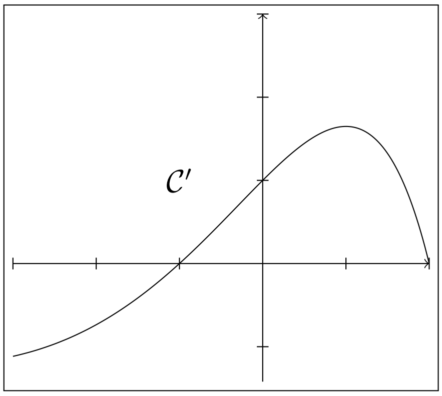
Bac Blanc Terminale S 2016
Durée 4h, calculatrice autorisée

Exercice 1. ***commun à tous les candidats : 4 points***

Le plan est muni d'un repère orthonormé $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$.
On considère une fonction f dérivable sur l'intervalle $[-3\ ;\ 2]$.
On dispose des informations suivantes :

- $f(0) = -1$.
- la dérivée f' de la fonction f admet la courbe représentative $\mathcal{C}'$ ci -contre.



Pour chacune des affirmations suivantes, dire si elle est **vraie** ou **fausse**. Aucune justification n'est demandée.

1. Pour tout réel x de l'intervalle $[-3, -1]$, $f'(x) \leqslant 0$.
2. La fonction f est croissante sur l'intervalle $[-1\ ;\ 2]$.
3. Pour tout réel x de l'intervalle $[-3\ ;\ 2]$, $f(x) \geqslant -1$.
4. Soit $\mathcal{C}$ la courbe représentative de la fonction f.
   La tangente à la courbe $\mathcal{C}$ au point d'abscisse 0 passe par le point de coordonnées $(1\ ;\ 0)$.

Exercice 2. ***commun à tous les candidats : 5 points***

Pour chacune des propositions suivantes, indiquer si elle est vraie ou fausse et donner une démonstration de la réponse choisie.

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormal direct $(O;\vec{u},\vec{v})$.

1. Soient A le point d'affixe $2-5\text{i}$ et B le point d'affixe $7-3\text{i}$.
   Proposition 1 : Le triangle OAB est rectangle isocèle.
2. Soit (Δ) l'ensemble des points M d'affixe z telle que $|z-\text{i}| = |z+2\text{i}|$.
   Proposition 2 : (Δ) est une droite parallèle à l'axe des réels.
3. Soit $z = 3+\text{i}\sqrt{3}$.
   Proposition 3 : Pour tout entier naturel n non nul, z^{3n} est imaginaire pur.
4. Soit z un nombre complexe non nul.
   Proposition 4 : Si $\dfrac{\pi}{2}$ est un argument de z alors $|\text{i}+z| = 1+|z|$.
5. Soit z un nombre complexe non nul.
   Proposition 5 : Si le module de z est égal à 1 alors $z^2+\dfrac{1}{z^2}$ est un nombre réel.

Exercice 3. ***commun à tous les candidats : 6 points***

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $]1\ ;\ +\infty[$ par

$$f(x) = \ln x - \frac{1}{\ln x}.$$

On nomme $(\mathcal{C})$ la courbe représentative de f et Γ la courbe d'équation $y = \ln(x)$ dans un repère orthogonal $\left(O; \vec{i}, \vec{j}\right)$.

1. (a) Montrer que $f'(x) = \dfrac{(\ln(x))^2 + 1}{x\,(\ln(x))^2}$ et étudier les variations de f.
   (b) Calculer les limites de f en 1 et en $+\infty$ et donner le tableau de variations de f.

2. (a) Déterminer $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} [f(x) - \ln x]$.
   Interpréter graphiquement cette limite.
   (b) Préciser les positions relatives de $(\mathcal{C})$ et de Γ.

3. On se propose de chercher les tangentes à la courbe $(\mathcal{C})$ passant par le point O.
   (a) Soit a un réel appartenant à l'intervalle $]1\ ;\ +\infty[$.
   Démontrer que la tangente T_a à $(\mathcal{C})$ au point d'abscisse a passe par l'origine du repère si et seulement si $f(a) - af'(a) = 0$.
   Soit g la fonction définie sur l'intervalle $]1\ ;\ +\infty[$ par
   $$g(x) = f(x) - xf'(x).$$
   (b) Montrer que sur $]1\ ;\ +\infty[$, les équations $g(x) = 0$ et
   $(\ln x)^3 - (\ln x)^2 - \ln x - 1 = 0$ ont les mêmes solutions.
   (c) Après avoir étudié les variations de la fonction u définie sur $\mathbb{R}$ par $u(x) = x^3 - x^2 - x - 1$ montrer que l'équation $u(x) = 0$ admet une unique solution α dont on donnera une valeur approchée à 10^{-3} près.
   (d) En déduire l'existence d'une tangente unique à la courbe $(\mathcal{C})$ passant par le point O.
   La courbe $(\mathcal{C})$ et la courbe Γ sont données en annexe.
   Tracer cette tangente le plus précisément possible sur cette figure.

