Analyse de Fourier

S. M. Bahri
Master1 MCO
Département de Mathématiques et d'Informatique
Université Abdelhamid Ben Badis - Mostaganem -
23 Janvier 2017

1 Introduction

Il existe une classe trés réduite de fonctions qui sont développables en séries de puissance (ou entière), donc souvent on a besoin d'autres outils pour représenter les fonctions.

Les séries de Fourier et les transformées de Fourier sont de tels outils.

2 Séries de Fourier

Nous introduisons, maintenant, un type de représentation en série qui est bien adapté pour l'analyse des fonctions periodiques. Considérons une fonction f définie sur $\mathbb{R}$, et de période 2π; c'est à dire que

$$f(x+2\pi) = f(x), \quad x \in \mathbb{R}.$$

Nous supposons de plus que f appartient à l'espace vectoriel

$$L^2(-\pi,\pi) := \left\{ f : \int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|\, dx < \infty \right\}. \tag{1}$$

Pour une telle fonction, nous associons formellement la série

$$f \sim \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx), \tag{2}$$

où

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx \; dx, \quad n = 0, 1, 2, \ldots$$

et

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx \; dx, \quad n = 0, 1, 2, \ldots \; .$$

La propriété (1) implique que les intégrales définissants a_n et b_n sont bien définies.

La série (2) est dite **série de Fourier** associée à f, et sont dits **coefficients de Fourier**. La somme partielle d'ordre N de la série de Fourier est donnée par

$$S_N(x) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx). \tag{3}$$

Remark 1 *L'expression (2) introduit les séries de Fourier formellement. Nous n'avons pas encore discuter le problème de convergence des séries. Nous le ferons un peu plus loin.*

Il est clair que le choix des ***fonctions*** $2\pi-$***périodiques*** *est du essentiellement aux fonctions trigonométriques qui apparaissent dans les séries de Fourier et qui sont* $2\pi-$*périodiques. Donc c'est une condition necessaire.*

Le calcul des coefficients de Fourier peut souvent être simplifier en utilisant les régles suivants :

(R1) Si f est $2\pi-$périodique, alors

$$\int_0^{2\pi} f(x)\,dx = \int_a^{a+2\pi} f(x)\,dx, \quad \forall a \in \mathbb{R}.$$

(R2) Si f est paire, i.e., $f(x) = f(-x)$ pour tout x, alors

$$\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = \int_0^{a} f(x)\,dx, \quad \forall a > 0.$$

(R3) Si f est impaire, i.e., $f(x) = -f(-x)$ pour tout x, alors

$$\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = 0, \quad \forall a > 0.$$

Si f est une fonction paire, alors $x \mapsto f(x)\cos nx$ est paire et $x \mapsto f(x)\cos nx$ est impaire$x \mapsto f(x)\cos nx$ est paire et $x \mapsto f(x)\cos nx$ est impaire; si f est une fonction impaire, alors $x \mapsto f(x)\cos nx$ est impaire et $x \mapsto f(x)\cos nx$ est paire. Si l'on combine ces observations avec les régles çi dessus, nous obtenons le résultat suivant :

Theorem 2 *Si f est une fonction paire, alors $b_n = 0$ pour tout n, et*

$$a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\cos nx\ dx, \quad n = 0, 1, 2, \dots\ .$$

Si f est une fonction impaire, alors $a_n = 0$ pour tout n, et

$$b_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\sin nx\ dx, \quad n = 0, 1, 2, \dots\ .$$

Example 3 *Considérons la fonction saut*

$$f(x) = \begin{cases} -1 & si \quad -\pi \le x < 0 \\ 0 & si \quad x = 0 \\ 1 & si \quad 0 < x < \pi \end{cases} \tag{4}$$

