Histoire

Cet accord tient son nom du grec Pythagore, à qui la découverte a été attribuée par des textes médiévaux, même si les premiers textes décrivant l'utilisation d'accords similaires remontent aux babyloniens vers le IVe millénaire av. J.-C.[4]. L'école des pythagoriciens a théorisé la gamme heptatonique dans l'harmonie des sphères en utilisant les rapports de nombres entiers le plus simples sur le monocorde : l'octave (rapport 1/2, la corde est partagée en deux), la quinte (rapport 2/3, la corde vibre sur ses deux tiers) et la quarte (rapport 3/4). Ces intervalles étant alors considérés comme les seuls consonants.

Aucun texte de Pythagore ne nous est parvenu, mais on retrouve chez Platon les termes du rapport du limma, soit 256/243[5]. Le plus ancien texte connu traitant du système pythagoricien est de Henri Arnault de Zwolle, écrit vers 1450[6].

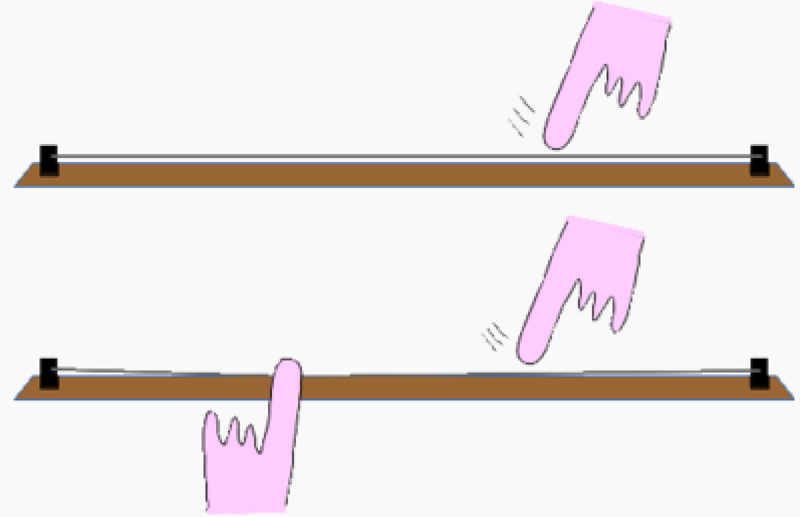
Platon, dans le *Timée*[réf. nécessaire], décrit comment le Démiurge façonne l'Âme du monde. J.-Fr. Mattéi résume :

"Le démiurge va tirer de sa composition finale une structure harmonique suggestive dont les calculs témoignent d'une influence pythagoricienne. Elle est constituée par une double progression géométrique de raison 2 (1, 2, 4, 8) et de raison 3 (1, 3, 9, 27), qu'il est commode de disposer sur un diagramme en forme de lambda majuscule (Λ), selon un schéma que l'on trouve chez Proclus. Cette figure porte, sur chaque côté de l'angle, les nombres respectifs de la série paire et de la série impaire. Le dernier de ces nombres (27) est égal à la somme des six précédents (1 + 2 + 3 + 4 + 8 + 9 = 27)... La progression selon le facteur 2 donne les octaves par doublement successifs des intervalles (1, 2, 4, 8 = Do1, Do2, Do3, Do4...), alors que la progression selon le facteur 3 forme les douzièmes justes (1 = Do, 3 = Sol, 9 = Ré, 27 = La, 81 = Mi, 243 = SI...). On peut alors combler les intervalles musicaux doubles ou triples pour former la gamme complète en s'aidant de deux proportions continues ou 'médiétés', l'une arithmétique (de type 1, 2, 3), l'autre harmonique (de type 3, 4, 6), bien connues des pythagoriciens, en particulier Archytas. L'intervalle des nombres de 1 à 2 sera composé des nombres 1 (Tonique), 4/3 (Quarte), 3/2 (Quinte) et 2 (Octave) ; le ton, dont la valeur est 9/8, se situe entre la quarte et la quinte, puisque 3/2 : 4/3 = 9/8. L'Âme du monde est ainsi composée de cinq tons majeurs égaux entre lesquels est intercalé comme 'reste', *leimma*, l'intervalle de 256/243 (= 1,053), mesure du demi-ton diatonique de la gamme naturelle de Pythagore, qui est un peu plus faible que notre demi-ton tempéré (16/15 = 1,066)"[7].