4. On considère un réel m et l'équation $f(x) = mx$ d'inconnue x.
   Par lecture graphique et sans justification, donner, suivant les valeurs du réel m, le nombre de solutions de cette équation appartenant à l'intervalle $]1\ ;\ 10]$.

Exercice 4. ***candidats n'ayant pas choisi la spécialité mathématique : 5 points***

L'objet de cet exercice est d'étudier la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par

$$u_0 = 3 \quad \text{et pour tout entier naturel } n,\ u_{n+1} = \frac{1}{2}\left(u_n + \frac{7}{u_n}\right) \qquad (\star)$$

On pourra utiliser sans démonstration le fait que pour tout entier naturel n, $u_n > 0$.

1. On désigne par f la fonction définie sur l'intervalle $]0\ ;\ +\infty[$ par :

$$f(x) = \frac{1}{2}\left(x + \frac{7}{x}\right).$$

   Démontrer que la fonction f admet un minimum.
   En déduire que pour tout entier naturel n, $u_n \geqslant \sqrt{7}$.

2. (a) Soit n un entier naturel quelconque.
   Étudier le signe de $u_{n+1} - u_n$.
   (b) Pourquoi peut-on en déduire que la suite (u_n) est convergente ?
   (c) On déduit de la relation $(\star)$ que la limite ℓ de cette suite est telle que $\ell = \dfrac{1}{2}\left(\ell + \dfrac{7}{\ell}\right)$.
   Déterminer ℓ.

3. Démontrer que pour tout entier naturel n, $u_{n+1} - \sqrt{7} = \dfrac{1}{2}\dfrac{\left(u_n - \sqrt{7}\right)^2}{u_n}$.

4. On définit la suite (d_n) par :

$$d_0 = 1 \quad \text{et pour tout entier naturel } n,\ d_{n+1} = \frac{1}{2}d_n^2.$$

   (a) Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel n,

$$u_n - \sqrt{7} \leqslant d_n.$$

   (b) Voici un algorithme :

Variables :	n et p sont des entiers naturels
	d est un réel.
Entrée :	Demander à l'utilisateur la valeur de p.
Initialisations :	Affecter à d la valeur 1.
	Affecter à n la valeur 0
Traitement :	Tant que $d > 10^{-p}$.
	Affecter à d la valeur $0,5d^2$
	Affecter à n la valeur $n + 1$.
Sortie :	Afficher n.

   En entrant la valeur 9, l'algorithme affiche le nombre 5. Quelle inégalité peut-on en déduire pour d_5 ?
   Justifier que u_5 est une valeur approchée de $\sqrt{7}$ à 10^{-9} près.

Exercice 4. ***candidats ayant choisi la spécialité mathématique : 5 points***

À faire sur une copie séparée des autres exercices.

Les parties A et B sont indépendantes

Partie A : ROC

On rappelle que si a et b sont deux entiers relatifs et p un entier naturel supérieur ou égal à 2 :

on dit que a est congru à b modulo p et on écrit $a \equiv b[p]$ lorsqu'il existe un entier relatif k tel que $a - b = kp$

1. Démontrez que si $a \equiv b[p]$ et $c \equiv d[p]$ alors $ac \equiv bd[p]$

2. En déduire que pour tout entier naturel non nul n $a^n \equiv b^n[p]$

Partie B

Pour tout entier naturel $k \geqslant 2$, on pose $M_k = 2^k - 1$.
On dit que M_k est le k-ième nombre de Mersenne.

1. (a) Reproduire et compléter le tableau suivant, qui donne quelques valeurs de M_k :

k	2	3	4	5	6	7	8	9	10
M_k	3								

   (b) Prouver que le nombre de Mersenne M_{11} n'est pas premier.

2. Soient p et q deux entiers naturels strictement supérieurs à 1.

   (a) Justifier que $2^p \equiv 1[2^p - 1]$
   et déduisez-en que $2^{pq} \equiv 1[2^p - 1]$.

   (b) Démontrer que $2^{pq} - 1$ est divisible par $2^p - 1$ et par $2^q - 1$.

3. Démontrer que si $2^n - 1$ est premier alors n est premier.
   La réciproque est-elle vraie ?

Numéro d'anonymat :

Annexe à rendre avec la copie.

Exercice 3 :