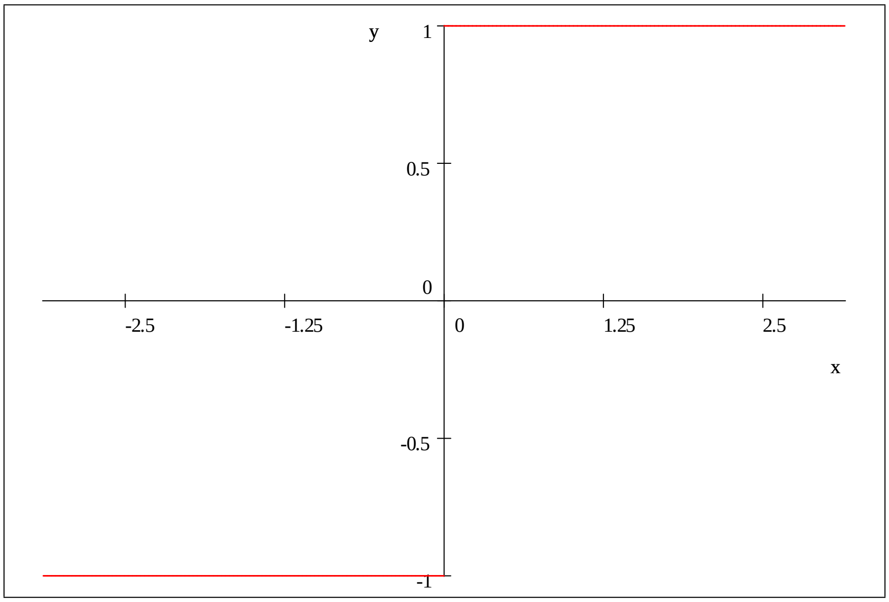

Figure1

prolongée à une fonction $2\pi-$*périodique. La fonction* f *est impaire, donc d'aprés le théorème2 on a* $a_n = 0$ *pour tout* n*, et*

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\sin nx \; dx \\ &= \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} \sin nx \; dx \\ &= \begin{cases} 0 & si \quad n \text{ est paire,} \\ \frac{4}{n\pi} & si \quad n \text{ est impaire.} \end{cases} \end{aligned}$$

Par conséquent la série de Fourier de f *s'écrit*

$$\begin{aligned} f &\sim \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos nx + b_n \sin nx) \qquad (5) \\ &= \sum_{n \; impaire} \frac{4}{n\pi}\sin nx \\ &= \frac{4}{\pi}\left(\sin x + \frac{1}{3}\sin 3x + \frac{1}{5}\sin 5x + \cdots\right) \\ &= \frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2n-1}\sin(2n-1)x. \end{aligned}$$

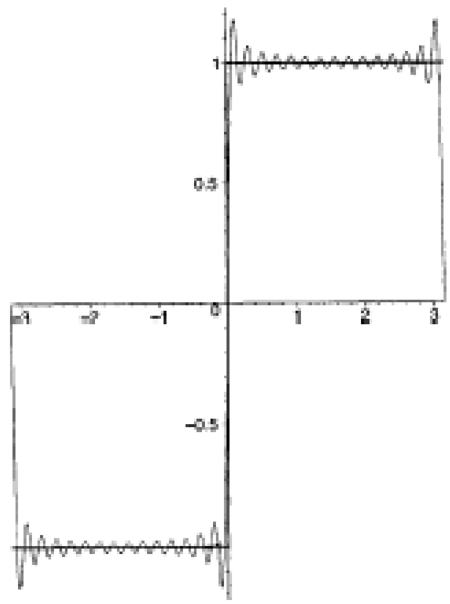

Figure2. La fonction f donnée par (4) et la somme partielle S_{15}.

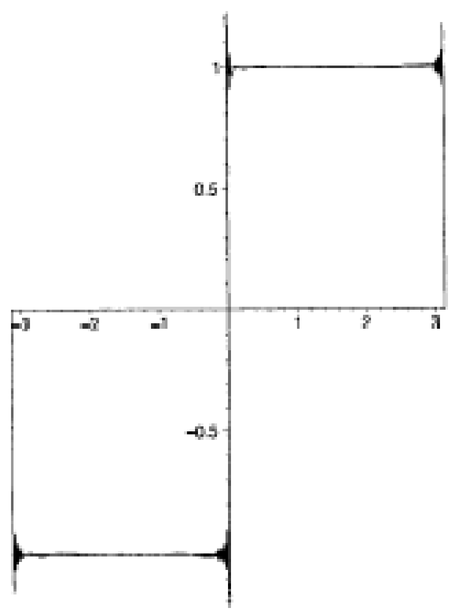

Figure3. La fonction f donnée par (4) et la somme partielle S_{100}. Observer le dépassement de la somme partielle autour des points où f est discontinue.