La gamme pythagoricienne a été progressivement délaissée au Moyen Âge lorsque l'on a commencé à considérer comme consonant l'intervalle de tierce. En particulier avec Gioseffo Zarlino qui donne une nouvelle définition de la tierce dans son *Istitutioni Harmoniche*[réf. nécessaire] en 1558. Newton (1704) était convaincu qu'il devait y avoir une parfaite correspondance entre les diverses couleurs et les notes de la gamme[réf. nécessaire]. Voltaire, dans les *Éléments de philosophie de Newton* (1738), partie 2, chap. XIV, résume les résultats :

"La plus grande réfrangibilité du violet répond à ré ; la plus grande réfrangibilité du pourpre répond à mi." Violet/ré, pourpre/mi, bleu/fa, vert/sol, jaune/la, orange/si, rouge/do (ut). Voltaire ajoute : "Cette analogie secrète entre la lumière et le son donne lieu de soupçonner que toutes les choses de la nature ont des rapports cachés que peut-être on découvrira quelque jour."[8]

Construction



On construit une quinte pure à partir d'une note de base en prenant les deux tiers de la corde.

L'intervalle de quinte pure correspond en acoustique musicale à un rapport de fréquences de 3/2. Ainsi, si on part de la note ayant pour fréquence 200 Hz, l'intervalle de quinte pure est obtenu en multipliant cette fréquence par 3/2 : la deuxième note aura une fréquence de 300 Hz, la troisième note 450 Hz, la quatrième note 675 Hz, etc. De même, en utilisant le monocorde, on construit un intervalle de quinte pure à partir d'une note de base en prenant les deux tiers de la corde.

Ce rapport de 3/2 s'explique physiquement par la troisième harmonique produite lors de la production d'un son harmonique : la fréquence de la troisième harmonique est deux fois la fréquence de la quinte juste. Ainsi, jouer une note et sa quinte simultanément est harmonieux.

À partir de cette nouvelle note à la quinte on prend à nouveau les deux tiers de la corde, ce qui donne la deuxième quinte. En continuant ainsi, on retombe à la 12e quinte sur une note très proche de celle de départ (en tenant compte du principe d'équivalence des octaves).

Sur le plan mathématique, il se trouve que ce rapport de fréquence 3/2 est en rapport multiplicatif « simple » (au sens des fractions continues) du rapport d'octave 2/1 : (valeur exacte 7.01955.../12). Cette coïncidence implique que si on répète douze fois le passage à la quinte, on a franchi *presque* sept octaves ( ), et on revient *presque exactement* sur la note initiale. Ce fait mathématique est à l'origine de pratiquement toute la théorie musicale : division de l'octave en douze demi-tons, et rôle primordial de la quinte dans les accords musicaux.

Pour construire une gamme musicale avec ces notes, on les ramène à une même octave, soit dans un intervalle de rapport 2 (principe d'équivalence des octaves), et on ignore la différence entre 3^12 et 2^19 (appelée comma pythagoricien) pour boucler la boucle. On peut choisir avec l'exemple précédent l'octave comprise entre 200 Hz et 400 Hz : il faut diviser par une puissance de 2 les fréquences se situant au-dessus des 400 Hz, ce qui donnera par exemple pour celle de 675 Hz le résultat 337,5 Hz ($675/2^1$). La dernière quinte est raccourcie à l'approximation de l'octave supérieure.

12 quintes pures successives[2]													
Quintes	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Rapports	1	$3/2$	$3^2/2^2$	$3^3/2^3$	$3^4/2^4$	$3^5/2^5$	$3^6/2^6$	$3^7/2^7$	$3^8/2^8$	$3^9/2^9$	$3^{10}/2^{10}$	$3^{11}/2^{11}$	$3^{12}/2^{12}$
Rapports ramenés dans l'intervalle [1; 2]	1	$3/2$	$3^2/2^3$	$3^3/2^4$	$3^4/2^6$	$3^5/2^7$	$3^6/2^9$	$3^7/2^{11}$	$3^8/2^{12}$	$3^9/2^{14}$	$3^{10}/2^{15}$	$3^{11}/2^{17}$	$3^{12}/2^{18}$
	1	1,5	≈ 1,13	≈ 1,69	≈ 1,27	≈ 1,90	≈ 1,43	≈ 1,07	≈ 1,60	≈ 1,20	≈ 1,80	≈ 1,35	≈ 2,03

On trie des quintes suivant l'ordre croissant des rapports ramenés dans l'intervalle [1 ; 2]. La dernière quinte est raccourcie à l'octave supérieure. La gamme obtenue possède des intervalles assez réguliers ($3^7/2^{11} \approx 2^8/3^5$) pour servir de référence à l'accordage d'instruments de musique.

