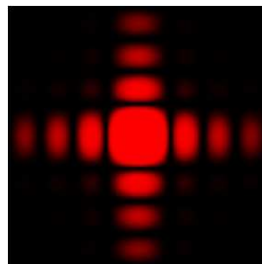
$$\text{par: } k\alpha_x = \frac{2\pi X}{\lambda f}$$

$$k\alpha_y = \frac{2\pi Y}{\lambda f}$$



L'expression de I devient: $I(X,Y) \propto (ab)^2 \text{sinc}\left(\frac{\pi X}{\lambda f} a\right)^2 \text{sinc}\left(\frac{\pi Y}{\lambda f} a\right)^2$

On observe sur l'écran la répartition d'intensité suivante si a=b:



19

Sens de variation

$$I(k_x, k_y) \propto |\psi(P)|^2 = (ab)^2 \text{sinc}\left(k\alpha_x \frac{a}{2}\right)^2 \cdot \text{sinc}\left(k\alpha_y \frac{b}{2}\right)^2$$

On a un maximum en k_x et $k_y=0$ ou en X et $Y=0$

La position des minima est donnée par: $k\alpha_x \frac{a}{2} = m\pi$ et $k\alpha_y \frac{b}{2} = p\pi$

Soit

$$\begin{cases} \alpha_x = m \frac{\lambda}{a} & \text{ou} & X = m \frac{\lambda Z}{a} & \text{ou} & X = m \frac{\lambda f}{a} \\ \alpha_y = p \frac{\lambda}{b} & \text{ou} & Y = p \frac{\lambda Z}{b} & \text{ou} & Y = p \frac{\lambda f}{b} \end{cases}$$

On a donc un pic central de largeur: $2 \frac{\lambda f}{a}$ selon x et $2 \frac{\lambda f}{b}$ selon y

➤ Si on augmente b : le pic centrale devient de plus en plus petit et les lobes secondaires se resserrent

➤ Si on diminue b : le pic centrale devient de plus en plus grand petit et les lobes secondaires s'éloignent

Plus on ferme l'ouverture et plus la lumière divergente à la sortie de l'ouverture

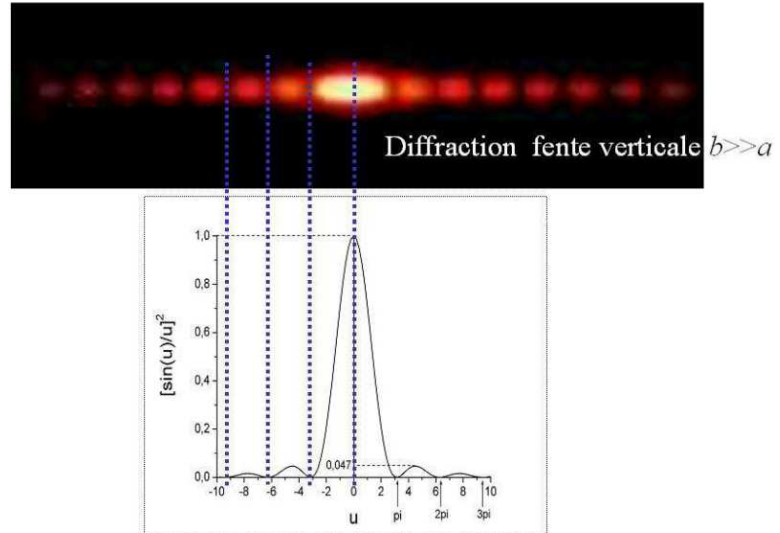
20

Cas d'une fente infinie

Si on fait tendre b vers l'infini, cela correspond à une fente fine verticale

La fonction: $\text{sinc}\left(k\alpha_y \frac{b}{2}\right)^2$ est alors non nulle seulement pour $\alpha_y=0$ ou $X=0$

La répartition d'intensité sur l'écran est :



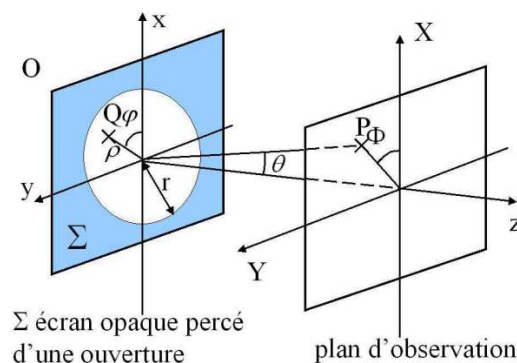
21

Cas d'une ouverture circulaire

On considère une ouverture circulaire de taille de rayon $r=D/2$ percée dans un écran opaque et éclairée par une onde plane avec une incidence normale à l'ouverture. Du fait de la symétrie de révolution du problème la fonction de transmission est exprimée en coordonnées polaires:

$$t(r, \varphi) = 1 \quad \text{pour } |\rho| < r \quad \forall \varphi$$

$$t(r, \varphi) = 0 \quad \text{pour } |\rho| > r \quad \forall \varphi$$



On doit également exprimer l'intégrale de Fraunhofer en coordonnées polaires, on effectue alors les changements de variables suivants:

Dans le plan oxy on a : $x = \rho \cos(\varphi)$ et $y = \rho \sin(\varphi)$

Dans le plan OXY on a : $k\alpha_x = k\theta \cos(\Phi)$ et $k\alpha_y = k\theta \sin(\Phi)$

22

L'intégrale de Fraunhofer devient:

$$x = \rho \cos(\varphi) \text{ et } y = \rho \sin(\varphi)$$

$$k_x = k_\theta \cos(\Phi) \text{ et } k_y = k_\theta \sin(\Phi)$$

$$\psi(P) \propto \int \int t(r, y) \exp(-i(k_x x + k_y y)) dx dy$$

$$\psi(k_\theta, \Phi) \propto \int_0^r \int_0^{2\pi} \exp(-ik_\theta \rho (\cos(\varphi) \cos(\Phi) + \sin(\varphi) \sin(\Phi))) d\rho d\varphi$$

$$\psi(k_\theta, \Phi) \propto \int_0^r \int_0^{2\pi} \exp(-ik_\theta \rho \cos(\varphi - \Phi)) d\rho d\varphi$$

On doit retrouver la symétrie de révolution dans l'expression de la vibration dans le plan (OXY), c'est à dire de $\Psi(\rho, \Phi)$ doit être indépendant de Φ , que l'on peut donc prendre égale à zéro.

On a alors:

$$\psi(k_\theta, \Phi) \propto \int_0^r \int_0^{2\pi} \exp(-ik_\theta \rho \cos(\varphi)) d\rho d\varphi$$

Cette intégrale fait appel à une fonction spéciale, la fonction de Bessel d'ordre 1

$$J_1(r), \text{ on peut montrer que : } \psi(k_\theta, \Phi) \propto 2\pi r^2 \frac{J_1(k_\theta r)}{k_\theta r}$$

L'onde propagée respecte la symétrie du problème et dépend donc uniquement de θ .

23

On en déduit l'intensité :
$$I(\theta) \propto \left(\frac{J_1(k_\theta r)}{k_\theta r} \right)^2$$

Cette figure de diffraction s'appelle le disque d'Airy

$$\left(\frac{J_1(u)}{u} \right)^2 \text{ présente un maximum pour } u = 0$$

1^{er} zéro pour $u = 3.83$

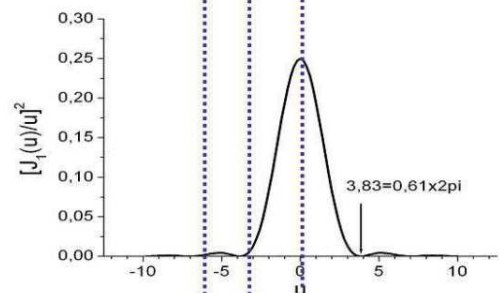
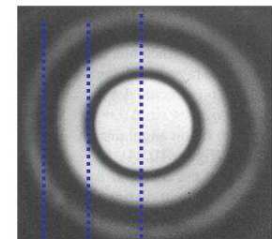
En déduit la demi largeur angulaire du disque d'Airy

$$\text{Pour } k_\theta r = \frac{2\pi}{\lambda} \theta r = 3.83$$

$$\text{On a : } \theta = \frac{3.83}{2\pi} \frac{\lambda}{r} = 0.61 \frac{\lambda}{r} = 1.22 \frac{\lambda}{D}$$

Au foyer d'une lentille le rayon R est égale à : $R = \theta f = 1.22 \frac{\lambda f}{D}$

Plus l'ouverture est grande et plus la tache d'Airy est petite, ceci a une grande importance dans la résolution des instruments d'optique

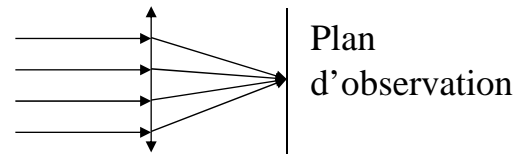


24

Application à l'imagerie

On souhaite imager avec une lentille de focale f et de diamètre D , un objet « ponctuel » très éloigné. L'objet est considéré à l'infini:

- Front d'onde plan au niveau de la lentille
- Image au foyer de la lentille



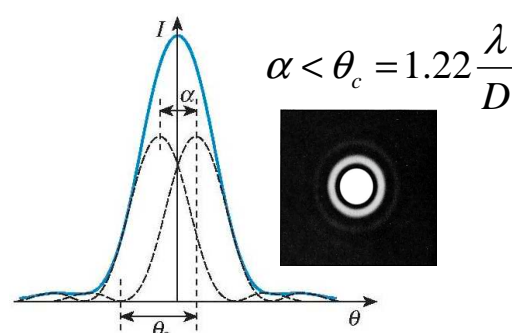
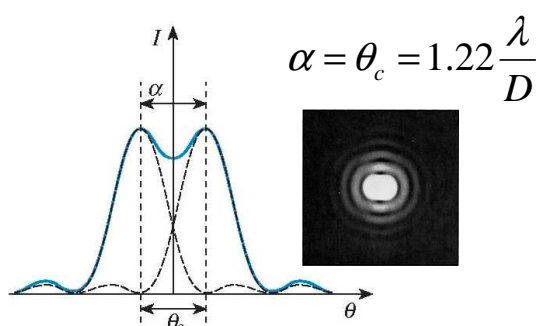
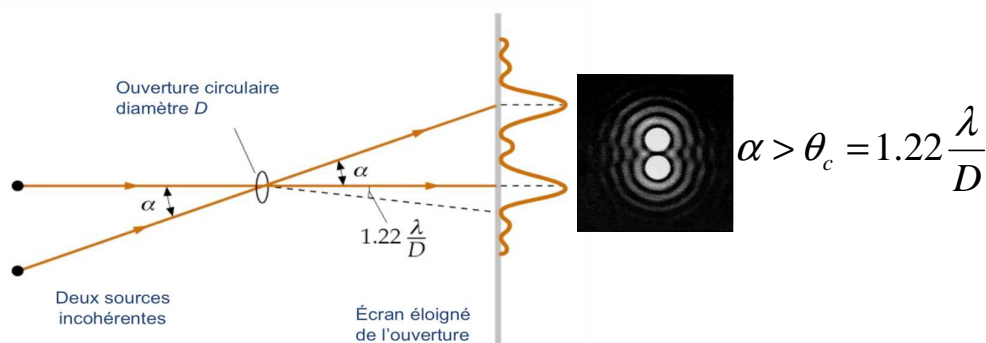
On a donc une ouverture de diamètre D éclairée par une onde plane, d'après les résultats précédents on observe dans le plan d'observation une tache lumineuse circulaire:

- de rayon angulaire: $\theta = 1.22 \frac{\lambda}{D}$
- de rayon spatial: $R = 1.22 \frac{\lambda f}{D}$

Cette tache sera d'autant plus petite que l'ouverture de la lentille sera grande. Si on observe deux objets, on pourra les distinguer si leur deux images sont séparées. On comprend donc que la résolution de notre système optique va augmenter avec D .

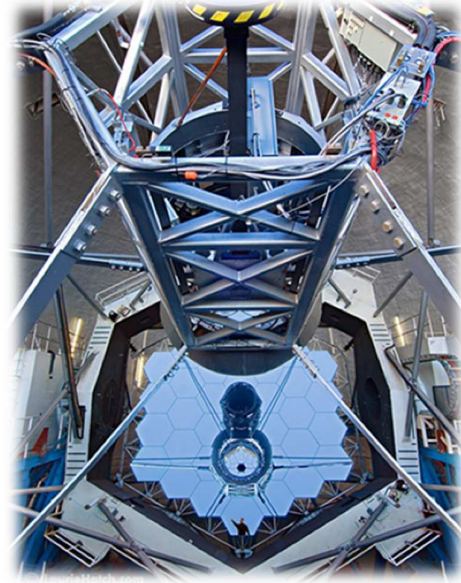
Critère de Rayleigh

Deux points objets seront distinguables si le centre des spots images est séparé au moins d'une distance égale au « rayon » de chacun des spots.



Exemple: Telescope

Le télescope Keck à Mauna Kea (Hawaii), possède un diamètre effectif de 10m.



$$\theta_{\min} = \frac{1,22\lambda}{D} = 1,22 \times \frac{600 \times 10^{-9} \text{ m}}{10 \text{ m}} = 7,3 \times 10^{-8} \text{ rad} \approx 0,015 \text{ seconde d'arc}$$

A 100km il distingue des objets séparés de 1mm!