Les **Figures 2-3** montrent que les sommes partielles approchent bien f en les points où f est continue. La figure montre également qu'il ya un problème au voisinage des points où f est discontinue : toutes les sommes partielles considérées sont «tirer sur la valeur correcte". Cela s'avère être un phénomène général pour les séries de Fourier, il est appelé phénomènes Gibb, et apparaît pour la série de Fourier des fonctions arbitraires avec sauts. On peut montrer que le dépassement est d'environ 9% de la taille du saut, quelle que soit la fonction considérée.

Il est intéressant de noter que la série de Fourier (5) converge effectivement ponctuellement pour tout $x \in \mathbb{R}$, ceci découle du théorème8 qui sera formulé dans la section suivante, mais il est non triviale de prouver directement sur la base des résultats que nous avons présentés dans le tutoriel sur les séries infinies. Afin d'illustrer les difficultés, nous mentionnons que la série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n-1}$ est divergente, ce qui peut être déduit de l'exemple 2.2.3. Ainsi, la convergence de (5) est une conséquence des termes $\frac{1}{2n-1}$ étant multipliés par $\sin(2n-1)x$. Nous notons également que (5) n'est pas absolument convergente : en effet,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{1}{2n-1} \sin(2n-1)x \right|$$

est nettement divergente pour $x = \pi/2$. La conclusion de ces observations est que la convergence des (5) est une conséquence des changements de signes dans le terme $\sin(2n-1)x$.

Pour une utilisation ultérieure nous notons que les mauvaises propriétés de convergence de la série de Fourier en (5) vient du fait que les coefficients $\frac{1}{2n-1}$ **tendent très lentement** vers zéro lorsque $n \to \infty$. Dans la section 3.7, nous verrons que cela est lié à la fonction f étant non différentiable en $x = \pi$. Nous notons également qu'une légère modification de la fonction f jouera un rôle important dans les chapitres des ondelettes, voir (4.8) et la section 5.4.

Example 4 *Considérons la fonction*

$$f(x) = x, \quad x \in]-\pi, \pi[,$$

à nouveau prolongée en une fonction 2π-périodique. Via le théorème2, nous voyons que $a_n = 0$ pour tout n et que

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \sin nx \, dx \\ &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x \sin nx \, dx \end{aligned}$$

Grâce à l'intégration partielle,

$$\begin{aligned}
\int_0^{\pi} x \sin nx \; dx &= \left[-\frac{x}{n}\cos nx\right]_0^{\pi} + \frac{1}{n}\int_0^{\pi}\cos nx \; dx \\
&= -\frac{\pi}{n}\cos n\pi + \frac{1}{n^2}\left[\sin nx\right]_0^{\pi} \\
&= -\frac{\pi}{n}(-1)^n + 0 \\
&= \frac{\pi}{n}(-1)^{n+1}.
\end{aligned}$$

Donc

$$b_n = \frac{2}{n}(-1)^{n+1},$$

et la série de Fourier est

$$\begin{aligned}
f &\sim \sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{n}(-1)^{n+1}\sin nx \qquad (6)\\
&= 2\left(\sin x - \frac{1}{2}\sin 2x + \frac{1}{3}\sin 3x - \frac{1}{4}\sin 4x + \cdots\right).
\end{aligned}$$

Nous encourageons le lecteur à tracer la fonction f ainsi que les premières sommes partielles de la série de Fourier: comparaison des graphes montre encore une fois que les sommes partielles approchent bien f, sauf autour des points où f est non différentiable. Le Théorème 3.2.3, dans la section suivante, vous donnera une explication formelle de ce fait.

3 Théorème de Fourier et approximation

Nous passons maintenant à une discussion de la convergence simple des séries de Fourier. Ayant notre expérience avec les séries de puissances à l'esprit, il est naturel de se demander si la série de Fourier d'une fonction f converge ponctuellement vers $f(x)$ pour chaque $x \in \mathbb{R}$. Cependant, sans connaissances supplémentaires sur la fonction, ceci est trop optimiste :

Example 5 *Soit $f \in L^2(-\pi, \pi)$, et définissons la fonction $g \in L^2(-\pi, \pi)$ par*

$$\begin{cases} g(x) = f(x) & si \quad x \notin \mathbb{Z}, \\ g(x) = f(x) + 1 & si \quad x \in \mathbb{Z}. \end{cases}$$

Comme une intégrale est invariante par un changement de la valeur de l'intégrant en quelques points, f et g ont exactement les mêmes coefficients de Fourier, et par conséquent, la même série de Fourier. Donc au moins pour l'une des fonctions, la série de Fourier ne converge pas simplement vers la fonction pour $x \in \mathbb{Z}$.