Nom des notes de l'échelle chromatique ascendante													
Quintes	0	7	2	9	4	11	6	1	8	3	10	5	12
Rapports ramenés dans l'intervalle [1; 2]	1	$3^7/2^{11}$	$3^2/2^3$	$3^9/2^{14}$	$3^4/2^6$	$3^{11}/2^{17}$	$3^6/2^9$	$3/2$	$3^8/2^{12}$	$3^3/2^4$	$3^{10}/2^{15}$	$3^5/2^7$	**2**
Noms	do	do♯	ré	ré♯	mi	mi#	fa♯	sol	sol♯	la	la♯	si	do
Écarts	$3^7/2^{11}$ apotome	$2^8/3^5$ limma	$3^7/2^{11}$ apotome	$2^8/3^5$ limma	$3^7/2^{11}$ apotome	$2^8/3^5$ limma	$2^8/3^5$ limma	$3^7/2^{11}$ apotome	$2^8/3^5$ limma	$3^7/2^{11}$ apotome	$2^8/3^5$ limma	$2^8/3^5$ limma	

La quinte du loup se trouve ici dans l'intervalle *mi# - do*.

Intervalles caractéristiques

La gamme pythagoricienne comporte[9]:

- 11 quintes pures, plus la quinte du loup
- Cet accord contient aussi des quartes pures, obtenues par renversement des quintes.
- 8 tierces majeures pythagoriciennes plus grandes que la tierce pure d'un comma syntonique, et 4 tierces majeures très consonantes plus petites que la tierce pure d'un schisma.

Comma pythagoricien

Le comma pythagoricien représente la différence entre 7 octaves et 12 quintes pures[2]. Son rapport de fréquences vaut :

Quinte du loup

L'intervalle de 12 quintes pures représente une étendue légèrement supérieure à 7 octaves, la dernière quinte est raccourcie (du comma pythagoricien) pour donner à l'ensemble une étendue valant exactement 7 octaves : elle forme la quinte dite « du loup » car elle est très dissonante (elle « hurle »). Cette quinte rend difficile la transposition. C'est l'un des inconvénients à l'origine de la recherche de nouveaux tempéraments.

Dans la pratique, les musiciens qui préfèrent utiliser des octaves pures accordent leurs instruments sur une gamme pythagoricienne en reportant la quinte du loup dans un intervalle peu utilisé, comme *sol♯ - mi♭*. Les intervalles englobant la quinte du loup sonneront faux aussi, il faut donc soigneusement l'éviter.

Le rapport de la quinte du loup se calcule en enlevant 11 quintes justes aux 7 octaves considérées :

, à comparer avec 1,5 pour une quinte juste.

Tierce pythagoricienne[

La tierce majeure, qui vaut deux tons purs successifs, a pour rapport 9/8*9/8 = 81/64 dans la gamme pythagoricienne. Elle diffère légèrement de la tierce pure de rapport 5/4 = 80/64. La différence entre ces deux tierces est le comma syntonique.

Ton pythagoricien

Le ton pur pythagoricien, appelé l'epogdoon, a pour rapport 9/8 : deux quintes successives forment une neuvième, qui est une seconde redoublée. La neuvième réduite à l'octave donne le rapport : (3/2*3/2) / 2 = 9/8.

Demi-tons

La construction de l'accord fait apparaître deux valeurs pour les demi-tons :

- le plus grand est l'apotome, qui vaut $3^7/2^{11}$ (environ 1,0679),
- le plus petit est le limma, qui vaut $2^8/3^5$ (environ 1,0535).

Le produit de ces deux intervalles vaut un ton pythagoricien : $(3^7/2^{11})*(2^8/3^5) = 3^2/2^3 = 9/8$.

Le quotient de ces deux intervalles vaut exactement le comma pythagoricien : $(3^7/2^{11})/(2^8/3^5) = 3^{12}/2^{19}$.

Une octave vaut : 5 tons + 2 limmas, le limma est donc l'équivalent du demi-ton diatonique dans l'échelle pythagoricienne.

Ces deux demi-tons n'étant pas égaux, il est difficile de transposer (jouer un même morceau avec une note tonique différente) ou de moduler (changement, même temporaire, de tonalité au cours du même morceau) dans cette gamme.

Apotome[

L'apotome est l'intervalle compris entre une note et son altération. Il a toujours la même étendue et a pour rapport $3^7/2^{11}$.

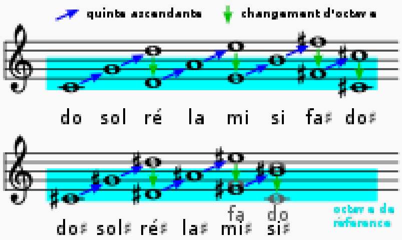
Limma

Le *limma* (du grec λεῖμμα, « reste »), proche d'une moitié de ton, est le différentiel entre la quarte pure, intervalle de référence chez les Grecs, et deux tons entiers[10]. Il se calcule

donc en soustrayant deux tons ( ) à l'intervalle de quarte ( ), soit : .