Citons un exemple encore pire :

Example 6 *Considérons la fonction*

$$f(x) = \begin{cases} -1 & \text{if} \quad x \in \left]-\pi, \pi\right[\cap \mathbb{Q} \\ 0 & \text{if} \quad x \in \left]-\pi, \pi\right[\setminus \mathbb{Q} \end{cases} \tag{7}$$

Les lecteurs ayants une connaissance de l'intégrale de Lebesgue peuvent prouver que tous les coefficients de Fourier de cette fonction sont nuls. Ainsi, la série de Fourier est égale à zéro, et ne converge pas vers $f(x)$ si $x \in \mathbb{Q}$.

Ces exemples montrent que certaines conditions sont nécessaires si nous voulons une relation ponctuelle entre une fonction et sa série de Fourier. Il s'avère que les conditions sur la régularité de f seront suffisantes pour obtenir de telles relations.

Definition 7 *Une fonction f sur $\mathbb{R}$ est dite* ***différentiable par morceaux*** *si f est différentiable avec une dérivée continue sur chaque intervalle borné - à l'exception peut-être en un nombre fini de points $x_0, x_1, ..., x_n$; en un point x_j où f n'est pas dérivable nous avons également besoin que les limites*

$$\lim_{x \to x_j^+} f(x), \quad \lim_{x \to x_j^-} f(x), \quad \lim_{x \to x_j^+} f'(x), \quad et \quad \lim_{x \to x_j^-} f'(x)$$

existent.

Pour les fonctions satisfaisant à ces conditions, nous avons le résultat important suivant :

Theorem 8 *Supposons que f est différentiable par morceaux et 2π-périodique. Alors la série de Fourier converge simplement pour tous $x \in \mathbb{R}$. Pour la fonction somme, nous avons ce qui suit :*

(i) *Si f est continue en x, alors*

$$\frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx) = f(x); \tag{8}$$

(ii) *Si x_j est un point de discontinuité de f, alors*

$$\frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx) = \frac{1}{2}\left(\lim_{x \to x_j^+} f(x) + \lim_{x \to x_j^-} f(x) \right)$$

Supposons maintenant que f est partout continue. Alors la série de Fourier converge uniformément vers f, et l'écart maximal entre $f(x)$ et la somme partielle $S_N(x)$ peut être estimé par

$$|f(x) - S_N(x)| \leq \frac{1}{\sqrt{N}} \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sqrt{\int_{-\pi}^{\pi} |f'(t)|^2 \; dt}. \tag{9}$$

Le théorème8 nous permet souvent de se débarrasser du **signe mystérieux** "~" dans la définition des séries de Fourier : autrement dit, il est dit que pour les fonctions raisonnables, le signe "~" peut être remplacé par " = ", sauf en des points où la fonction est discontinue.

La première partie du théorème8, i.e., l'affirmation de la convergence des séries de Fourier, est appelé théorème de Fourier. Fourier a publié le résultat en 1822 dans l'article [13], en fait avec l'affirmation selon laquelle les séries de Fourier converge sans aucune hypothèse sur la fonction. Il a donné des raisons assez intuitifs pour son affirmation, et l'article n'atteint pas le niveau de précision requis pour les publications mathématiques de nos jours. Déjà à l'époque de sa publication, de nombreux chercheurs ont protesté contre le résultat, et plus tard il a été prouvé que le résultat ne détient généralement de Fourier cru. En fait, les choses peuvent aller très mal si nous n'imposons pas les conditions du théorème8 : il existe des fonctions pour lesquelles tous les coefficients de Fourier sont bien définis, mais dont la série de Fourier ne converge pas à n'importe quel point! Ces fonctions, cependant, n'appartiennent pas à $L^2(-\pi, \pi)$. Pour les fonctions de $L^2(-\pi, \pi)$ la série de Fourier converge simplement presque partout, la signification exacte de **"presque partout"** peut être trouvée dans les manuels de la théorie de mesure.