Le limma correspond à l'intervalle compris entre une note altérée et sa voisine ne portant pas le même nom (ré♯ et mi par exemple, ou bien mi♭ et ré).

Notation



Cycle des quintes avec le solfège : on descend chaque fois que possible d'une octave afin de rester dans la même (représentée en bleu ciel)

En utilisant le nom des notes issues du solfège, il est possible de construire une suite de quintes (en formant le cycle des quintes) et de donner un nom aux notes de la gamme pythagoricienne.

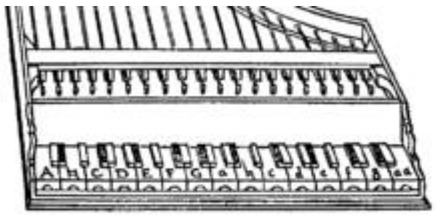
Dans la gamme tempérée, l'étendue d'une quinte juste vaut trois tons et demi : sur un piano on avance de quinte en quinte en se déplaçant chaque fois de 7 touches (touches noires comprises). En partant du *do* on obtient la suite :

do - sol - ré - la - mi - si - fa♯ - do♯ - sol♯ - ré♯ - la♯ - mi♯ - si♯...

Par convention, on utilise le dièse pour les notes altérées dans la suite des quintes ascendantes, et le bémol dans la suite des quintes descendantes[3].

Toujours en partant de *do*, la suite des quintes descendantes commence par :

do - fa - si♭ - mi♭ - la♭ - ré♭ - sol♭ - do♭ - fa♭ - si♭♭ - mi♭♭ - la♭♭ - ré♭♭...



Clavier à 19 touches par octave imaginé par Zarlino, distinguant dièses et bémols

Il n'y a pas d'enharmonie puisque cette gamme n'est pas tempérée : le do♯ n'a donc pas la même fréquence que le ré♭. Les deux demi-tons, qui sont identiques dans la gamme tempérée, sont nommés dans la gamme pythagoricienne :

- *apotome*, pour l'intervalle formé par une note et sa version altérée ;
- *limma*, pour l'intervalle formé par une note altérée et la note voisine ne portant pas le même nom.

Ces intervalles sont disposés ainsi :

- *do* - apotome - *do♯* - limma - *ré*, pour les quintes ascendantes ;
- *do* - limma - *ré♭* - apotome - *ré*, pour les quintes descendantes.

Dans la gamme pythagoricienne, les notes bémolisées sont inférieures d'un comma pythagoricien à leurs notes conjointes diésées, on en déduit l'ordre suivant : *do - ré♭ - do♯ - ré*.

Gammes

La superposition de 5 quintes (*do - sol - ré - la - mi*) donne, après réduction à l'octave, une gamme pentatonique[3] : *ré - mi - sol - la - do*.

La superposition de 7 quintes (*fa - do - sol - ré - la - mi - si*) donne une gamme heptatonique diatonique[3] : *ré - mi - fa - sol - la - si - do*.

La superposition de 12 quintes donne une gamme chromatique[3].

Gamme pythagoricienne majeure

À partir d'une suite de 12 quintes pures, on désigne les notes de la gamme chromatique obtenue par les noms suivants :

mi♭ - si♭ - fa - do - sol - ré - la - mi - si - fa♯ - do♯ - sol♯

La quinte du loup sera placée dans l'intervalle le moins utilisé, souvent *sol♯ - mi♭*. Selon le choix de la note de départ, on obtiendra différents modes pour les sept notes de base. La gamme majeure se définit selon les rapports suivants :

<table>
<tr><th colspan="11">Gamme pythagoricienne majeure</th></tr>
<tr><th>Note</th><th>do</th><th>ré</th><th>mi</th><th colspan="2">fa</th><th colspan="2">sol</th><th>la</th><th>si</th><th>do</th></tr>
<tr><th>Rapport</th><td>1/1</td><td>9/8</td><td>81/64</td><td colspan="2">4/3</td><td colspan="2">3/2</td><td>27/16</td><td>243/128</td><td>2/1</td></tr>
<tr><th>Ecarts</th><td></td><td>9/8</td><td>9/8</td><td>256/243</td><td colspan="2">9/8</td><td>9/8</td><td>9/8</td><td>256/243</td><td></td></tr>
</table>

Cette gamme particulière peut aussi se définir par ses écarts (en plus ou en moins) par rapport au tempérament égal, exprimés en cents :