Ceci dit, il faut aussi ajouter que l'on doit admirer Fourier pour son intuition. Fondamentalement, il avait raison, et son affirmation a eu une forte influence sur le développement des mathématiques : une grande partie des mathématiques du XIXe siècle et du XXe siècle a été inventée dans le processus de trouver les conditions de convergence des séries de Fourier et en appliquant les résultats à, par exemple, la résolution des équations différentielles.

L'importance du théorème8 réside dans le fait qu'il montre comment une large classe de fonctions peuvent être décomposées en une somme de sinus et cosinus élémentaires. En conséquence plus curieuse, nous mentionnons que cela permet souvent de déterminer la somme exacte d'une certaine série infinie :

Example 9 *Pour la fonction saut (4), l'exemple3 implique que*

$$f(x) = \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n-1} \sin(2n-1)x, \quad \forall x \in \mathbb{R}. \tag{10}$$

Pour $x \notin \pi\mathbb{Z}$ ce résultat découle du théorème8 (i). Pour $x \in \pi\mathbb{Z}$, il résulte de (ii) et la définition particulière de $f(0)$: un choix différent de $f(0)$ ne changerait pas la série de Fourier, mais (10) ne serait plus valable pour $x \in \pi\mathbb{Z}$.

L'application de (10) avec $x = \pi\backslash 2$ montre que

$$1 = \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n-1} \sin(2n-1)\frac{\pi}{2} = \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n-1} (-1)^{n-1},$$

ou

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n-1} (-1)^{n-1} = \frac{\pi}{4}.$$

Pour une fonction f continue, les hypothèses du théorème8 impliquent que la série de Fourier converge uniformément vers f. L'équation (9) peut être utilisée pour estimer le nombre de termes que nous devons garder dans la série de Fourier afin de garantir une certaine approximation de la fonction f : si nous voulons que $|f(x) - S_N(x)| \leq \epsilon$ pour un certain $\epsilon > 0$, nous pouvons choisir N tel que

$$\frac{1}{\sqrt{N}} \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sqrt{\int_{-\pi}^{\pi} \left|f'(t)\right|^2 \, dt} \leq \epsilon,$$

i.e.,

$$N \geq \frac{\int_{-\pi}^{\pi} \left|f'(t)\right|^2 \, dt}{\pi \epsilon^2}. \tag{11}$$

Notez que (11) est une "estimation du pire des cas» : elle donne une valeur de $N \in \mathbb{N}$ qui peut être utilisée pour toutes les fonctions répondant aux conditions du théorème8. Afin de minimiser le coût de calcul, nous voulons souvent obtenir une approximation donnée en utilisant de petites valeurs possibles de N. Dans les cas concrets dans lesquels les coefficients de Fourier sont connus explicitement, le prochain résultat peut souvent être utilisé pour prouver que les petites valeurs de N suggérées dans (11) sont suffisantes.

Proposition 10 *Supposons que f est continue, différentiable par morceaux et 2π-périodique, avec les coefficients de Fourier a_n, b_n. Alors*

$$|f(x) - S_N(x)| \leq \sum_{n=N+1}^{\infty} \left(|a_n| + |b_n|\right), \quad \forall x \in \mathbb{R}. \tag{12}$$

Proof. D'après le théorème8, les hypothèses impliquent que la série de Fourier converge vers $f(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. Via (8) et (3),

$$\begin{aligned}
|f(x) - S_N(x)| &\leq \left| \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos nx + b_n \sin nx\right) \right. \\
&\qquad \left. - \left(\frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{N} \left(a_n \cos nx + b_n \sin nx\right) \right) \right| \\
&= \left| \sum_{n=N+1}^{\infty} \left(a_n \cos nx + b_n \sin nx\right) \right| \\
&\leq \sum_{n=N+1}^{\infty} \left|a_n \cos nx + b_n \sin nx\right| \\
&\leq \sum_{n=N+1}^{\infty} \left(|a_n| + |b_n|\right).
\end{aligned}$$

■

Dans l'exemple suivant, nous comparons le théorème8 et la proposition10.