Note	Do	Do♯	Ré	Mi♭	Mi	Fa	Fa♯	Sol	Sol♯	La	Si♭	Si
Écarts	0	+9.78	-3.91	+5.87	-7.82	+1.96	±11.73	-1.96	+7.82	-5.87	+3.91	-9.78

Construction[

La gamme pythagoricienne majeure contient la quarte pure (rapport 4/3). On remarque dans la gamme construite précédemment, qu'en remplaçant l'intervalle le plus proche de la quarte (celui de 11 quintes de rapport $3^{11}/2^{17}$) par la quarte elle-même, on retrouve apotomes et limmas :

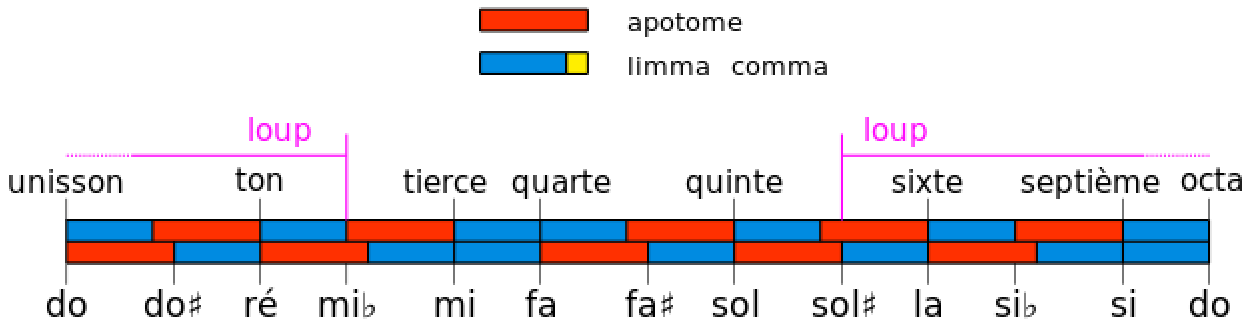
Gamme majeure (incluant la quarte juste)

Quintes	0	7	2	9	4	**11**	6	1	8	3	10	5	12
Rapports	1	$3^7/2^{11}$	$3^2/2^3$	$3^9/2^{14}$	$3^4/2^6$	**4/3**	$3^6/2^9$	3/2	$3^8/2^{12}$	$3^3/2^4$	$3^{10}/2^{15}$	$3^5/2^7$	2
Écarts	apo.	lim.	apo.	lim.	lim.	apo.	lim.	apo.	lim.	apo.	lim.	lim.	
Noms	do	do♯	ré	ré♯	mi	fa	fa♯	sol	sol♯	la	la♯	si	do

Cette substitution déplace la quinte du loup dans l'intervalle *la♯ - fa*, ce qui est plus judicieux du point de vue musical (on a bien $(4/3) / (3^{10}/2^{15}) = 2^{17}/3^{11}$, et en multipliant par deux pour se remettre dans l'octave [1 ; 2] on retrouve la valeur de la quinte du loup). On remarque qu'en plus, l'intervalle *fa - do* retrouve son écart originel de 3/2.

Représentation graphique

Il est possible de représenter une gamme pythagoricienne particulière en mettant les apotomes et les limmas les uns à la suite des autres selon les intervalles obtenus, le limma étant plus court que l'apotome d'un comma.



Comparaison avec la gamme tempérée

Rapports, fréquences et cents pour la gamme pythagoricienne majeure

Note	Rapport avec *do*	Fréquence pour *la* = 440 Hz	Cents	Cents gamme tempérée
do	1/1 (1,000)	260,74	0	0
ré♭	256/243 (1,053)	274,69	90	100
do♯	2187/2048 (1,068)	278,44	114	
ré	9/8 (1,125)	293,33	204	200
mi♭	32/27 (1,185)	309,03	294	300
ré♯	19683/16384 (1,201)	313,24	318	
mi	81/64 (1,266)	330,00	408	400

fa	4/3 (1,333)	347,65	498	500
sol♭	1024/729 (1,405)	366,25	588	600
fa♯	729/512 (1,424)	371,25	612	
sol	3/2 (1,500)	391,11	702	700
la♭	128/81 (1,580)	412,03	792	800
sol♯	6561/4096 (1,602)	417,66	816	
la	27/16 (1,688)	**440,00**	906	900
si♭	16/9 (1,778)	463,54	996	1000
la♯	59049/32768 (1,802)	469,86	1020	
si	243/128 (1,898)	495,00	1110	1100
do	2/1 (2,000)	521,48	1200	1200