Example 11 *Considérons la fonction 2π-périodique donnée par*

$$f(x) = |x|, \quad x \in [-\pi, \pi].$$

Notre but est de trouver des estimations pour les $N \in \mathbb{N}$ tels que

(i) $|f(x) - S_N(x)| \leq 0.1$ *pour tout* $x \in \mathbb{R}$;

(ii) $|f(x) - S_N(x)| \leq 0.01$ *pour tout* $x \in \mathbb{R}$.

Le lecteur peut vérifier que la série de Fourier de f est donnée par

$$f \sim \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} \cos(2n+1)x \tag{13}$$

*Voir les **Figures 4-5**, qui montrent la fonction f et les sommes partielles S_1 et S_2. D'après le théorème8, la série de Fourier converge uniformément vers f.*

Afin de trouver $N \in \mathbb{N}$ satisfaisant (i) nous appliquons d'abord (11), qui a été calculée comme une conséquence du théorème8 : elle montre que (i) est satisfaite si

$$N \geq \frac{2\pi}{0.1^2 \pi} = 200.$$

Le même argument montre que dans (ii) nous pouvons utiliser $N \geq 20000$.

Nous allons maintenant appliquer la proposition10. Via (12),

$$|f(x) - S_N(x)| \leq \frac{4}{\pi} \sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2}.$$

En applicant le résultat de l'exercice 2.4, on obtient que (i) est satisfaite si

$$\frac{4}{\pi} \left(\frac{1}{4N+6} + \frac{1}{(2N+3)^2} \right) \leq 0.1;$$

et cette condition est satisfaite déjà pour $N \geq 3$. De la même façon, le lecteur peut prouver que (ii) est satisfaite si $N \geq 32$.

Pour la fonction considérée ici, nous voyons que la Proposition10 conduit à un résultat bien meilleur que le théorème8. La différence entre les estimations obtenues au moyen de ces deux résultats devient plus grande lorsque nous demandons une meilleure précision: si l'on diminue l'erreur de tolérance par un facteur de 10,

- *Le théorème8 augmente la valeur de N par un facteur de* 100;
- *La proposition10 augmente la valeur de N par un facteur d'environ* 10.

Nous notons que ce résultat est basé sur le choix de la fonction considérée : la différence entre l'utilisation du théorème8 ou la proposition10 dépend de la fonction donnée.

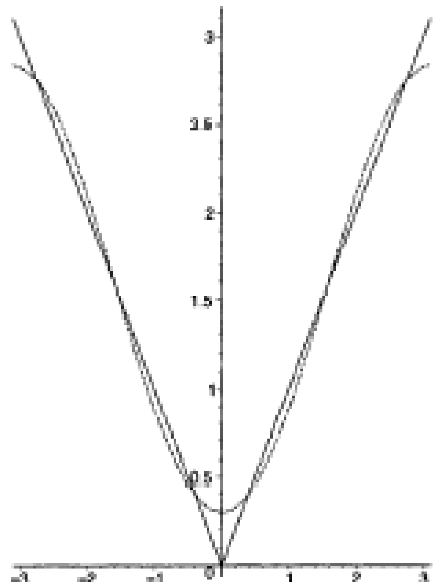

Figure4.La fonction $f\,(x) = |x|$ et la somme partielle $S_1(x)$, sur l'intervalle $[-\pi, \pi]$.

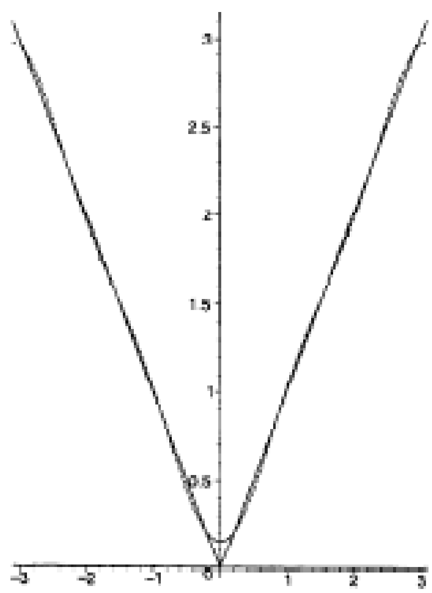

Figure5.La fonction $f\,(x) = |x|$ et la somme partielle $S_2(x)$, sur l'intervalle $[-\pi, \pi]$.